CHAPITRE 8

Propagation du champ électromagnétique dans le vide illimité

Objectifs :

- Établir l'équation de propagation des ondes EM dans le vide illimité.
- Connaitre la solution en ondes planes de l'équation de d'Alembert.
- Savoir utiliser la notation complexe.

Nous allons établir dans ce chapitre les équations **de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide illimité**. Nous étudierons plus particulièrement la solution en **onde plane** de cette équation.

Notons que le fait de considérer la propagation dans **le vide illimité nous soustrait de l'obligation de tenir compte des conditions aux limites**.

La video suivante montre le principe de l'expérience de Hertz qui a mis en évidence la propagation des ondes électromagnétique :

`https://www.youtube.com/watch?v=qcRNG4KG6IA`.

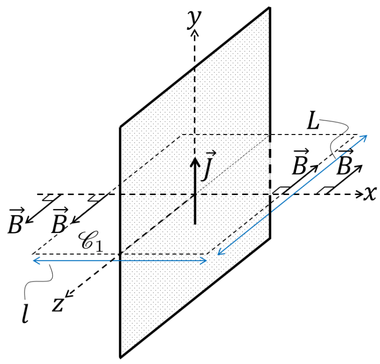

FIGURE 8.1: Champ magnétique produit par une nappe de courant infinie. Le contour $\mathscr{C}_1$ rectangulaire est indiqué en pointillés.

8.1 Génération et propagation du champ électromagnétique : une première approche

Considérons dans un premier temps une nappe de courant infinie orientée suivant l'axe Oy en régime permanent (figure 8.1). Le champ magnétique produit par cette nappe de courant est contenu dans les plans d'antysimétrie et perpendiculaire au plan de symétrie de la distribution de courant et son sens est donné par la règle de la main droite. Le champ $\vec{B}$ produit par la nappe de courant est donc dirigé suivant les z négatifs dans le domaine $x > 0$ et vers les z positifs vers les $x < 0$. Le théorème d'ampère utilisé le long du contour $\mathscr{C}_1$ donne $2LB = \mu_0 J_S L$. L'intensité du champ magnétique a donc pour expression $B = \frac{\mu_0 J_S}{2}$ où J_S est la densité de courant surfacique.

☞ On rappelle que le courant est donné par $I = \int J_S.dl$ dans le cas d'une densité de courant surfacique J_S.

Nous considérons maintenant que cette nappe de courant infini s'établit à $t = 0$. Le régime n'est plus permanent et l'équation à utiliser est maintenant l'équation intégrale de Maxwell-Ampère qui contient le terme supplémentaire du courant de déplacement. Cependant, nous pouvons réduire l'épaisseur l du contour $\mathscr{C}_1$ jusqu'à-à ce que le flux du courant de déplacement à travers la surface délimitée par le contour $\mathscr{C}_1$ soit négligeable devant le flux du vecteur densité surfacique de courant. Nous montrons ainsi que le champ créé au voisinage de la nappe de courant à $t = 0$ est identique au champ magnétique produit en régime permanent. En régime permanent, le champ magnétique a la valeur $\frac{\mu_0 J_S}{2}$ dans tout l'espace. Un champ magnétique orienté suivant les z négatifs se propage donc à une vitesse v suivant l'axe Ox dans le domaine $x > 0$ à partir du moment où le courant s'établit à $t = 0$.

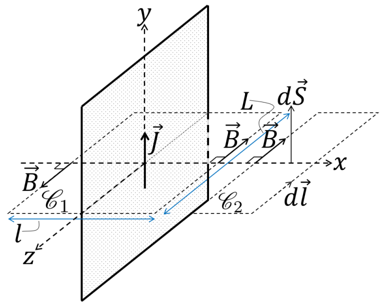

FIGURE 8.2: Champ magnétique produit par une nappe de courant infinie.

Le champ magnétique est inhomogène en $x = vt$, l'équation de Maxwell-Ampère montre alors qu'un champ électrique peut-être produit. Appliquons l'équation intégrale de Maxwell-Ampère au contour fixe $\mathscr{C}_2$ (figure 8.2) pour obtenir $\oint_{\mathscr{C}_2} \vec{B}.\mathrm{d}\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S}$. Le terme de gauche de l'égalité précédente a une valeur négative, ce qui montre que le champ électrique produit par la variation spatiale du champ magnétique en $x = vt$ est orienté suivant les y négatifs. Nous obtenons donc la situation de la figure 8.3 dans le domaine $x > 0$.

