CHAPITRE 5

Le théorème d'Ampère

Objectifs :

- Déterminer l'expression du champ magnétique produit par des distributions de courant hautement symétriques à l'aide du théorème d'Ampère

5.1 Circulation du champ magnétique produit par un fil rectiligne infini

Nous avons vu en utilisant la loi de Biot et Savart que le champ magnétique produit par un fil rectiligne infini à une distance radiale r de l'axe a pour expression :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\widehat{u}_\theta$$

Pour établir le théorème d'Ampère, nous allons calculer la circulation Γ du champ magnétique produit par un fil rectiligne infini le long d'un contour fermé $\mathscr{C}$ c'est-à-dire $\oint_{\mathscr{C}} \vec{B}.\vec{dl}$ où $\vec{dl}$ représente le vecteur déplacement infinitésimal.

La géométrie du fil rectiligne nous incite à utiliser un système de coordonnées cylindriques pour repérer la position des points. Dans ce système de coordonnées, le vecteur déplacement infinitésimal a pour expression $\vec{dl} = dr\widehat{u}_r + rd\theta\widehat{u}_\theta + dz\widehat{u}_z$ et la circulation du champ magnétique le long d'un contour $\mathscr{C}$ a donc pour expression :

$$\Gamma = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta$$

Pour aller plus loin, nous devons distinguer deux cas de figure selon que le contour enlace ou pas le fil.

- **Dans le cas où le contour enlace le fil (figure 5.1), nous avons $\oint_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ et $\Gamma = \mu_0 I$.**
- **Dans le cas où le contour n'entoure pas le fil (figure 5.1), nous obtenons $\oint_0^{0} d\theta = 0$ et $\Gamma = 0$.**

☞ Voici comment se fait le calcul, il faut imaginer un opérateur se déplacer le long d'un chemin $\mathscr{C}$. A chaque pas, l'opérateur fait le produit scalaire entre le vecteur qu'il mesure et son vecteur déplacement le long de la courbe. Il fait la somme au fur et à mesure de son déplacement pour obtenir la circulation du champ de vecteur le long d'un chemin donné.

Dans le cas de N fils infinis, nous utilisons le principe de superposition pour obtenir $\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 NI$.

5.2 Le théorème d'Ampère

Il est possible de montrer que le résultat précédent reste vrai pour n'importe quel circuit. Nous obtenons ainsi le **théorème d'Ampère** qui s'écrit :

$$\boxed{\oint_{\mathscr{C}} \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \sum_k \epsilon_k I_k} \tag{5.1}$$

avec $\epsilon_k = +1$ si I_k est dans le sens de $\hat{n}$ **qui est la normale à la surface définie par le contour** $\mathscr{C}$ et $\epsilon_k = -1$ si I_k est dans le sens inverse de $\hat{n}$. La relation précédente se réécrit :

☞ Le sens de circulation le long du contour définit la normale à la surface ainsi délimitée par la règle de la main droite.

$$\boxed{\oint_{\mathscr{C}} \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \ I_{\text{enlacé}}} \tag{5.2}$$

où $I_{\text{enlacé}}$ est donnée par $I_{\text{enlacé}} = \iint \vec{j}.d\vec{S}$. Attention, le théorème d'Ampère permet de calculer le champ magnétique produit par des distributions de courants **fortement symétrique** car le calcul de $\oint_{\mathscr{C}} \vec{B}.d\vec{l}$ n'est pas faisable analytiquement dans les autres cas.

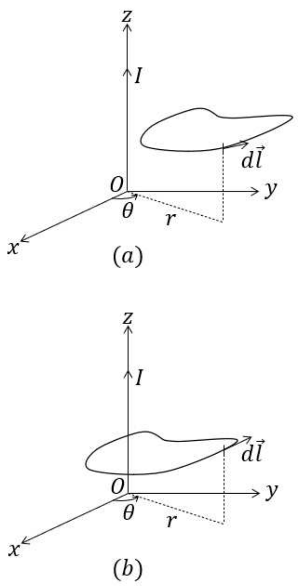

FIGURE 5.1: Circulation du champ magnétique produit par un fil infini le long d'un contour.

5.3 Comment utiliser le théorème d'Ampère ?

Nous cherchons à déterminer l'expression du champ magnétique à partir du théorème d'Ampère. La procédure à suivre est la suivante :

1. On fait un schéma de la situation et on place un point M quelconque. On prend le système de coordonnées (cartésiennes, cylindriques ou sphériques) adapté à la géométrie de la distribution de courant étudiée.
2. On détermine la direction du champ magnétique total grâce aux **symétries** au point M.
3. On élimine certaines variables dont peut dépendre le champ magnétique total grâce aux **invariances**.
4. On choisit un **contour** qui passe par le point M et qui doit respecter l'une des deux conditions suivantes :
   - $\vec{B}$ est tangent au contour ($\vec{B}.d\vec{l} = B\ dl$).
   - $\vec{B}$ est perpendiculaire au contour ($\vec{B}.d\vec{l} = 0$).
5. On applique le théorème d'Ampère en prenant garde à ne garder que le courant enlacé.
6. On exprime $\vec{B}$.

5.4 Le champ magnétique produit par un solénoïde infini

Nous allons dans cette section déterminer l'expression du champ magnétique produit par **un solénoïde infini.** Le résultat obtenu sera valide pour un solénoïde suffisamment long devant son rayon. La figure 5.2 montre le principe d'un solénoïde. Un solénoïde est un fil électrique enroulé régulièrement en spirales de façon à former une bobine longue.

