

---

# Le courant électrique

---

### Objectifs :

- exprimer le courant électrique en fonction du vecteur densité de courant
- donner l'expression du vecteur densité volumique de courant électrique
- utiliser l'équation de conservation de la charge
- savoir exprimer et orienter l'élément de courant infinitésimal d'un circuit filiforme

L'expérience d'Ørsted a montré que le courant électrique est la source du champ magnétique. Nous allons rappeler quelques propriétés du courant électrique dans ce chapitre avant de détailler dans le prochain chapitre la loi de Biot et Savart.

## 4.1 Courant électrique

Dans le cours d'électrostatique, nous étudions des systèmes physiques où les charges sont immobiles. Nous avons notamment vu que la densité volumique de charge et le champ électrique étaient nuls dans un conducteur homogène dans de telles conditions. Nous allons maintenant étudier le cas hors équilibre où le champ électrique est non nul dans un conducteur. C'est le cas dans la figure 4.1. Deux conducteurs de potentiels différents sont connectés par un fil en métal. **Le champ électrique créé dans le fil métallique par la différence de potentiel entre les deux conducteurs entraîne la circulation des électrons libres dans le fil. Le courant électrique ainsi créé circule dans le fil tant que les deux conducteurs ne sont pas au même potentiel.**

**Un générateur est un système qui permet de maintenir la différence de potentiel entre deux points d'un circuit.**

Il est intéressant de détailler ce qui se passe précisément au moment où nous connectons le fil métallique aux deux conducteurs de potentiel différent. Supposons que le potentiel  $V_1$  soit supérieur au potentiel  $V_2$ . Le champ électrique pointe alors du conducteur 1 qui est au potentiel  $V_1$  vers le conduc-

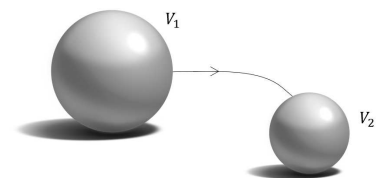


FIGURE 4.1: Deux conducteurs métalliques de potentiel électrique différent connectés par un fil métallique. Un courant circule dans le fil tant que les deux conducteurs ne sont pas au même potentiel.

teur 2 qui est au potentiel  $V_2$ . Au moment où le fil est connecté entre les deux conducteurs, le champ électrique déplace dans le conducteur 1 les électrons de conduction du fil qui sont en contact avec ce conducteur. Les électrons se déplacent à une vitesse appelée vitesse de dérive. La région du fil au contact du conducteur 1 se trouve ainsi dépeuplée en électrons. Le champ électrique ainsi créé déplace les électrons de conduction du fil qui sont au contact de cette région dépeuplée à la vitesse  $\vec{v}_{\text{dérive}}$ . Ce processus se poursuit de proche en proche jusqu'à ce que tous les électrons de conduction du fil se déplacent à la vitesse  $\vec{v}_{\text{dérive}}$ .

Il faut cependant bien voir que ce processus s'établit à la vitesse de propagation du champ électrique dans le fil. Cette vitesse est la vitesse de la lumière. Ainsi, il ne faut pas confondre la vitesse de déplacement des porteurs de charge dans un conducteur avec la vitesse à laquelle la variation du courant se propage. **Les variations du courant se propagent à la vitesse de la lumière, c'est une onde électromagnétique qui est la cause des variations du courant. Les porteurs de charge se déplacent à une vitesse beaucoup plus faible appelée vitesse de dérive.**

Nous pouvons retenir la définition suivante du courant électrique. **Le courant électrique est une mesure de la quantité de charge passant à travers une surface par unité de temps.** Le courant électrique a pour expression :

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{4.1}$$

Notons que le signe du courant électrique dépend de l'orientation de la surface mais également du type de porteur de charge. Nous allons détailler dans la section suivante cette assertion ainsi que le lien entre le courant électrique et le **vecteur densité de courant volumique**.

## 4.2 Vecteur densité de courant électrique

Nous considérons pour l'instant un seul type de porteur de charges de charge  $q$  et nous considérons que tous les porteurs de charges ont la même vitesse. Soit  $\vec{S}$  une surface rectangulaire à travers laquelle les particules passent. La figure 4.2 montre que le nombre  $dN$  de particules qui passent en  $dt$  à travers  $\vec{S}$  a pour expression  $dN = Sv dt \cos \theta$  où  $n$  est la densité de particules. Le courant qui passe à travers la surface  $\vec{S}$  a donc pour expression :

$$I = \frac{dQ}{dt} = q \frac{dN}{dt} = nqSv \cos \theta = nq\vec{S} \cdot \vec{v}$$