Remarquons que la circulation du champ magnétique devient nulle lorsque le champ magnétique à atteint la partie de droite du contour $\mathscr{C}_2$. Le champ électrique s'annule à ce moment précis et nous avons le résultat du régime permanent.

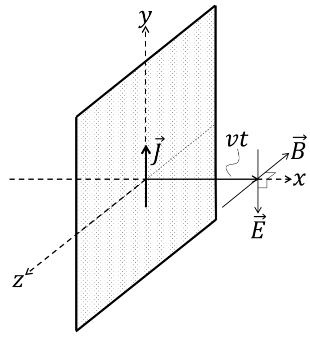

FIGURE 8.3: Orientation du champ magnétique et électrique se propageant à la vitesse v et produit par une nappe de courant infinie qui s'établit à $t = 0$.

Nous allons maintenant chercher l'expression de la vitesse de propagation du champ électromagnétique qui est produit par la nappe de courant.

Considérons dans un premier temps le contour $\mathscr{C}_2$ et la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère qui a pour expression $\oint_{\mathscr{C}_2} \vec{B}.\mathrm{d}\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S}$. Nous devons donc évaluer la quantité $\frac{d}{dt} \iint_S \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} = \frac{d\Phi_E}{dt}$ où Φ_E est le flux du champ électrique. Le champ électromagnétique se propage à la vitesse v, nous avons $\frac{\Phi_E(t+dt) - \Phi_E(t)}{dt} = \frac{\iint_{S(t+dt)} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} - \iint_{S(t)} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S}}{dt} = \frac{-EvdtL}{dt} = -EvL$. La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère appliqué au contour fixe $\mathscr{C}_2$ a donc pour expression $-BL = -\varepsilon_0 \mu_0 EvL$ soit $B = \varepsilon_0 \mu_0 Ev$.

Considérons maintenant le contour fixe $\mathscr{C}_3$ pour appliquer la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday qui a pour expression $\oint_{\mathscr{C}_3} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}.\mathrm{d}\vec{S}$. Nous devons donc évaluer la quantité $\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}.\mathrm{d}\vec{S} = \frac{d\Phi_B}{dt}$ où Φ_B est le flux du champ magnétique. Le champ électromagnétique se propage à la vitesse v, nous avons $\frac{\Phi_B(t+dt) - \Phi_B(t)}{dt} = \frac{\iint_{S(t+dt)} \vec{B}.\mathrm{d}\vec{S} - \iint_{S(t)} \vec{B}.\mathrm{d}\vec{S}}{dt} = \frac{-Bvdth}{dt} = -Bvh$. La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday appliqué au contour fixe $\mathscr{C}_3$ a donc pour expression $Eh = Bvh$ soit $E = Bv$.

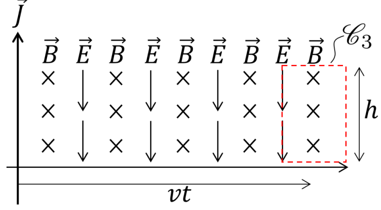

FIGURE 8.4: Orientation du champ magnétique et électrique se propageant à la vitesse v et produit par une nappe de courant infinie qui s'établit à $t = 0$.

La combinaison des deux expressions précédentes donne $B = \varepsilon_0 \mu_0 v^2 B$ soit $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$. Nous pouvons donc identifier le facteur $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ dans les équations de propagation du champ électromagnétique à la célérité de l'onde électromagnétique dans le vide.

8.2 Équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

Nous allons maintenant montrer que les équations de Maxwell contiennent l'équation de propagation du champ électromagnétique dans le vide. Il faut savoir refaire cette démonstration. Dans le vide, en l'absence de charges et de courant, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\boxed{\begin{array}{ll} div\ \vec{E} = 0 & div\ \vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}} \tag{8.1}$$

Nous prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday pour obtenir :

$$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial(\overrightarrow{rot}\ \vec{B})}{\partial t}$$

En utilisant l'équation $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} div\ \vec{A} - \Delta\vec{A}$ et l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide, nous obtenons :

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \tag{8.2}$$

De la même manière, en partant de l'équation de Maxwell-Ampère, nous obtenons :

$$\boxed{\Delta\vec{B} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}} \tag{8.3}$$

Les deux équations précédentes sont **les équations de propagation du champ électromagnétiques dans le vide**. Ces équations sont des équations vectorielles, chaque composante du champ électrique et du champ magnétique est solution d'une équation dite de **d'Alembert**.

