Électromagnétisme

AAV n°1 : être capable d'utiliser les résultats de bases de l'analyse vectorielle.

Consignes pour la rédaction : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

1 Les savoir-faire à connaitre

Savoir calculer un flux

Exercice 1 : Flux d'un champ de vecteurs

On considère un champ de vecteur $\vec{A}$ défini en coordonnées sphériques par $\vec{A} = \alpha r^3 \widehat{u}_r + \beta r^2 \cos\theta \widehat{u}_\theta$ où α et β sont des constantes.

1. Déterminer le flux de $\vec{A}$ à travers une sphère de rayon R centrée en O.

Savoir calculer une divergence

Exercice 2 : Divergence d'un champ de vecteurs

On considère un champ de vecteur $\vec{A}$ défini en coordonnées sphériques par $\vec{A} = \alpha r^3 \widehat{u}_r + \beta r^2 \cos\theta \widehat{u}_\theta + r \sin\theta \widehat{u}_\phi$ où α et β sont des constantes.

1. Déterminer la divergence de ce champ de vecteurs en utilisant le formulaire.

Savoir utiliser le théorème d'Ostrogradski

Exercice 3 : Théorème d'Ostrogradski

1. Rappeler l'expression du théorème d'Ostrogradski.

On considère un champ de vecteur $\vec{A}$ défini en coordonnées sphériques par $\vec{A} = \alpha r^3 \widehat{u}_r + \beta r^2 \cos\theta \widehat{u}_\theta$ où α et β sont des constantes.

2. Déterminer le flux de $\vec{A}$ à travers une sphère de rayon R en utilisant le théorème d'Ostrogradski.

Savoir calculer la circulation d'un champ de vecteurs

Exercice 4 : circulation

On considère un champ de vecteur $\vec{A}$ défini en coordonnées cylindriques par $\vec{A} = \alpha r^n \cos\theta \widehat{u}_\theta$ où α est une constante et n un entier positif supérieur ou égal à 1.

1. Déterminer la circulation de $\vec{A}$ sur un cercle de rayon R et d'axe Oz.

Savoir calculer le rotationnel d'un champ de vecteurs

Exercice 5 : rotationnel

On considère un champ de vecteur $\vec{A}$ défini en coordonnées cylindriques par $\vec{A} = \alpha r^n \cos\theta \widehat{u}_\theta$ où α est une constante et n un entier positif supérieur ou égal à 1.

1. Calculer le rotationnel de ce champ de vecteur en utilisant le formulaire.

Savoir utiliser le théorème de Stokes

Exercice 6 : Théorème de Stokes

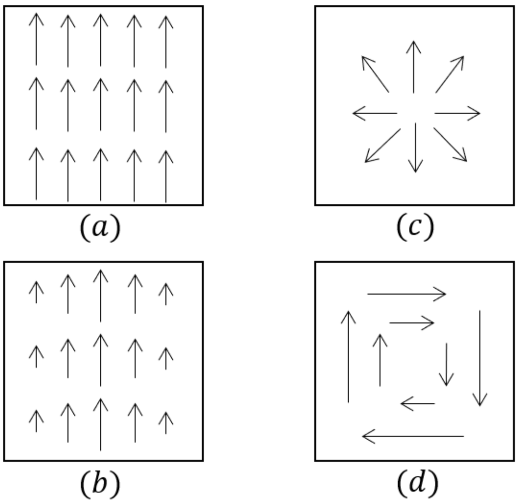
On considère un champ de vecteur $\vec{A}$ défini en coordonnées cylindriques par $\vec{A} = \alpha r^n \cos\theta \widehat{u}_\theta$ où α est une constante et n un entier positif supérieur ou égal à 1.

1. Déterminer la circulation de $\vec{A}$ sur un cercle de rayon R et d'axe Oz en utilisant le théorème de Stokes.

Savoir interpréter "visuellement" le rotationnel et la divergence

Exercice 7 : Vision géométrique de la divergence et du rotationnel

Déterminer les champs de vecteurs de divergence nulle et de rotationnel nul.



Savoir utiliser le système de coordonnées cartésiennes pour démontrer une relation d'analyse vectorielle

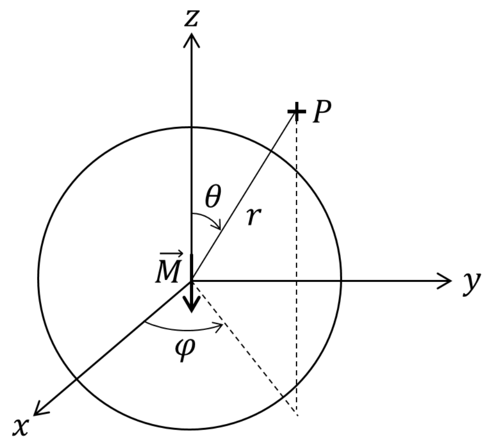
Exercice 8 : Une relation importante

Soit $\vec{A} = A_x(x,y,z)\widehat{u}_x + A_y(x,y,z)\widehat{u}_y + A_z(x,y,z)\widehat{u}_z$. Montrer en utilisant un système de coordonnées cartésiennes la relation $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} div\ \vec{A} - \Delta\vec{A}$.

2 La mise en œuvre des savoir-faire pour acquérir l'apprentissage

Exercice 9 : Champ magnétique terrestre

Le champ magnétique terrestre est modélisé par le champ d'un dipôle permanent de moment magnétique $\overrightarrow{M} = -M\widehat{u}_z$ situé au centre de la Terre assimilée à une sphère de rayon $R_T = 6400\,\mathrm{km}$. L'intensité du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ au pôle nord terrestre est notée $B_0 = 6 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$.



Le champ magnétique engendré par le dipôle $\overrightarrow{M}$ en coordonnées sphériques a pour expression :

$$\overrightarrow{B} = -\frac{\mu_0 M}{4\pi r^3}(2\cos\theta\widehat{u}_r + \sin\theta\widehat{u}_\theta)$$

On donne $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H\,m^{-1}}$.

1. Déterminer l'expression de la norme du champ magnétique.
2. Calculer la valeur de M à partir de celle de B_0.
3. Calculer l'intensité du champ magnétique en un point A du plan équatorial situé à la distance $r_A = 6R_T$ du point O.
4. Déterminer l'expression de $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B}$ en un point quelconque.
5. Déterminer l'expression de $div\ \overrightarrow{B}$ en un point quelconque.
6. Déterminer l'expression du flux de $\overrightarrow{B}$ à travers la sphère de rayon R_T. Interpréter géométriquement le résultat trouvé.