Électromagnétisme

AAV n°2 : être capable d'utiliser les équations locales de l'électrostatique

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

1 Les savoir-faire à connaitre

Savoir retrouver la forme locale du théorème de Gauss

Exercice 1 : Formes locales du théorème de Gauss et loi de Poisson

1. Déduire du théorème d'Ostrogradsky et du théorème de Gauss la forme locale du théorème de Gauss : $div\ \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.
2. Retrouver la loi de Poisson et la loi de Laplace.

Savoir utiliser le théorème de Gauss local

Exercice 2 : Densité volumique de charge

On considère le champ électrique $\overrightarrow{E} = ax^2\widehat{u}_x$ pour $0\,\text{m} < x < 3\,\text{m}$ et $\overrightarrow{E} = b\widehat{u}_x$ pour $x > 3\,\text{m}$.

1. Déterminer l'expression de la densité volumique de charge à $2\,\text{m}$.
2. Déterminer l'expression de la densité volumique de charge à $5\,\text{m}$.

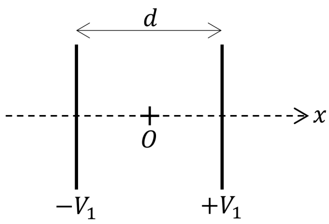
On considère le champ électrique en coordonnées sphériques $\overrightarrow{E} = ar^2\widehat{u}_r + \frac{b\cos\theta}{r}\widehat{u}_\theta + c\widehat{u}_\varphi$

3. Déterminer l'expression de la densité volumique de charge.

Savoir utiliser la loi de Laplace et les conditions de passage

Exercice 3 : Condensateur plan

La figure suivante montre un condensateur plan dont les plaques ont un potentiel $+V_1$ et $-V_1$. Nous considérons que le potentiel électrique produit par le condensateur est uniquement fonction de x. Cela renvient à considérer que le condensateur est constitué de deux plaques infinies.



1. Combiner la forme locale du théorème de Gauss et l'équation $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ pour obtenir l'équation de Poisson.
2. Que devient la loi de Poisson en un point où la densité volumique de charges est nulle.
3. Résoudre l'équation de la question précédente dans le cas du condensateur pour en déduire l'expression du potentiel électrique **à l'intérieur** du condensateur.
4. En déduire que le champ électrique dans le condensateur a pour expression $\vec{E} = -\frac{2V_1}{d}\widehat{u}_x$.
5. Déterminer l'expression du potentiel électrique **à l'extérieur** du condensateur en utilisant le fait que le potentiel électrique doit rester fini et en utilisant la continuité du potentiel électrique à une interface chargée.
6. En déduire l'expression du champ électrique à l'extérieur du condensateur.
7. Vérifier que la relation de passage du champ électrique est vérifiée. En déduire l'expression de la densité surfacique de charges des armatures du condensateur.

Savoir utiliser la loi de Poisson

Exercice 4 : Ecrantage d'un champ électrostatique dans un électrolyte

Une plaque métallique de grande surface placée en $z = 0$ est portée au potentiel uniforme $V_0 > 0$, le potentiel en $z = +\infty$ est nul. Cette plaque est mise en contact avec une solution électrolytique constituée de cations K^+ et d'anions A^- située en $z > 0$. La plaque étant considérée infinie, le potentiel ne dépend que de z.
Les densités volumiques d'ions sont données par :

$$\begin{aligned} n_+(z) &= n_0 e^{-\frac{eV(z)}{k_B T}} \\ n_-(z) &= n_0 e^{\frac{eV(z)}{k_B T}} \end{aligned}$$

où T représente la température.

1. Utiliser les expressions des densités volumiques d'ions pour exprimer la densité volumique de charges en faisant apparaitre une fonction sinus hyperbolique.
2. Nous souhaitons déterminer l'expression du potentiel électrique. Est-ce que l'équation de Poisson est facilement soluble compte-tenu de l'expression de ρ ?

On suppose que $eV(z) << k_B T$. Nous pouvons ainsi faire un développement limité des expressions n_+ et n_- à l'ordre 1 en $\frac{eV}{k_B T}$.

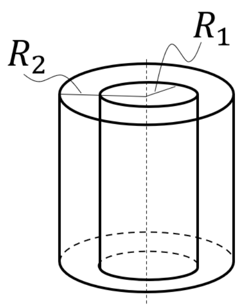
3. Montrer que le potentiel V est solution d'une équation de la forme $\frac{d^2V}{dz^2} - \frac{V}{\delta^2} = 0$ et donner l'expression de δ.
4. Déterminer l'expression de $V(z)$ en fonction de V_0, z et δ.
5. En déduire l'expression du champ électrique $\vec{E}$. Commenter l'effet de la solution électrolytique sur le champ électrique produit par la plaque.