8.3 Équation de d'Alembert

Une équation de d'Alembert est une équation de la forme :

$$\Delta F - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

☞ L'équation de d'Alembert est une équation aux dérivées partielles linéaire comme l'équation de diffusion ou l'équation de Schrodinger.

Une telle équation a de très nombreuses solutions. Nous allons étudier plus en détail la solution la plus simple : l'onde plane progressive harmonique. Nous avons introduit quatre mots de vocabulaire que nous devons définir avant de poursuivre.

- **Onde :** Une onde est une perturbation se propageant de proche en proche dans un milieu matériel ou dans le vide. Par exemple, une vague est une onde. Notons que le terme perturbation ne sous-entend pas que la perturbation soit périodique, nous pouvons par exemple avoir des ondes de choc.
- **Plane :** Une onde est dite plane si à chaque instant la fonction F qui décrit l'onde à la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à une direction $\hat{n}$ fixe.
- **Progressive :** Une onde progressive est une onde qui "progresse" en s'éloignant de la perturbation qui les a créées. Nous verrons qu'il existe une autre type d'onde, les ondes stationnaires. Les ondes progressives électromagnétiques transportent de l'énergie, de l'impulsion et du moment cinétique.

- **Harmonique :** Une onde harmonique est une onde dont l'oscillation dans le temps est décrite par une fonction sinusoïdale.

Il faut bien voir qu'une onde plane est **irréaliste** puisqu'une onde est forcément limitée spatialement. Il faut également noter qu'une onde purement monochromatique est également irréaliste puisqu'une onde est nécessairement limitée dans le temps. Néanmoins, une onde plane harmonique est mathématiquement simple à manipuler et le fait que l'équation de d'Alembert soit linéaire nous permettra de représenter une onde quelconque comme une somme d'ondes planes. La somme portant à la fois sur la direction de propagation et sur les fréquences.

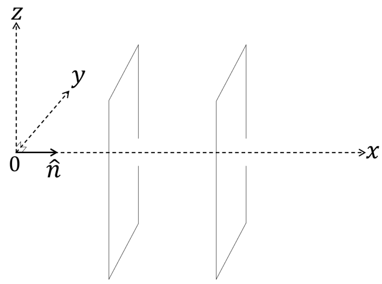

FIGURE 8.5: Plan d'onde d'une onde plane.

8.3.1 Solution en ondes planes progressives

Nous allons commencer par établir la solution en onde plane de l'équation de d'Alembert. **Une onde est dite plane si à chaque instant la fonction F à la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à une direction $\hat{n}$ fixe**. Nous prendrons dans un premier temps cette direction fixe suivant l'axe $0x$ (figure 8.5). Une onde plane est donc représentée dans ce cas par une fonction $F(x,t)$ qui est solution de l'équation :

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0} \tag{8.4}$$

Établissement du caractère progressif

Nous allons montrer que l'équation 8.4 admet pour solution une fonction de la forme générale $F(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ où c est une constante.

Afin de trouver la forme générale des solutions, remarquons que l'équation 8.4 peut se réécrire :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right) F = 0 \tag{8.5}$$

Nous faisons ensuite le changement de variables $u = x - vt$ et $w = x + vt$ où v est une constante et nous cherchons l'expression de l'équation précédente en fonction des variables u et w. Nous devons donc trouver l'expression des dérivées partielles dans le nouveau jeu de variables. Nous avons, pour une fonction quelconque :

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial w}dw \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(dx - vdt) + \frac{\partial f}{\partial w}(dx + vdt) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial u}\right)vdt \end{aligned}$$

La différence df de valeur d'une fonction f est la même dans le jeu de variables (x,t) où (u,w). Autrement dit, nous pouvons identifier l'expression précédente à $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt$ pour obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial w} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = v\left(\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial u}\right)$$

L'équation 8.5 se réécrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right) = 0$$

☞ Nous pouvons vérifier directement que la solution de la forme $F(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ est bien solution de l'équation 8.4. Nous notons $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''$. Nous avons $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial(-vt)}\frac{\partial(-vt)}{\partial t} = -vf'$ d'où $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = v^2 f''$. Nous avons donc bien $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$. Un calcul identique montre que la fonction $g(x + vt)$ est solution de l'équation de d'Alembert.

