

### Les postulats de l'électromagnétisme

#### Objectifs :

- citer les équations de Maxwell.
- citer l'équation de conservation de la charge.

#### 7.1 La conservation de la charge

La conservation de la charge est une observation expérimentale. Nous en faisons un postulat en disant que la charge d'un système isolé se conserve. C'est à dire que la somme algébrique des charges positives et négatives présentes à un instant quelconque reste toujours constante.

Le but de cette section est d'établir **l'équation de conservation de la charge** qui en découle.

##### 7.1.1 Équation locale de conservation de la charge

Nous allons maintenant établir **l'équation de conservation de la charge** qui en découle. Pour l'établir, nous considérons un volume de surface  $S$  et d'épaisseur  $dx$  dans un système de coordonnées cartésiennes. La figure 7.1 montre le principe du calcul. La partie hachurée en noir (figure 7.1-(a)) représente les charges comprises entre  $x$  et  $x + dx$  tandis que les parties hachurées en vert et rouge (figure 7.1-(b)) représentent les charges qui rentrent et sortent du volume compris entre  $x$  et  $x + dx$ .

La conservation de la charge s'écrit :

$$Sdx(\rho(t + dt, x) - \rho(t, x)) = S\rho(t, x)v_x(t, x)dt - S\rho(t, x + dx)v_x(t, x + dx)dt$$

L'équation précédente se réécrit :

$$\frac{\{\rho(t + dt, x) - \rho(t, x)\}}{dt} = - \frac{\rho(t, x + dx)v_x(t, x + dx) - \rho(t, x)v_x(t, x)}{dx}$$

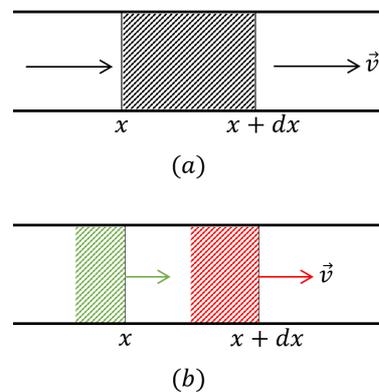


FIGURE 7.1: Conservation de la charge.

☞ La conservation de la charge s'écrit : **Variation temporelle du nombre de charges dans le volume = Nombre de charges qui rentrent dans le volume - Nombre de charges qui sortent du volume.**

Nous reconnaissons les définitions des dérivées partielles. Nous obtenons ainsi l'équation de conservation de la charge à une dimension :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} = 0$$

Nous généralisons immédiatement à trois dimensions pour obtenir :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

soit :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0} \quad (7.1)$$

avec  $\vec{J} = \rho \vec{v}$ . L'équation précédente est l'équation de **conservation de la charge** qui fait partie de la famille des **équations de continuité**.

Notons que pour une distribution de charges indépendante du temps, la conservation de la charge entraîne :

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = \text{div } \vec{J} = 0 \quad (7.2)$$

Cette équation est l'équation de conservation de la charge en **régime permanent ou stationnaire**.

### 7.1.2 Équation de conservation de la charge

L'équation 7.1 est une équation locale, nous pouvons intégrer l'équation précédente sur un volume  $V$  fixe pour obtenir la conservation de la charge contenue dans ce volume d'où :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \iiint_V \text{div}(\rho \vec{v}) d\tau = 0$$

Le théorème d'Ostrogradski nous permet d'écrire :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}_{ext} = 0$$

Puisque le volume  $V$  est fixe, nous pouvons sortir la dérivée par rapport au temps de l'intégration sur le volume pour obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho d\tau + \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}_{ext} = 0$$

Nous reconnaissons l'expression de la charge totale  $Q = \iiint_V \rho d\tau$  contenue dans le volume  $V$ . La conservation de la charge contenue dans le volume s'écrit donc :

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial t} + \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}_{ext} = 0} \quad (7.3)$$

La quantité  $\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$  représente la quantité de charges qui quitte par unité de temps le volume  $V$ .

#### Exemple

Une sphère de rayon variable  $R(t)$  (figure 7.2) contient une charge totale  $Q$  uniformément répartie dans son volume. La densité volumique

☞ Nous pouvons également utiliser un développement de Taylor à l'ordre 1 pour retrouver l'équation de conservation de la charge. Dans ce cas, il est d'usage d'utiliser la notation  $\delta x$  au lieu de  $dx$ .  $\delta x$  est une quantité petite qui permet de faire un développement de Taylor. Nous faisons tendre ensuite  $\delta x$  vers zéro.

☞ Attention, le régime permanent ou stationnaire ne veut pas dire statique. La vitesse des particules est non nulle mais en un point fixe de l'espace la densité volumique de charges ne dépend pas du temps.

