
Énergie électromagnétique

Objectifs :

- Calculer la puissance rayonnée par le champ électromagnétique à travers une surface.
- Calculer la densité d'énergie du champ électromagnétique.
- Calculer la vitesse de propagation de l'énergie.

Nous allons montrer dans ce chapitre que le champ électromagnétique contient de l'énergie. Nous parlons d'énergie électromagnétique. Ainsi, une onde électromagnétique progressive transporte de l'énergie électromagnétique.

9.1 Identité de Poynting

Voici le raisonnement que nous allons suivre. Nous considérons une surface S fixe qui délimite un volume V contenant des particules chargées. Nous cherchons ici à faire un bilan de **l'énergie U_{em} du champ électromagnétique** qui existe dans ce volume V . Ce bilan est de la forme :

**Variation temporelle de U_{em} dans V =
Flux d'énergie à travers S + Quelque chose**

Le quelque chose dans l'équation précédente est dû au fait que de l'énergie électromagnétique peut-être absorbée par la matière.

Nous avons déjà un fait un tel bilan dans la section sur la conservation de la charge et nous avons obtenu :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho d\tau = \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}_{ext}$$

Le signe négatif traduit le fait que la quantité de charge diminue au cours du temps lorsque le flux de charge à travers la surface est positif, c'est-à-dire que le vecteur densité de courant volumique est orienté vers l'extérieur.

Nous cherchons donc une équation de la forme :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V u_{em} d\tau = \oiint_S \vec{R} \cdot d\vec{S} + \text{terme d'absorption énergie}$$

où u_{em} est la densité volumique d'énergie électromagnétique et $\oiint_S \vec{R} \cdot d\vec{S}$ est le flux d'énergie électromagnétique à travers la surface S .

Un moyen simple de savoir comment partir avec les équations de Maxwell est de se souvenir de l'expression de l'énergie électrostatique $\epsilon_0 \frac{E^2}{2}$ et de l'énergie magnétostatique $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Ainsi, nous multiplions l'équation de Maxwell-Ampère par $\frac{\vec{E}}{\mu_0}$ et l'équation de Maxwell-Faraday par $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ pour obtenir :

$$\frac{\vec{E}}{\mu_0} \cdot \text{rot } \vec{B} = \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad (9.1)$$

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (9.2)$$

Nous soustrayons l'équation 9.2 à l'équation 9.1 pour obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B} - \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E})$$

En utilisant la relation $\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B}$, nous pouvons réécrire la relation précédente sous la forme :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \vec{J} \cdot \vec{E} + \text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) \quad (9.3)$$

Cette dernière équation est **l'identité de Poynting locale**. L'utilisation du théorème d'Ostrogradski nous permet d'obtenir la forme recherchée :

$$-\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau + \oiint_S \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S}_{ext} \quad (9.4)$$

Nous pouvons ordonner différemment les termes de l'équation précédente pour faire apparaître une équation de continuité avec un terme de perte :

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau + \oiint_S \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S}_{ext} = -\iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau \quad (9.5)$$

Cette dernière équation est **l'identité de Poynting sous forme intégrale**. La démonstration pour obtenir cette équation n'est pas exigée. Il faut néanmoins connaître le sens physique de chaque terme.

1. $\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ représente la densité volumique d'énergie du champ électromagnétique en J m^{-3} .

☞ Il faut bien voir que nous avons uniquement utilisé les équations de Maxwell pour obtenir cette équation. Les équations de Maxwell contiennent donc également le transport de l'énergie par une onde électromagnétique.

- $\iiint_V \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau$ représente l'énergie du champ électromagnétique en joule contenue dans le volume V .
- $\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau$ représente la variation temporelle de l'énergie du champ électromagnétique contenue dans le volume V . Dans le cas où le volume V est fixe, ce terme se réécrit $\frac{d}{dt} \iiint_V \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau$.
- Le signe négatif indique que le terme $\vec{J} \cdot \vec{E}$ est un terme de perte d'énergie électromagnétique contenue dans le champ électromagnétique si le vecteur \vec{J} est dans le sens du champ électrique \vec{E} . $\iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau$ représente l'énergie du champ électromagnétique transférée aux particules chargées dans le volume V du fait de l'interaction entre le champ électromagnétique et la matière. Le terme $-\iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau$ représente l'énergie cédée au particules. Si \vec{J} est dans le sens inverse de \vec{E} alors le terme $-\vec{j} \cdot \vec{E}$ représente la source du champ électromagnétique.
- $\iint_S \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S}_{ext}$ représente la quantité d'énergie électromagnétique qui passe par seconde à travers la surface S . Ce terme représente **la puissance en Js^{-1} rayonnée par le champ électromagnétique qui passe à travers la surface fermée S** . C'est le flux du vecteur $\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ à travers la surface S . Ainsi, nous allons retenir que la puissance rayonnée par le champ électromagnétique à travers une surface S a pour expression $P_{ray} = \iint_S \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S}_{ext}$.
- $\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$. Ce terme est nommé le vecteur de Poynting de symbole \vec{R} , c'est **la densité surfacique de puissance rayonnée par le champ électromagnétique en W m^{-2}** . La direction du vecteur \vec{R} pointe dans la direction du transfert d'énergie. La puissance rayonnée par le champ électromagnétique à travers une surface \vec{S} est donc l'intégrale surfacique de la composante du vecteur \vec{R} normale à cette surface.
- En optique, nous appelons **éclaircement** la densité surfacique de puissance rayonnée moyenne (en joules par seconde et par mètre carré).
- En régime permanent, l'identité de Poynting intégrale devient :