Une première intégration conduit à :

$$\frac{\partial F}{\partial w} = g_1(w)$$

et une deuxième intégration conduit à :

$$F = \int g_1(w)\mathrm{d}w + f(u)$$

d'où :

$$F = g(w) + f(u) = g(x+vt) + f(x-vt)$$

La solution en onde plane la plus générale de l'équation de d'Almenbert 8.4 a donc pour expression :

$$\boxed{F(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)} \tag{8.6}$$

où f et g sont deux fonctions quelconques.

Interprétation des solutions

Nous avons trouvé précédemment que la solution à l'équation de d'Alembert est la somme de deux fonctions $f(x-vt)+g(x+vt)$. Nous allons interpréter chacun de ces deux termes.

Considérons dans un premier temps une fonction $f(x,t)$ dont le graphe à un t donné est le profil noir sur la figure 8.6. Considérons une valeur donnée de la fonction $f(x,t)$. A $t+dt$, la fonction f nous renvoie la même valeur si nous prenons $x+dx$ en entrée. C'est-à-dire que la propagation d'une valeur de la fonction se traduit par $f(x,t) = f(x+dx, t+dt)$. Nous appliquons ce résultat à la fonction $f(x-vt)$ pour obtenir $f(x-vt) = f(x-vt+dx-vdt)$ ce qui implique $dx - vdt = 0$ soit $\frac{dx}{dt} = v$. La grandeur v représente donc la vitesse de propagation de l'onde qui **se déplace vers la droite suivant l'axe Ox**. La vitesse de propagation qui apparait dans l'équation de d'Alembert est appelée en général célérité d'une onde. Cela correspond à **la vitesse de propagation d'une solution de l'équation de d'Alembert. Nous pourrions donc appeler cette vitesse la vitesse de propagation de l'argument de la fonction $f(x-vt)$ puisque nous suivons des yeux un point d'argument constant pour déterminer la vitesse de l'onde dans ce cas**.

Nous pouvons faire le même raisonnement pour montrer que $f(x+vt)$ **représente une quantité qui se propage suivant les x négatifs à la vitesse v**.

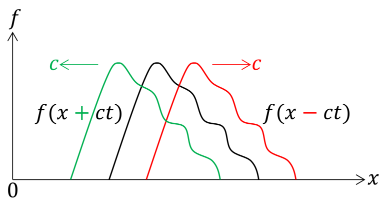

FIGURE 8.6: Propagation d'une onde suivant les x croissants et les x décroissants.

8.3.2 Cas particulier de l'onde plane progressive harmonique

Dans le cas particulier de **l'onde plane progressive harmonique**, les fonctions $f(x,t)$ et $g(x,t)$ sont des fonctions sinusoïdales. Nous pouvons dans ce cas définir la **période T** et la **longueur d'onde λ** de l'onde.

Pour un observateur fixe en un point, la **période** représente le temps à attendre pour que l'onde retrouve la même amplitude (figure 8.7). La **fréquence $f = \frac{1}{T}$** représente le nombre de "passage" de l'onde par seconde pour cet observateur. **La fréquence et la période sont des grandeurs intrinsèques à l'onde**.

Une onde progressive périodique dans le temps a également une périodicité spatiale qui nous permet de définir la longueur d'onde. Pour visualiser le concept de longueur d'onde, il faut imaginer un observateur prendre une

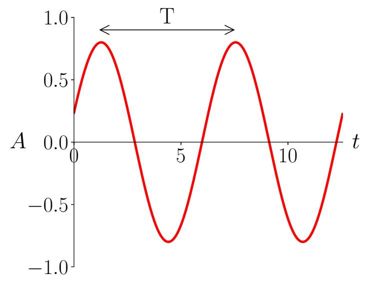

FIGURE 8.7: Période d'une onde harmonique.

