

---

# Les équations locales de la magnétostatique

---

### Objectifs :

- citer et appliquer la forme locale du théorème d'Ampère
- citer et appliquer la forme locale du théorème de Gauss magnétique

## 6.1 La forme locale du théorème d'Ampère

Nous avons étudié dans le chapitre précédent le théorème d'Ampère qui a pour expression :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Nous avons également rappelé dans le chapitre sur le courant électrique la relation entre le vecteur densité de courant volumique et le courant :

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

En injectant l'expression du courant dans le théorème d'Ampère, nous obtenons :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

où l'intégrale surfacique est faite sur la surface définie par le contour  $C$  qui enlace le courant. Le théorème de Stokes nous permet alors d'écrire le théorème d'Ampère sous la forme :

$$\iint \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

**L'égalité précédente devant être vraie quelque soit la surface délimitée par le contour**, nous devons avoir :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (6.1)$$

 Attention, tout comme le théorème d'Ampère, cette relation est valide uniquement pour des courants permanents.

qui est la forme locale du théorème d'Ampère.

**Exemple**

Considérons une sphère supraconductrice de centre  $O$  et de rayon  $R$  placée dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{u}_z$ . La sphère, siège de courants, crée à son tour un champ magnétique  $\vec{B}_{sph}$ . A l'intérieur d'une telle sphère supraconductrice, le champ magnétique total est nul (effet Meissner). Nous pouvons donc en déduire que  $\vec{j} = \vec{0}$  dans la sphère d'après la version locale du théorème d'Ampère. Les courants sont donc uniquement des courants surfaciques.

**Le saviez-vous ?** L'équation précédente égalise deux grandeurs définies en un point. C'est dans ce sens qu'il faut comprendre le terme d'équation locale. De manière générale, les équations avec les opérateurs  $\overrightarrow{rot}$  et  $div$  sont des équations locales.

## 6.2 Le théorème de Gauss pour le champ magnétique en forme locale

Les expériences montrent que le champ magnétique est à flux conservatif, c'est-à-dire que  $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S}_{ext} = 0$ . Le théorème d'Ostrogradski (nous permet d'écrire cette relation sous la forme :

$$\iiint (div \vec{B}) d\tau = 0$$

L'égalité précédente devant être vraie quelque soit le volume délimité par la surface, nous avons :

$$div \vec{B} = 0 \tag{6.2}$$

C'est la forme locale du théorème de Gauss magnétique.

**Exemple**

Soit le champ magnétique d'expression  $\vec{B} = ax^2 \hat{u}_x + byx \hat{u}_y + c \hat{u}_z$  où  $a, b$  et  $c$  sont des constantes. Le théorème de Gauss local pour le champ magnétique implique que  $b = -2a$ .

**Le saviez-vous ?** Cette relation reste valide même si le champ magnétique dépend du temps. Cette équation est l'une des 4 équations de Maxwell qui décrivent les phénomènes électromagnétiques.

## 6.3 Introduction du potentiel vecteur

L'équation locale  $div \vec{B} = 0$  montre que **le champ magnétique  $\vec{B}$  est un champ de rotationnel**. En effet, nous avons montré dans le chapitre sur l'analyse vectorielle que  $div \overrightarrow{rot} \vec{A} = 0$  quelque soit le champ de vecteurs  $\vec{A}$ . Le champ magnétique peut-on donc être déduit d'un autre champ de vecteurs que nous notons  $\vec{A}$  et nommons le **potentiel vecteur du champ magnétique**. Nous avons donc :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A} \tag{6.3}$$

A ce stade, l'introduction de ce champ de vecteurs  $\vec{A}$  peut sembler artificiel et ne pas avoir de sens physique, nous allons montrer dans le chapitre sur l'induction que ce champ de vecteur  $\vec{A}$  revêt une importance particulière. Nous verrons également dans le chapitre sur le dipôle magnétique que le potentiel vecteur permet de simplifier certains calculs.

**Le saviez-vous ?** La notion de potentiel vecteur reste valide même si le champ magnétique dépend du temps. En effet, l'équation  $div \vec{B} = 0$  est toujours vérifiée que le champ magnétique soit statique ou non. Ainsi, le champ de vecteurs  $\vec{A}$  est appelé plus généralement le potentiel vecteur du champ électromagnétique.