$$\iint_S \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S}_{ext} = -\iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau.$$

Il faut également noter que l'ordre de grandeur de la fréquence d'une onde électromagnétique dans le domaine visible est de l'ordre de 10^{15} Hz ce qui correspond à une période de l'ordre de 10^{-15} s. Un appareil de mesure n'est pas capable de détecter des fluctuations aussi rapides et nous calculerons donc en général **la valeur moyenne de la puissance rayonnée** qui a pour expression $\langle P_{ray} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P_{ray} dt$ où T est la période de l'onde.

9.2 Précaution d'emploi du vecteur de Poynting

Attention, le vecteur de Poynting n'a du sens que si les champs électrique et magnétique sont couplés simultanément par les équations de Faraday et d'Ampère. Dans l'exemple de la figure 9.1, un condensateur et un entrefer sont disposés afin de créer un configuration de champs électrostatiques et magnétostatiques croisés. Le calcul d'un vecteur de Poynting dans une telle situation n'a pas de sens car les champs sont croisés mais pas couplés par l'intermédiaire des équations de Maxwell.

Notons que le calcul du vecteur de Poynting en régime stationnaires a du sens si les champs électrique et magnétique sont couplés par l'intermédiaire du courant.

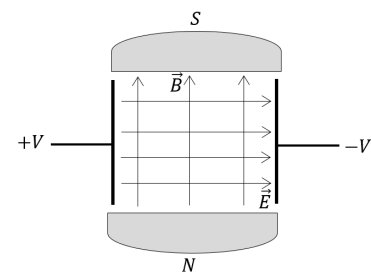


FIGURE 9.1: Une configuration possible de champ électrique et magnétique croisés.

☞ Attention, en physique le mot flux représente deux choses différentes. On parle de flux d'un champ de vecteurs pour désigner l'intégration sur une surface de la composante orthogonale à la surface d'un champ de vecteur. On parle également de flux au sens suivant. Le flux de particules désigne par exemple le nombre de particules par unité de temps et de surface. Ainsi, le vecteur \vec{R} a l'unité d'un flux d'énergie électromagnétique. Nous n'utiliserons pas ce vocabulaire étant donné l'ambiguïté du mot flux. Nous parlerons uniquement de flux d'un champ de vecteurs par la suite.

☞ Il faut donc retenir les deux résultats suivants :

- La densité d'énergie du champ électromagnétique a pour expression $u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$. Cette quantité s'exprime en J m^{-3} .
- La puissance rayonnée par unité de surface par le champ électromagnétique est donnée par le vecteur de Poynting qui a pour expression $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$. Cette quantité s'exprime en W m^{-2} .

9.3 Énergie cinétique des particules

Le volume V sur lequel nous avons fait un bilan d'énergie électromagnétique est un système fermé pour les particules qu'il contient. Nous pouvons donc faire un bilan d'énergie sur les particules contenues dans ce volume grâce **au théorème de l'énergie cinétique**. L'énergie cinétique des N particules dans le volume V a pour expression $E_c = \sum_{i=1}^N E_{c,i}$. La variation de l'énergie cinétique des particules entre t et $t + dt$ a pour expression

$$dE_c = E_c(t + dt) - E_c(t) = \sum_{i=1}^N E_{c,i}(\vec{r}_i + d\vec{r}_i) - E_{c,i}(\vec{r}_i).$$

La variation de l'énergie cinétique de chaque particule entre \vec{r}_i et $d\vec{r}_i$ et \vec{r}_i est donnée par le théorème de l'énergie cinétique :

$$E_{c,i}(\vec{r}_i + d\vec{r}_i) - E_{c,i}(\vec{r}_i) = \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r}_i$$

soit :

$$\frac{dE_{c,i}}{dt} = P_{ext} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}_i$$

où \vec{v}_i est la vitesse d'une particule.