☞ Soit t le temps d'observation de l'observateur. Le nombre de passage de l'onde pendant la durée t a pour expression $N = \frac{t}{T} = ft$ où T est la période de l'onde. Le nombre $f = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}$ représente donc le nombre de passage de l'onde par seconde.

photo en hélicoptère d'un train de houle (des vagues), la distance qui sépare deux crêtes est alors la longueur d'onde de la houle (figure 8.8).

La **longueur d'onde λ**, qui représente la distance séparant deux points de même amplitude, est liée à la période par l'intermédiaire de la vitesse de l'onde :

$$\boxed{\lambda = vT} \tag{8.7}$$

La longueur d'onde représente la distance parcourue par une onde sinusoïdale pendant la durée d'une période. La vitesse v de l'onde dépend **du milieu traversé et de la période (ou de la fréquence) de l'onde**. Contrairement à la fréquence, la longueur d'onde n'est donc pas une quantité intrinsèque à l'onde.

FIGURE 8.8: Exemple de longueur d'onde d'une houle vue de satellite (source google map).

La relation 8.7 qui relie la longueur d'onde à la période (ou la fréquence) s'appelle **une relation de dispersion**. Cette relation nous dit quelle est la valeur de la longueur d'onde pour chaque valeur de la fréquence. Cette relation est appelée relation de dispersion car le changement de la longueur d'onde d'une onde se propageant est à l'origine de sa réfraction dans un milieu ou de sa dispersion. En plus de dépendre de la fréquence, nous verrons que la vitesse d'une onde électromagnétique dans un milieu dépend du type de milieu traversé.

Une **onde plane progressive harmonique** qui se propage suivant les x croissants à la vitesse v a pour expression :

$$f(x - vt) = A\cos[k(x - vt) + \varphi]$$

Le saviez-vous ? La fréquence d'une onde mesurée par un observateur en mouvement par rapport à la source est différente de la fréquence mesurée par un observateur fixe par rapport à la source. C'est l'effet Doppler. La fréquence apparente de l'onde mesurée par un observateur qui se dirige vers la source est plus élevée que celle mesurée par un observateur fixe.

où k et φ sont des constantes. k est le **nombre d'onde angulaire $k = \frac{2\pi}{\lambda}$** puisque après une variation de 2π de l'argument d'une fonction sinusoïdale que cette fonction reprend la même valeur. L'argument du cosinus est la phase de l'onde, φ représente donc la phase à l'origine de l'onde. En utilisant la relation $f = \frac{v}{\lambda}$ nous obtenons la forme :

$$\boxed{f(x, t) = A\cos[kx - \omega t + \varphi]} \tag{8.8}$$

où ω est la **fréquence angulaire $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$**.

Ainsi, nous appelons **la vitesse $v = \lambda f = \frac{\omega}{k}$ la vitesse de phase de l'onde** que nous noterons dorénavant v_φ. Nous pouvons donc retenir la définition suivante :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k}} \tag{8.9}$$

La figure 8.9 montre les graphes des fonctions $A\cos(kx)$ et $A\cos(k(x - vt))$. La valeur de l'onde à $x = 0$ se retrouve en $x = vt$. L'onde s'est donc propagée suivant **les x croissants à la vitesse v**. Ainsi, la présence d'un signe "-" dans l'argument du cosinus traduit la propagation d'une onde vers les x croissants. La fonction $A\cos(k(x + vt))$ représente donc une onde qui se propage vers les x décroissants à la vitesse v.

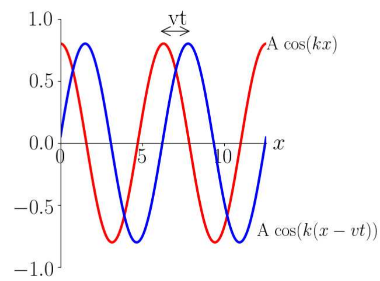

FIGURE 8.9: Propagation d'une onde plane sinusoïdale à la vitesse v suivant les x croissants.