☞ Notons que nous aurions pu écrire directement la dernière équation et utiliser le théorème d'Ostrogradski pour remonter à l'équation locale de conservation de la charge.

de charge  $\rho(t)$  a donc pour expression  $\rho(t) = \frac{3Q}{4\pi R(t)^3}$ . Le rayon  $R$  de la sphère varie ce qui provoque un mouvement des charges à l'intérieur de la sphère purement radial qui fait apparaître à l'intérieur de la sphère un vecteur densité de courant volumique  $\vec{j} = j(r, t)\hat{u}_r$ . L'équation locale de conservation de la charge nous permet d'obtenir  $j(r, t) = \frac{3Qr}{4\pi R^4} \frac{dR}{dt}$ . Le courant qui passe à travers une surface sphérique de rayon  $r$  a donc pour expression  $I = \frac{3Qr^3}{R^4} \frac{dR}{dt}$ .

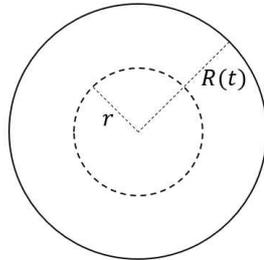


FIGURE 7.2 – Sphère pulsante de rayon  $R$  variable.

## 7.2 Les équations de Maxwell

Le champ électromagnétique  $(\vec{E}(M, t); \vec{B}(M, t))$  créé au point  $M$  et au temps  $t$  par une distribution volumique de charge  $\rho(M, t)$  et de courant  $\vec{J}(M, t)$  est donc solution des quatre équations locales de Maxwell :

$$\begin{aligned} (1) : \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & (2) : \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ (3) : \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (4) : \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.4)$$

L'équation (1) est l'équation de Maxwell-Gauss, l'équation (2) est l'équation de Maxwell-Gauss pour le champ magnétique, l'équation (3) est l'équation de Maxwell-Faraday et l'équation (4) est l'équation de Maxwell-Ampère. Les constantes  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$  et  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$  sont la permittivité diélectrique du vide et la perméabilité magnétique du vide.

Ces équations sont toujours valides, aussi bien dans le vide que dans les milieux. Nous verrons cependant qu'il existe des formes de ces équations plus adaptées à l'étude des ondes électromagnétiques dans certains milieux. Notons que ces équations sont **indépendantes du système de coordonnées** puisque les opérateurs utilisés ne dépendent pas du système de coordonnées. C'est une condition à respecter pour que les équations de Maxwell décrivent la nature.

Le champ électromagnétique agit sur une particule ponctuelle chargée située à l'instant  $t$  en un point  $M$  par l'intermédiaire de la **force de Lorentz** donnée par :

$$\vec{F} = q[\vec{E}(M, t) + \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)] \quad (7.5)$$

Nous pouvons faire quelques commentaires avant d'étudier en détail ces équations dans les autres chapitres :

1. Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère contiennent les **sources du champ électromagnétique**  $\rho$  et  $\vec{J}$ . Plus précisément,  $\rho$  est la source du champ électrostatique et un courant  $\vec{J}$  variable est la source du champ électromagnétique.

☞ Attention, les grandeurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont des champs de vecteur qui dépendent du vecteur position  $\vec{OM} = \vec{r}$  et du temps  $t$ . Pour une position  $\vec{r}$  donnée de l'espace et à un temps donné, la fonction vectorielle  $\vec{E}$  renvoie un vecteur correspondant au champ électrique au point  $\vec{r}$  considéré et au temps  $t$  considéré.

☞ La théorie de la relativité restreinte montre que le champ électrique et le champ magnétique sont deux facettes d'une même entité nommé champ électromagnétique.

La video <https://www.youtube.com/watch?v=qcRNG4KG6IA> montre l'émission d'une onde électromagnétique à partir d'une source de courant.

2.  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont couplés par les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday. Nous parlons donc de champ électromagnétique puisque les deux champs ne sont pas séparables en régime variable.
3. L'équation de Maxwell-Faraday décrit les phénomènes d'induction. Elle montre que la variation temporelle du champ magnétique produit un champ électrique.
4. Les équations de Maxwell sont linéaires.
5. Les équations de Maxwell contiennent l'équation de conservation de la charge. Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \operatorname{div} \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial(\operatorname{div} \vec{E})}{\partial t} \\ &= \mu_0 \operatorname{div} \vec{J} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \mu_0 \left( \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Or  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0$ , nous retrouvons donc bien l'équation 7.1 :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0$ . L'introduction du courant de déplacement est donc nécessaire pour que l'équation de conservation de la charge soit vérifiée.