## 6.4 Relation de passage du champ magnétique

Nous allons nous intéresser dans cette section au comportement **du champ magnétique à l'interface entre deux milieux**. C'est-à-dire que nous cherchons à établir le lien entre le champ magnétique d'un côté d'une interface et le champ magnétique de l'autre côté de la même interface. Puisque le courant est à l'origine du champ magnétique, nous allons considérer des interfaces où un courant surfacique se propage.

### 6.4.1 Continuité de la composante normale

Nous considérons une interface parcourue par **une densité surfacique de courant** et nous appliquons le théorème de Gauss pour le champ magnétique en version intégrale à une surface cylindrique qui contient l'interface. Plus précisément, nous considérons un cylindre de hauteur  $h$  et de section  $S$  (figure 6.1).

Le théorème de Gauss magnétique s'écrit  $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}_{ext} = 0$  où  $S$  est la surface du cylindre. Il faut bien voir que nous nous intéressons au comportement du champ magnétique juste de part et d'autre de l'interface, nous faisons donc tendre  $h$  vers 0, ainsi seul la contribution du flux du champ magnétique aux extrémités du cylindre subsiste et nous obtenons :

$$B_{N2} - B_{N1} = 0 \quad (6.4)$$

où  $B_{N1}$  et  $B_{N2}$  sont les composantes normales à l'interface du champ magnétique. Autrement dit, **il y a continuité de la composante du champ magnétique normale à l'interface**.

### 6.4.2 Discontinuité de la composante tangentielle

Pour trouver la relation de passage de la composante tangentielle du champ magnétique, nous allons utiliser la version intégrale du théorème d'Ampère en utilisant le contour fixe de la figure 6.2.

La version intégrale du théorème d'Ampère appliquée au contour de la figure 6.2 s'écrit  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$  soit  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 j_{S\perp} l$  où  $j_{S\perp} = \vec{j}_S \cdot \hat{n}$  est la composante du courant surfacique perpendiculaire à la direction du champ magnétique tangentielle.

Il faut bien voir que nous nous intéressons au comportement du champ magnétique juste de part et d'autre de l'interface, nous faisons donc tendre  $h$  vers 0, ainsi la circulation du champ magnétique sur la partie "verticale" du contour tend vers zéro et l'équation précédente donne :

$$B_{T2} - B_{T1} = \mu_0 j_{S\perp} \quad (6.5)$$

Notons que **la discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique est due au champ magnétique produit par le courant surfacique**.

Nous pouvons voir que les deux équation précédentes se réécrivent :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \hat{n}_{12} \quad (6.6)$$

où  $\hat{n}_{12}$  est un vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2.

Cette dernière relation est **la relation de passage du champ magnétique d'un milieu 1 à un milieu 2**.

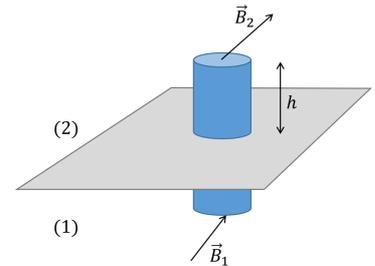


FIGURE 6.1: Volume utilisé pour déterminer la relation de passage de la composante normale du champ électrique.

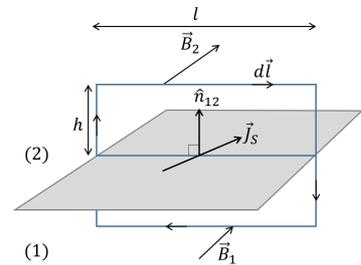


FIGURE 6.2: Contour utilisé pour déterminer la relation de passage de la composante tangentielle du champ magnétique.

**Exemple**

Soit le champ magnétique  $\vec{B}_1 = A\hat{u}_y + B\hat{u}_z$  du côté  $y < 0$  d'une interface contenue dans le plan  $Oxz$  parcourue par le courant  $\vec{j}_S = j_S\hat{u}_x$ . Le champ  $\vec{B}_2$  a pour expression  $\vec{B}_2 = A\hat{u}_y + (B - \mu_0 j_S)\hat{u}_z$ .