Nous avons considéré précédemment une onde plane qui se propage suivant l'axe Ox, c'est-à-dire que nous avons choisi $\hat{n} = \hat{u}_x$. Pour généraliser, nous pouvons remarquer que $x = \vec{r}.\hat{u}_x = \vec{r}.\hat{n}$. Nous obtenons donc la forme suivante d'une onde plane se propageant dans la direction $\hat{n}$:

$$\boxed{f(x, t) = A\cos[\vec{k}.\vec{r} - \omega t + \varphi]} \tag{8.10}$$

où $\vec{k} = k\hat{n}$ est le vecteur d'onde qui définit la direction de propagation.

8.4 Les ondes planes progressives harmoniques électromagnétiques (OPPHEM)

8.4.1 Pourquoi étudier les OPPHEM

Nous avons mentionné précédemment qu'une onde plane harmonique est une onde irréaliste. Nous pourrions donc nous demander pourquoi étudier une telle onde.

L'OPPHEM est la forme d'onde la plus simple que nous pouvons mathématiquement écrire, nous allons donc trouver plus facilement des résultats avec une telle forme d'onde. Ainsi, si nous trouvons qu'une **OPPHEM ne se propage pas dans un milieu donné, nous en déduirons que les ondes électromagnétiques ne se propagent pas dans ce milieu** de manière générale.

Pour que ce raisonnement soit correct, il faut s'assurer que les résultats ne sont pas modifiés si nous changeons de forme d'onde. Il se trouve que nous pouvons décrire mathématiquement une onde plus complexe à l'aide d'OPPHEM. La linéarité des équations de Maxwell nous assure alors que les résultats trouvés pour une OPPHEM sont valides pour une onde plus complexe.

Plus précisément, nous pouvons reconstituer une onde plane progressive non harmonique qui se propage suivant la direction Ox par exemple en additionnant des OPPH de fréquences différentes qui se propagent toutes suivant Ox.

Nous pouvons reconstituer une onde qui n'est pas plane en additionnant des ondes planes qui se propagent dans des directions différentes.

8.4.2 Célérité des ondes électromagnétiques dans le vide

Nous avons établi précédemment que les composantes du champ électromagnétique dans le vide sont solutions d'une équation de d'Alembert. Nous pouvons donc identifier le facteur $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ dans les équations de propagation du champ électromagnétique à la célérité de l'onde électromagnétique dans le vide. La lumière se propage donc dans le vide à la vitesse v tel que :

$$\epsilon_0\mu_0 v^2 = 1$$

Numériquement, nous trouvons $v \simeq 2.997\,924\,58 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, ce qui correspond à **la vitesse de la lumière dans le vide**. Nous pouvons ainsi considérer que la lumière est une onde électromagnétique. Nous notons c la vitesse de la lumière. Nous pouvons donc retenir la relation :

$$\boxed{\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1} \tag{8.11}$$

☞ La vitesse de la lumière dans le vide est considérée comme une constante fondamentale et vaut précisément $2.997\,924\,58 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. La perméabilité du vide μ_0 est également considérée comme une constante fondamentale et vaut $4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H\,m^{-1}}$. Nous pouvons en déduire la valeur de la permittivité du vide $\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 c^2}} = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$

8.4.3 Structure de l'onde

Le choix d'une onde plane impose que l'amplitude de l'onde est constante dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde mais cela ne dit rien sur l'orientation des vecteurs champ électrique et magnétique. Cette information va nous permettre de caractériser la structure de l'onde plane.

Nous choisissons une onde qui se propage suivant l'axe Ox vers les x croissants. Le champ électrique et le champ magnétique ont la forme générale :

$$\vec{E} = E_x(x,t)\widehat{u}_x + E_y(x,t)\widehat{u}_y + E_z(x,t)\widehat{u}_z$$

$$\vec{B} = B_x(x,t)\hat{u}_x + B_y(x,t)\hat{u}_y + B_z(x,t)\hat{u}_z$$

Ondes transversales

L'équation de Maxwell-Gauss dans le vide s'écrit $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ ce qui implique que la composante E_x est indépendante de x. Par ailleurs, l'équation de Maxwell-Ampère dans le vide s'écrit $\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$ ce qui implique $E_x = cst$. Nous étudions ici le champ électromagnétique qui se propage dans le vide sans champ électrostatique, nous choisissons donc $E_x = 0$.