6. Le théorème de Gauss est toujours valide, aussi bien en régime permanent que non permanent.
7. Le terme  $\epsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$  dans l'équation de Maxwell-Ampère a la dimension d'un courant électrique et est nommé courant de déplacement.
8. L'équation de Maxwell-Gauss stipule que le champ électrique diverge des charges positives et converge vers les charges négatives. L'équation  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  est valide en chaque point de l'espace et nous indique le comportement du champ électrique autour du point considéré. La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss a pour expression :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \tag{7.6}$$

Cette équation nous renseigne sur le comportement du champ électrique à travers une surface. Le figure 7.3 montre deux surfaces fermées. La forme intégrale nous indique que l'intégrale de la composante normale du champ électrique à travers la surface qui emprisonne les deux charges est nulle.

9. L'équation de Maxwell-Gauss pour le champ magnétique indique le champ magnétique ne converge pas ou ne diverge pas d'un point donné. Nous pouvons donc nous attendre à une rotation du champ magnétique autour d'un point. La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss pour le champ magnétique a pour expression :

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{7.7}$$

Cette équation nous renseigne sur le comportement du champ magnétique à travers une surface. Cette équation indique que quelque soit la surface fermée choisie, l'intégrale de la composante normale du champ magnétique à travers la surface est nul. Autrement dit, les lignes de

Le théorème de Schwartz assure que les dérivées partielles temporelles et spatiales commutent.

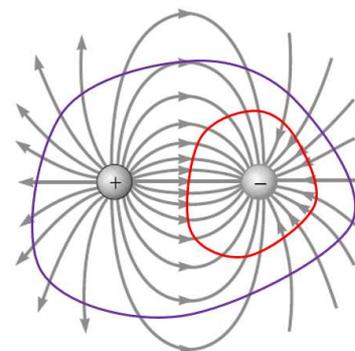


FIGURE 7.3: Lignes de champ du champ électrique produit par un dipôle électrique. Le flux du champ électrique à travers la surface violette est nul d'après la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss. Le flux du champ électrique à travers la surface rouge est nul d'après la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss.

champ magnétiques sont toujours fermées. Cela signifie qu'il n'existe pas de monopole magnétique<sup>1</sup>. La figure 7.4 montre ainsi une situation impossible. Un pôle Nord est toujours associé avec un pôle Sud. La figure 7.5 montre le champ magnétique créé par un dipôle magnétique. Les lignes de champ magnétique "émergent" du pôle Nord et se bouclent sur le pôle Sud. Les lignes de champ magnétique sont des lignes fermées, cela signifie que le champ magnétique existe dans l'aimant entre les pôles.

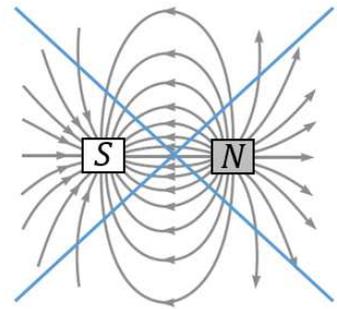


FIGURE 7.4: Situation impossible.

### 7.3 Le courant de déplacement

Nous allons montrer dans cette section que la version locale du théorème d'Ampère  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  est incomplète en régime variable. Nous allons étudier dans ce but le condensateur schématisé dans la figure 7.6 à l'aide de la version intégrale de l'équation (4) qui a pour expression  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$ . Appliquons l'équation précédente à la surface  $S_1$  de contour  $C_1$ , nous obtenons alors que la circulation du champ magnétique le long de  $C_1$  est égale au flux de  $\mu_0 \vec{j}$  à travers la surface  $S_1$ . Considérons maintenant la surface  $S_2$  qui s'appuie sur le même contour  $C_1$  mais qui passe entre les armatures du condensateur. Si nous appliquons la version intégrale du théorème d'Ampère à la surface  $S_2$ , nous obtenons alors que la circulation du champ magnétique le long du contour  $C_1$  est nul puisque le flux de  $\mu_0 \vec{j}$  à travers la surface  $S_2$  est nul étant donné que le courant est nul entre les armatures du condensateur.

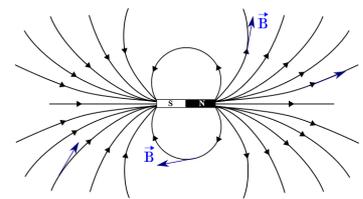


FIGURE 7.5: Ligne de champ du champ magnétique produit par un dipôle magnétique.

La contradiction entre ceux deux résultats montre qu'il manque une terme dans l'expression du théorème d'Ampère. Le courant entre les deux armatures est nul mais le champ électrique entre les deux armatures est non nul. Puisque le courant est nul en régime permanent, nous en déduisons que la circulation du champ magnétique le long de  $C_1$  doit également être reliée à la variation temporelle du flux du champ électrique présent entre les armatures.