2 La mise en œuvre des savoir-faire pour acquérir l'apprentissage

Exercice 5 : Condensateur cylindrique

Nous étudions dans cet exercice un condensateur cylindrique constitué de deux armatures cylindriques de rayon R_1 et R_2 avec $R_2 > R_1$ aux potentiels V_1 et V_2. Le plus petit cylindre est inséré dans le plus grand cylindre pour réaliser le condensateur. Les axes des deux cylindres coïncident.

Nous négligeons les effets de bords, ce qui revient à considérer que le potentiel électrique dépend uniquement de la distance radial r à l'axe de révolution des cylindres.



1. Déduire du théorème d'Ostrogradsky et du théorème de Gauss la forme locale du théorème de Gauss.
2. Combiner la forme locale du théorème de Gauss et l'équation $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ pour obtenir l'équation de Poisson.
3. Que devient la loi de Poisson en un point où la densité volumique de charges est nulle.
4. Résoudre l'équation de la question précédente dans le cas du condensateur pour en déduire l'expression du potentiel électrique **à l'intérieur** du condensateur. On rappelle que $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)$ pour une fonction $f(r)$ en coordonnées cylindriques.
5. En déduire l'expression du champ électrique dans le condensateur donnée par $\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\widehat{u}_r$.
6. Déterminer l'expression du potentiel électrique **à l'extérieur** $(r > R_2)$ du condensateur en utilisant le fait que le potentiel doit resté fini.
7. En déduire l'expression du champ électrique à l'extérieur du condensateur $(r > R_2)$.
8. Utiliser la relation de passage du champ électrique pour déterminer l'expression de la densité surfacique de charges du condensateur.

Exercice 6 : Orage !

La figure ci-dessous montre une photo d'un cumulonimbus. On cherche à comprendre l'évolution du champ électrique dans ce type de nuage.

FIGURE 1 – Exemple de cumulonimbus.

Le mécanisme de convection à l'origine de la formation du nuage provoque une séparation des charges électriques dans le nuage qui a généralement la répartition montrée dans la figure 2. Des mesures en ballon sonde ont par ailleurs montré que la valeur du champ électrique à l'intérieur du nuage peut atteindre $200\,\mathrm{kV\,m^{-1}}$. Le champ électrique au niveau du sol en $h_0 = 500\,\mathrm{m}$ vaut $65\,\mathrm{kV\,m^{-1}}$. Le champ électrique est nul en $z = 0$. Le sol a une densité volumique de charges ρ_{sol} uniforme.

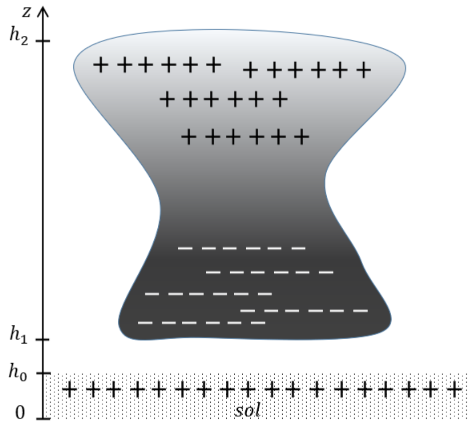


FIGURE 2 – Exemple de cumulonimbus.

On néglige les effets de bords dans notre modélisation, ce qui implique que toutes les grandeurs dépendent uniquement de z. Ainsi, le champ électrique au point M se met sous la forme $\overrightarrow{E}(M) = E(z)\widehat{u}_z$. On nomme $\rho(z)$ la densité volumique de charges dans le nuage et on considère que la densité volumique de charge varie linéairement de $-\rho_0$ en $h_1 = 2\,\mathrm{km}$ à ρ_0 en $h_2 = 10\,\mathrm{km}$. On prend pour base du nuage $S = 1\,\mathrm{km}^2$.

1. Déterminer l'expression du champ électrique entre h_0 et h_1 à l'aide de la version locale du théorème de Gauss.
2. Déterminer l'expression de la densité volumique de charge $\rho(z)$ dans le nuage.
3. Déterminer l'expression du champ électrique dans le nuage à l'aide de la version locale du théorème de Gauss.
4. Déterminer l'expression du potentiel électrique (on note V_0 le potentiel électrique en $z = h_0$) et vérifier la continuité du potentiel électrique.
5. Vérifier que l'équation de Poisson est bien satisfaite.