Les particules chargées dans le volume V subissent la force de Lorentz $\vec{F}_{ext} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. La puissance de cette force vaut donc :

$$P_{ext} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

Notons au passage que seul le champ électrique travaille.

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i q\vec{E} \cdot \vec{v}_i = qN \langle \vec{v} \rangle \cdot \vec{E} = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau$$

Où nous avons introduit la la vitesse moyenne des particules $\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \vec{v}_i$.

Exemple

On considère un conducteur ohmique cylindrique d'axe Oz de section S et de longueur L baignant dans un champ électrique uniforme et stationnaire $\vec{E} = E_0 \hat{u}_z$ (figure 9.3). En pratique, un générateur électrique crée ce champ en imposant une différence de potentiel $U = V(A) - V(B)$ aux bornes du conducteur. En chaque point du conducteur, la loi d'Ohm locale $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ relie le champ électrique au vecteur densité de courant électrique \vec{J} . La longueur du conducteur L est grande devant son rayon R de telle sorte que \vec{J} est parallèle à l'axe du conducteur. La circulation du champ électrique est égale à la différence de potentiel aux bornes du conducteur soit :

$$\begin{aligned} V(A) - V(B) &= \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{1}{\sigma} \int \vec{J} \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{1}{\sigma} \int J dl \\ &= \frac{L}{\sigma S} I \end{aligned}$$

d'où $R_{el} = \frac{L}{\sigma S}$. La puissance transférée aux porteurs de charge a pour expression $\iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau = \iiint_V \frac{I^2}{\sigma S^2} d\tau = \frac{L}{\sigma S} I^2$ où nous avons utilisé le fait que $E_0 = \frac{I}{\sigma S}$.

☞ Le théorème de l'énergie cinétique appliquée à une particule qui déplace entre A et B s'écrit $E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{ext}(A \rightarrow B)$ avec $W_{ext}(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r}$. Le terme $\sum W_{ext}(A \rightarrow B)$ dans le théorème de l'énergie cinétique représente le travail des forces extérieures conservatives ou non conservatives.

☞ Rappelons que $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$ car $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est un vecteur perpendiculaire au plan contenant les vecteurs \vec{a} et \vec{b} . La quantité $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$ est nommée produit mixte de ces trois vecteurs. Géométriquement, la valeur du produit mixte correspond au volume engendré par les trois vecteurs. Ainsi, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$ car deux vecteurs engendrent un volume nul.

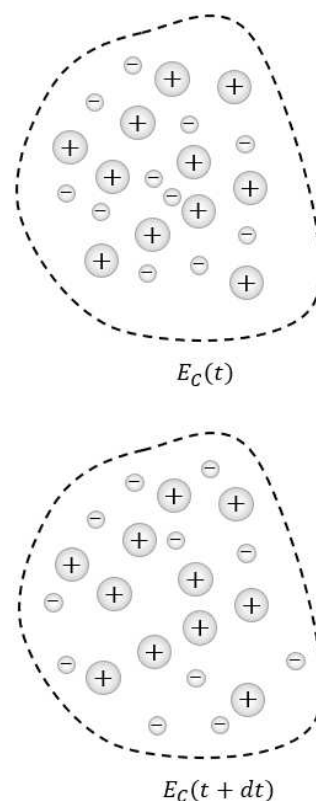


FIGURE 9.2: Variation temporelle de l'énergie cinétique totale des particules contenues dans le volume V . Cette variation d'énergie cinétique est due à la variation de l'énergie cinétique de chaque particule entre deux positions.

On peut réécrire cette puissance transférée aux charges $P = R_{el}I^2$. C'est la puissance dissipée par effet joule.

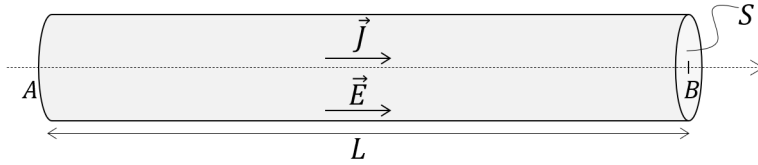


FIGURE 9.3 – Conducteur cylindrique de longueur L .

On va montrer que cette puissance dissipée par effet joule est l'opposée de la puissance rayonnée par le champ électromagnétique.

Il faut dans un premier temps déterminer l'expression des champs électriques et magnétiques pour déterminer la puissance rayonnée par le champ électromagnétique.