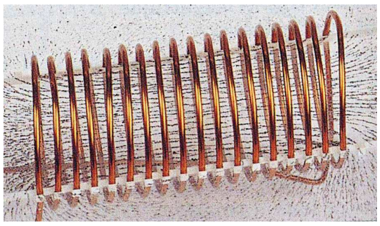

FIGURE 5.2: Principe d'un solénoïde et visualisation des lignes de champ magnétique à l'aide de limailles de fer.

La figure 5.3 montre un solénoïde utilisé en TP.

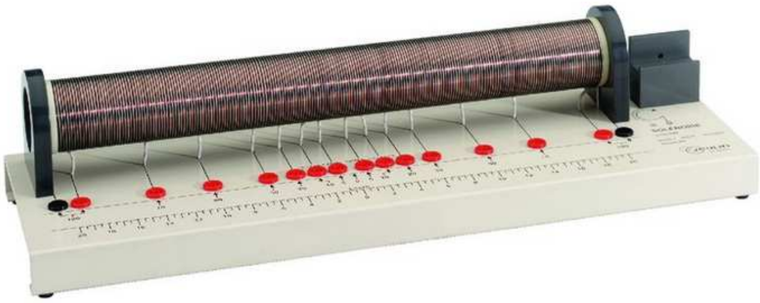

FIGURE 5.3 – Solénoïde utilisé en TP pour valider le résultat théorique. Le support à droite sert à positionner un capteur à effet Hall pour mesurer l'intensité du champ magnétique suivant un axe. Les différentes prises permettent de faire varier le nombre de spires de courant.

La figure 5.4 montre une coupe du solénoïde suivant son grand axe. Puisque le solénoïde est infini, n'importe-quel plan perpendiculaire à l'axe du solénoïde est un plan d'antisymétrie du solénoïde. Ainsi, la direction du champ magnétique est constante à l'extérieur du solénoïde. La règle de la main droite stipule que le champ magnétique est suivant l'axe $\hat{u}_z$.

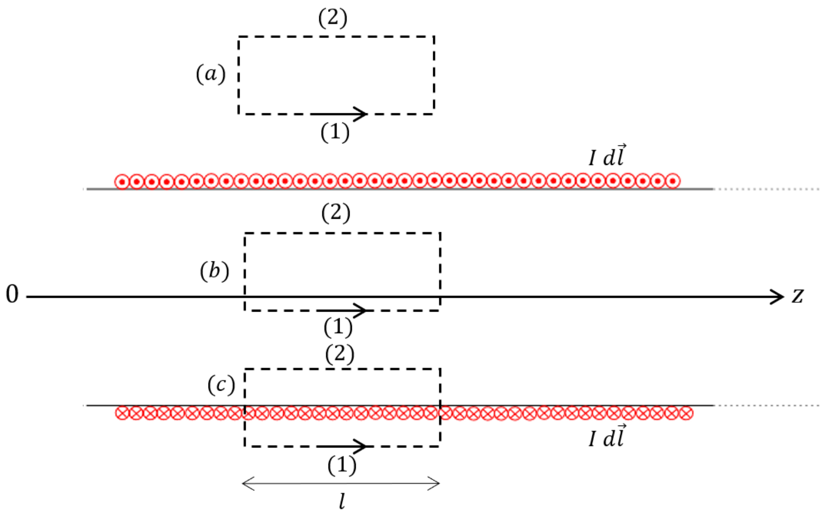

FIGURE 5.4 – Coupe d'un solénoïde. Les contours (a), (b) et (c) sont les contours cités dans le texte.

Ainsi, si nous appliquons le théorème d'Ampère au contour (a) de la figure 5.4 nous obtenons $\oint \vec{B}.\vec{dl} = 0$ puisque ce contour n'enlace aucun courant. Puisque le champ magnétique est orienté suivant l'axe Oz, nous obtenons donc $B_1 l - B_2 l = 0$ d'où $B_1 = B_2$. Nous obtenons donc le résultat suivant, le champ magnétique à l'extérieur d'un solénoïde infini est uniforme. Cependant, infiniment loin du solénoïde, le champ magnétique produit par celui-ci doit être nul, nous arrivons donc à la conclusion que le champ magnétique à l'extérieur d'un solénoïde infini est nul.

En appliquant le même raisonnement au contour (b) de la figure 5.4, nous obtenons que le champ magnétique est uniforme dans le solénoïde et orienté suivant $\hat{u}_z$.

Nous appliquons maintenant le théorème d'Ampère au contour (c). Le théorème s'écrit $\oint \vec{B}.\vec{dl} = -\mu_0 NI$ où N est le nombre de fils enlacés par le contour et où le signe - vient de l'orientation de la normale au contour par rapport au sens du courant. Puisque le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde et orienté suivant $\hat{u}_z$ à l'intérieur, nous obtenons $Bl = \mu_0 NI$. Nous introduisons n le nombre de tours de fil par mètre pour obtenir finalement l'expression :

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 n I \hat{u}_z} \tag{5.3}$$

Exemple

La video `https://www.youtube.com/watch?v=WgvBmxfV_sY` montre le "solénoide" supraconducteur utilisé pour produire le champ magnétique le plus puissant utilisé à l'heure actuelle pour une IRM. L'état supraconducteur permet d'annuler la résistance électrique dans les fils et d'augmenter l'intensité du courant électrique pour augmenter l'intensité du champ magnétique sans faire fondre les fils par effet joule. Le champ magnétique produit par ce dispositif est de 11.7 T et le courant qui passe dans les fils est de 1500 A. La formule précédente montre qu'il faut environ 6000 tours de fils par mètre. C'est ce qui explique le bobinage du fil en plusieurs couches.