Nous allons calculer l'expression du champ électrique dans le condensateur en négligeant les effets de bord, cela revient à calculer le champ électrique produit par un condensateur plan infini. Le champ électrique entre les armatures du condensateur a pour expression  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{S\epsilon_0}$  d'où  $\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{i}{S\epsilon_0}$  et  $\iint_{S_2} \frac{\partial E}{\partial t} dS = \frac{i}{\epsilon_0}$ . Par ailleurs, le théorème d'Ampère appliqué à la surface  $S_1$  montre que la circulation du champ magnétique à proximité du fil a pour expression  $\oint_{C_1} B dl = \mu_0 i$ . Nous en déduisons donc que  $\oint_{C_1} B dl = \mu_0 \epsilon_0 \iint_{S_2} \frac{\partial E}{\partial t} dS$ . Nous devons maintenant transformer cette relation en relation vectorielle, nous orientons le contour  $C_1$  comme indiqué sur la figure 7.6, la normale à la surface entre les deux armatures est donc orientée de la plaque de gauche vers la plaque de droite. Le terme  $\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}$  est positif si le courant électrique est orienté comme indiqué sur la figure 7.6. Cela signifie que la plaque de gauche se dépeuple progressivement en charge négative, le champ électrique entre les armatures est donc orienté de la plaque gauche vers la plaque droite et augmente au cours du temps. Autrement dit, le terme  $\iint_{S_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$  est positif d'où  $\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ . Le terme  $\epsilon_0 \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$  est donc homogène à un courant et est appelé **courant de déplacement**.

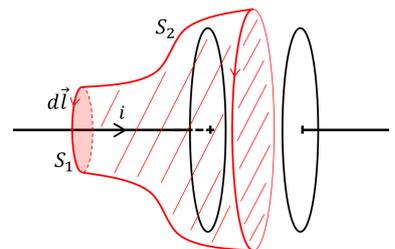


FIGURE 7.6: Condensateur alimenté en régime variable. Le courant est nul en régime permanent puisque le circuit est ouvert. Un courant passe dans les fils électriques uniquement lors des phases de charges et de décharges du condensateur.

L'équation de Maxwell-Ampère a donc pour expression dans le cas général  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$  qui s'écrit en version locale  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

1. A ce jour, aucune expériences n'a pu détecter de monopole magnétique.

## 7.4 La nature du champ électrique dans les équations de Maxwell

Regardons déjà ce que deviennent les équations de Maxwell en régime stationnaire, c'est-à-dire lorsque les champs ne dépendent pas du temps. Les équations de Maxwell se découpent en deux jeux d'équations :

$$\begin{array}{ll} (1) : \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (2) : \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ (3) : \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} & (4) : \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \quad (7.8)$$

Les quatre équations précédentes sont les équations de l'électrostatique et de la magnéto-statique.

Le champ électrique qui apparaît dans l'équation 1 et dans l'équation 3 est de même nature. Plus précisément, il n'y a qu'une seule source possible de champ électrique : les charges. Une ligne de champ électrique démarre d'une charge positive et se termine sur une particule négative. Il est important de remarquer que le rotationnel du champ électrique est nécessairement nul pour un champ électrostatique. Ainsi, si nous prenons une boucle quelconque dans l'espace, **la circulation du champ électrique le long de cette boucle est nécessairement nulle**. Si nous remplaçons cette boucle par un fil électrique, cela signifie que les électrons de conduction ne peuvent pas gagner d'énergie en faisant une boucle sur le fil. Ainsi, nous ne pouvons pas faire de générateur à partir d'un champ électrostatique.

Considérons maintenant les équations 7.4. Dans ce cas, nous voyons que le champ électrique contenu dans l'équation de Gauss est toujours produit par des charges et est de nature électrostatique tandis que le champ électrique qui apparaît dans l'équation de Faraday est à circulation non nulle. Autrement dit, le champ électrique qui apparaît dans l'équation de Faraday n'est pas de nature électrostatique. Bien que le symbole soit le même, le champ électrique contenu dans l'équation de Gauss et dans l'équation de Faraday est de nature différente.

Le champ électrique qui apparaît dans l'équation de Faraday est à circulation non nulle. Ainsi, si nous prenons une boucle quelconque dans l'espace, **la circulation du champ électrique le long de cette boucle est non nulle**. Si nous remplaçons cette boucle par un fil électrique, cela signifie que les électrons de conduction gagnent de l'énergie en parcourant la boucle. C'est ce principe qui est utilisé dans les générateurs électriques.