Électromagnétisme

AAV n°3 : être capable d'utiliser le vecteur densité de courant et l'équation de conservation de la charge

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

1 Les savoir-faire à connaître

Savoir utiliser une densité de courant volumique

Exercice 1 : Densité volumique de courant

1. Un fil de cuivre de section $1,5$ mm^2 peut transporter sans risque un courant d'intensité 10 A. Quelle section minimale de fil peut transporter 25 A sans risque (c'est à dire avec la même densité volumique de courant) ?
2. On modélise un fil par un cylindre de rayon R parcouru uniformément par un courant i. Déterminer l'expression de la densité de courant volumique en fonction de R et i.
3. Dans un milieu conducteur occupant le demi-espace $z \geqslant 0$ peut exister sous certaines conditions le courant volumique $\vec{j} = j_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \widehat{u}_y$. Calculer le courant i qui traverse une section de longueur h suivant $\widehat{u}_x$ et de longueur infinie suivant $z \geqslant 0$.

Savoir utiliser la loi d'Ohm local

Exercice 2 : De la loi d'Ohm locale à la loi d'Ohm

Cet exercice a pour but de faire le lien entre la loi d'Ohm local $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ et la loi d'Ohm $U = RI$. On considère un conducteur de longueur l et de section S tel que la longueur du conducteur est très supérieur à son diamètre. Cette hypothèse est importante car elle nous permet de dire que le vecteur densité de courant volumique est en tout point du conducteur colinéaire avec le vecteur $\mathrm{d}\vec{l}$.

1. On rappelle que la différence de potentiel électrique entre deux points est donnée par $V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}.\mathrm{d}\vec{l}$. Exprimer la différence de potentiel entre les extrémités du conducteur en fonction de j, l et σ.
2. En déduire l'expression de la différence de potentiel en fonction de I, S, l et σ.
3. En déduire l'expression de la résistance en fonction de S, l et σ.

Savoir étudier le modèle de Drude

Exercice 3 : Le modèle de Drude

Peu après la découverte de l'électron, Paul Drude proposa en 1900 un premier modèle de conduction électrique dans un métal. Les électrons y sont les porteurs de charge responsables du courant électrique dans un métal et ils subissent des collisions sur les imperfections du réseau [a]. Ce modèle, purement classique, est basé sur trois hypothèses :

- Les électrons subissent le champ électrique $\vec{E}$ appliqué au métal.
- Si nous notons $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ le temps entre la collision t_{k+1} et t_k, le temps moyen qui s'écoule entre deux collisions est donné par $< \Delta t_k >= \tau$. Le temps τ est appelé temps de relaxation.
- L'électron perd toute l'énergie acquise du champ électrique à chaque collision. Autrement-dit, l'électron perd toute la mémoire de sa vitesse ultérieure à chaque collision, il se retrouve avec une vitesse aléatoire avant d'être accéléré par le champ électrique.

1. Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}_i$ d'un électron i juste avant une collision grâce au principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron entre t_k et t_{k+1}. On nomme $\vec{v}_{i,k}$ la vitesse d'un électron juste après la collision au temps t_k.
2. En déduite l'expression de la valeur moyenne de la vitesse $\vec{v} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i$ où N est le nombre d'électrons.
3. Montrer que la conductivité électrique a pour expression $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$.
4. La conductivité électrique du sodium est de $210\,\mathrm{S\,m^{-1}}$. Calculer τ pour le sodium sachant que la densité du sodium est de $1\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, la masse molaire du sodium est de $23\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ et le sodium est monovalent.

[a]. Les collisions sont dues aux perturbations apportées à la périodicité du réseau cristallin par les imperfections du réseau mais également aux vibrations du réseau dues à l'agitation thermique.

Savoir calculer un courant et vérifier l'équation de continuité

Exercice 4 : Équation de continuité

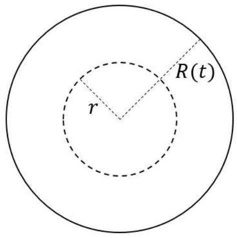
Une sphère de rayon variable $R(t)$ contient une charge totale Q uniformément répartie dans son volume. On admet que lorsque R varie, le mouvement des charges à l'intérieur de la sphère est radial.

1. Déterminer l'expression de la densité volumique de charge $\rho(t)$.
2. Déterminer l'expression de la charge $q(r,t)$ contenue à l'instant t dans une sphère fixe de rayon r avec $r < R$.
3. Déterminer l'expression du taux de variation $\frac{dq}{dt}$ de charges contenues dans la sphère de rayon r.
4. Le mouvement des charges fait apparaitre à l'intérieur de la sphère de rayon $R(t)$ un vecteur densité de courant $\vec{j} = j(r,t)\widehat{u}_r$. Utiliser l'expression de la divergence en coordonnées sphériques pour montrer que l'équation de continuité $div\ \vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ est bien respectée avec $j(r,t) = \frac{3Qr}{4\pi R^4}\frac{dR}{dt}$.

2 La mise en œuvre pour valider l'apprentissage

Exercice 5 : Conservation de la charge

Une boule de rayon variable $R(t)$ contient une charge totale Q uniformément répartie dans son volume. On admet que lorsque R varie, le mouvement des charges à l'intérieur de la sphère est radial.



1. Montrer que $\frac{d\rho}{dt} = -\frac{9Q}{4\pi R^4}\frac{dR}{dt}$. Interpréter physiquement le signe de $\frac{d\rho}{dt}$ en fonction du signe de $\frac{dR}{dt}$.

On cherche maintenant à établir l'expression de la densité volumique de courant $\vec{J}$ à partir de l'équation locale de conservation de la charge $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\ \vec{J} = 0$.

2. Écrire $div\ \vec{J}$ en coordonnées sphériques.
3. En déduire que $J_r = \frac{3Qr}{4\pi R^4}\frac{dR}{dt} + \frac{Cst}{r^2}$ où Cst est une constante. Utiliser le fait que le courant doit rester fini pour déterminer la constante.
4. En déduire l'expression de la vitesse radiale de déplacement de charges à une distance r du centre de la boule.
5. En déduire l'expression du courant I donnée par $I = \iint \vec{J}.\mathrm{d}\vec{S}$ qui passe à travers une surface sphérique de rayon quelconque r (indiqué en pointillés sur le schéma).