☞ Le calcul de $\overrightarrow{rot}\,\vec{B}$ en cartésien montre que $(\overrightarrow{rot}\,\vec{B})_x = \partial_y B_z - \partial_z B_y = 0$.

De même, l'équation de Maxwell-Gauss pour le champ magnétique ainsi que l'équation de Maxwell-Faraday montre que $B_x = 0$. Ainsi, **les OPPHEM sont des ondes transversales**.

Champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en phase

Les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont donc des vecteurs perpendiculaires à la direction de propagation. Nous prenons :

$$\vec{E} = E\hat{u}_y = A\cos(kx - \omega t)\hat{u}_y \tag{8.12}$$

On dit que l'onde est **polarisée linéairement suivant $\hat{u}_y$**. On injecte cette forme du champ électrique dans l'équation de Maxwell-Faraday pour obtenir $\vec{B} = \frac{k}{\omega}A\cos(kx - \omega t)\hat{u}_z + \overrightarrow{cst}$. Étant donné que nous nous intéressons à la structure de l'onde, nous considérons l'absence d'un champ magnétostatique. Nous considérons donc que la constante est nulle et nous obtenons :

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega}A\cos(kx - \omega t)\hat{u}_z \tag{8.13}$$

Exemple

Soit $\vec{E} = A\cos(kx - \omega t)\hat{u}_y$, nous avons $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -Ak\sin(kx - \omega t)\hat{u}_z$ soit $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = Ak\sin(kx - \omega t)\hat{u}_z$ d'où $\vec{B} = \frac{k}{\omega}A\cos(kx - \omega t)\hat{u}_z + \overrightarrow{cst}$. Nous choisissons une valeur nulle pour la constante.

Nous avons donc $\vec{E}$ et $\vec{B}$ orthogonaux et en phase pour une OPPHEM.

Les équations 8.12 et 8.13 montrent que l'orientation du champ $\vec{B}$ est reliée à l'orientation du champ $\vec{E}$ par la relation $\vec{B} = \frac{k}{\omega}\hat{u}_x \wedge \vec{E}$ où $\hat{u}_x$ est la direction de propagation de l'onde EM. Nous pouvons généraliser cette relation à une propagation dans une direction quelconque en introduisant le vecteur $\vec{k} = k\hat{u}_x$ pour obtenir :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}} \tag{8.14}$$

8.4.4 Relation de dispersion

Pour obtenir la relation de dispersion d'une OPPHEM, nous injectons l'expression du champ électrique d'une OPPHEM $\vec{E} = \vec{E}_0\cos(kx - \omega t)$ dans l'équation de propagation du champ électrique. Nous obtenons ainsi $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ d'où :

$$\boxed{k = \pm\frac{\omega}{c}} \tag{8.15}$$

où le signe de la composante de k indique si l'onde se propage dans le sens des x croissants ou décroissants.

8.4.5 Relation de structure

Notons que l'amplitude $\vec{B}$ est relié à l'amplitude de $\vec{E}$ par $|\vec{B}| = \frac{1}{c}|\vec{E}|$. Nous pouvons donc écrire $\vec{B} = \frac{1}{c}\widehat{u}_x \wedge \vec{E}$ et généraliser cette relation à une direction quelconque :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c}\widehat{n} \wedge \vec{E}} \tag{8.16}$$

La figure 8.10 montre la structure d'une OPPHEM dans le vide. Les champ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux entre eux et à la direction de propagation donnée par le vecteur $\vec{k}$.

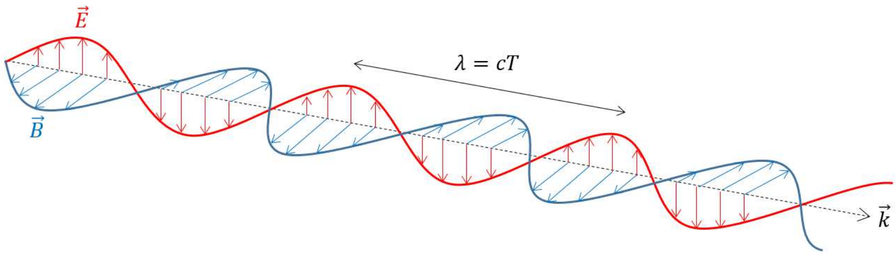

FIGURE 8.10 – Structure d'une OPPHEM dans le vide illimité.