L'expression du champ électrique est $\vec{E} = E_0\hat{u}_z$. Loin des extrémités du conducteur, le champ magnétique produit est invariant par translation et rotation du conducteur et nous pouvons déterminer son expression grâce au théorème d'Ampère. Le champ magnétique dans le fil conducteur a pour expression $\vec{B} = \frac{\mu_0 Jr}{2}\hat{u}_\theta$. Le vecteur de Poynting a donc pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \\ &= -\frac{E_0 Jr}{2}\hat{u}_r \\ &= -\frac{\sigma E_0^2 r}{2}\hat{u}_r\end{aligned}$$

La puissance rayonnée à travers la surface du conducteur a donc pour expression :

$$\begin{aligned}P_{ray} &= \iint \vec{R} \cdot d\vec{S} \\ &= -\int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{\sigma E_0^2 R}{2} R d\theta dz \\ &= -\frac{L}{\sigma S} I^2 = -R_{el} I^2\end{aligned}$$

Nous avons donc bien $P_{ray} = -\iiint \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau$ en régime permanent.

9.4 Vitesse de propagation de l'énergie

9.4.1 Définition

Supposons que l'énergie électromagnétique se propage à la vitesse v . L'énergie électromagnétique transportée par une onde qui passe à travers une surface \vec{S} perpendiculaire à sa direction de propagation pendant dt est contenue dans un cylindre de base S et de longueur vdt (figure 9.4). Un tel volume contient l'énergie électromagnétique $\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) vdtS = u_{em}vdtS$. Cela signifie que l'énergie qui passe à travers S par unité de temps a pour expression $u_{em}vS$. Cette puissance transportée doit être égale au flux du vecteur de Poynting à travers S . Autrement dit, nous devons avoir :

$$u_{em}vS = \vec{R} \cdot \vec{S}$$

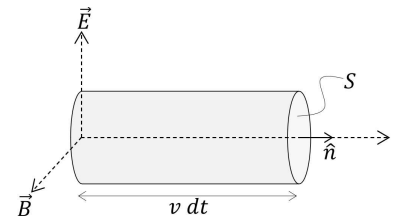


FIGURE 9.4: Notations utilisées pour déterminer la vitesse de propagation de l'énergie.

qui s'écrit également :

$$u_{em} \vec{v} S = \vec{R} S$$

Autrement dit, la vitesse de propagation de l'énergie a pour expression :

$$\vec{v} = \frac{\vec{R}}{u_{em}}$$

Les détecteurs ont en général accès uniquement aux moyennes temporelles étant données la fréquence élevée des ondes électromagnétiques. La vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique moyenne a donc pour expression :

$$\vec{v} = \frac{\langle \vec{R} \rangle}{\langle u_{em} \rangle} \quad (9.6)$$

9.4.2 Application aux OPPHEM

Nous avons montré précédemment que les champs électriques et magnétiques pour une onde plane sont reliés par $\vec{B} = \frac{\hat{n}}{c} \wedge \vec{E}$. Le vecteur de Poynting a donc pour expression :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge (\hat{n} \wedge \vec{E})}{c\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \hat{n} = \frac{cB^2}{\mu_0} \hat{n} = \epsilon_0 c E^2 \hat{n} \quad (9.7)$$

Ainsi, nous trouvons que **l'énergie électromagnétique d'une onde plane se propage dans sa direction de propagation**.

Supposons maintenant que l'énergie électromagnétique se propage à la vitesse v . L'énergie électromagnétique transportée par une onde plane qui passe à travers une surface \vec{S} perpendiculaire à sa direction de propagation pendant dt est contenue dans un cylindre de base S et de longueur $v dt$ (figure 9.4). Un tel volume contient l'énergie électromagnétique $(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}) v dt S$. Cela signifie que l'énergie qui passe à travers S par unité de temps a pour expression $(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}) v S$.

Cette puissance transportée doit être égale au flux du vecteur de Poynting à travers S . Autrement dit, nous devons avoir :

$$(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}) v S = \epsilon_0 c E^2 \hat{n} \cdot \vec{S}$$

soit $v = c$, en tenant compte de $B = \frac{E}{c}$. Autrement dit, **l'énergie électromagnétique transportée par une OPPHEM électromagnétique dans le vide se propage à la vitesse c de l'onde**.

Nous pouvons déterminer la puissance moyenne transportée par une OPPHEM.

Nous considérons une onde plane dont le champ électrique a pour expression $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \hat{u}_y$. Le vecteur de Poynting correspondant a pour expression :

$$\vec{R} = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \hat{u}_x$$

La puissance moyenne rayonnée a donc pour expression :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 \hat{u}_x = c \langle u_{em} \rangle \hat{u}_x$$

☞ Nous rappelons l'identité vectorielle $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$. Notons la présence de parenthèses pour le produit vectoriel car le produit vectoriel n'est pas associatif. Autrement dit, $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$.