8.5 Quels résultats restent valides dans le cas d'une onde plane non harmonique ?

La relation de structure est indépendante de la fréquence de l'onde. Nous allons donc pouvoir conserver la relation de structure de l'onde pour une onde plane progressive non harmonique.

De manière générale, une onde plane progressive non harmonique peut se décrire mathématiquement comme une somme d'onde plane progressive harmonique. Si la relation de structure est valide pour chaque onde de la somme alors la relation de structure est valide pour l'onde totale.

8.6 Quels résultats restent valides dans le cas d'une onde non plane ?

Considérons par exemple le cas de l'onde $\vec{E} = E_0 \cos(\frac{\pi y}{2l}) \cos(kx - \omega t)\widehat{u}_z$, la relation de Maxwell-Faraday donne :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} -E_0 \frac{\pi}{2l\omega} \sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right) \sin(kx - \omega t) \\ -E_0 \frac{k}{\omega} \cos\left(\frac{\pi y}{2l}\right) \cos(kx - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

La relation de structure 8.14 n'est donc pas respectée pour cette onde non plane. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont toujours orthogonaux mais le champ $\vec{B}$ n'est pas orthogonal à $\vec{k}$.

L'expression de la relation de dispersion de cette onde est obtenue en injectant l'expression du champ électrique dans son équation de propagation. Nous obtenons :

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \left(\frac{c\pi}{2l}\right)^2$$

Les relations de dispersions et de structures d'une onde plane ne sont donc pas respectées dans le cas général.

De manière générale, une onde non plane progressive harmonique peut se décrire mathématiquement comme une somme d'onde plane progressive harmonique. La somme portant sur la direction de propagation.

La relation de structure n'est donc pas valide sur l'onde globale puisque les directions de propagation de chaque onde plane de la somme est différente.

Par contre, nous verrons que nous pourrons obtenir des informations sur la propagation des ondes dans un milieu en étudiant les ondes planes. Autrement dit, si une onde plane se propage dans un milieu alors une onde réelle peut également s'y propager.

8.7 Représentation complexe

Bien que le champ électromagnétique soit un objet de $\mathbb{R}^3$, il est possible d'associer un champ électromagnétique complexe au champ électromagnétique. Cette notation complexe sera un outil très puissant pour déterminer les relations de dispersion des ondes électromagnétiques.

Nous allons ainsi réécrire les équations de Maxwell dans le cas où le champ électromagnétique est une onde plane.

Nous associons donc au champ électrique le champ électrique complexe d'expression :

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}} \tag{8.17}$$

avec $\underline{\vec{E}}_0 = \vec{E}_0 e^{i\varphi}$. Dans ce cas d'une onde plane, il est naturel d'utiliser un système de coordonnées cartésiennes de telle sorte que les opérateurs divergence et rotationnel peuvent s'écrire à l'aide de l'opérateur nabla.

L'opération de dérivation spatiale est alors une simple multiplication.

☞ Une onde plane de la forme $f = ae^{i(kx-\omega t)}$ est solution des équations aux dérivées partielles linéaires dispersives ou non dispersives.

Exemple

En représentation complexe, l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide $div\ \underline{\vec{E}} = 0$ devient $k_x\underline{E}_x + k_y\underline{E}_y + k_z\underline{E}_z = 0$ soit $\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0$.
l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{rot}\ \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$ devient en représentation complexe $i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -(-i\omega\underline{\vec{B}})$ soit $\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega\underline{\vec{B}}$.

Les équations de Maxwell se réécrivent dans ce cadre :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0 & \vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0 \\ \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega\underline{\vec{B}} & \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -\epsilon_0\mu_0\omega\underline{\vec{E}} \end{array}} \tag{8.18}$$

Les équations $\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0$ et $\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0$ montre que les OPPEHM sont des ondes transversales. L'équation $\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega\underline{\vec{B}}$ montre que $\vec{k}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment un trièdre direct. La relation $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ utilisée avec les équations de maxwell permet de retrouver la relation de dispersion d'une OPPEHM $k = \pm\frac{\omega}{c}$.