Cette dernière expression montre bien que le signe du courant électrique dépend du type de porteurs de charge mais également de l'orientation de la surface. Nous généralisons cette expression au cas où les particules ont des vitesses différentes. Nous introduisons alors la densité de charges  $n_k$  qui ont la vitesse  $\vec{v}_k$ . Le courant électrique à travers  $\vec{S}$  a alors pour expression :

$$I = \vec{S} \cdot q \sum_k n_k \vec{v}_k$$

Nous utilisons cette relation pour introduire la densité de courant volumique  $\vec{J}$  (en  $A m^{-2}$ ) qui a pour expression :

$$\vec{J} = q \sum_k n_k \vec{v}_k \tag{4.2}$$

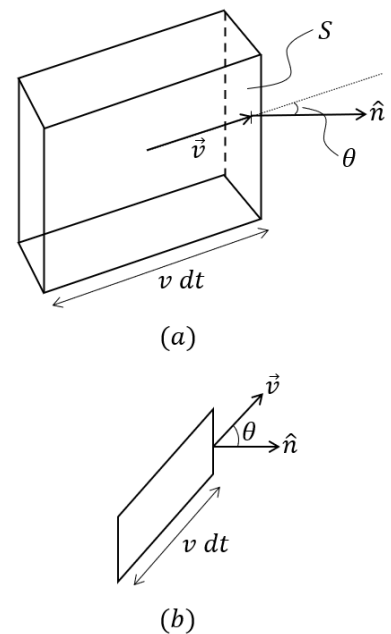


FIGURE 4.2: Volume occupé par les particules qui passent à travers la surface  $S$  pendant  $dt$ .

Nous introduisons alors la vitesse moyenne des particules en effectuant une moyenne sur tous les porteurs de charge dans un volume petit à l'échelle macroscopique. Cette moyenne a pour expression  $\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{n} \sum_k n_k \vec{v}_k$  et l'expression du courant électrique devient donc  $I = nq \langle \vec{v} \rangle \cdot \vec{S} = \vec{J} \cdot \vec{S}$ .

Pour une surface quelconque, nous obtenons l'expression suivante du courant électrique :

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} \tag{4.3}$$

Avec :

$$\vec{J} = nq \langle \vec{v} \rangle = \rho \langle \vec{v} \rangle \tag{4.4}$$

Il faut retenir les équations 4.3 et 4.4. Cette équation montre que le vecteur  $\vec{J}$  s'exprime en  $A \cdot m^{-2}$  et permet de faire le lien entre le vecteur densité de courant et le courant. Notons que le courant électrique est une grandeur scalaire. Ainsi, mettre une flèche à coté du courant électrique sur un schéma électrique est abusif même si l'usage le permet.

**Exemple**

Une sphère de rayon variable  $R(t)$  contient une charge totale  $Q$  positive uniformément répartie dans son volume. On admet que lorsque  $R$  varie, le mouvement des charges à l'intérieur de la sphère est radial. La densité volumique de charge  $\rho(t)$  a pour expression  $\rho(t) = \frac{3Q}{4\pi R(t)^3}$ . La charge  $q(r, t)$  contenue à l'instant  $t$  dans une sphère fixe de rayon  $r < R$  a donc pour expression  $q(r, t) = \rho(t) \frac{4}{3}\pi r^3$ . Le taux de variation  $\frac{dq}{dt}$  de charges contenues dans la sphère de rayon  $r$  a pour expression  $\frac{dq}{dt} = -\frac{3Qr^3}{R^4} \frac{dR}{dt}$ . Si  $\frac{dq}{dt}$  est négatif, cela signifie que la charge dans la sphère de rayon  $r$  diminue et donc que les charges positives sortent de la sphère. En définissant  $d\vec{S}$  vers l'extérieur, le courant est positif dans ce cas et donné par  $I = -\frac{dq}{dt} = \frac{3Qr^3}{R^4} \frac{dR}{dt}$ . Le mouvement des charges fait donc apparaître à l'intérieur de la sphère de rayon  $R(t)$  un vecteur densité de courant  $\vec{j} = j(r, t)\hat{u}_r$  avec  $j(r, t) = \frac{3Qr}{4\pi R^4} \frac{dR}{dt}$ .

☞ Attention,  $\langle \vec{v} \rangle$  est une moyenne vectorielle. Ce terme est donc nul si toutes les directions sont équiprobables. Ainsi,  $\langle \vec{v} \rangle = 0$  pour de l'agitation thermique. Cette valeur moyenne est non nulle dans le cas d'un mouvement d'ensemble des porteurs de charges. Nous parlons dans ce cas d'un phénomène de transport de charges, la vitesse correspondante est la vitesse de dérive mentionnée dans la section précédente.

Dans le cas où le courant circule dans une région de l'espace dont une dimension est très faible devant les autres (figure 4.3), il est possible d'introduire un **vecteur densité de courant surfacique**  $\vec{J}_S$ . En effet, nous avons  $I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int \left( \int_0^e \vec{J} dy \right) dx \hat{u}_z = \int \vec{J}_S dx \hat{u}_z$  où  $\vec{J}_S$  est le vecteur densité de courant surfacique.

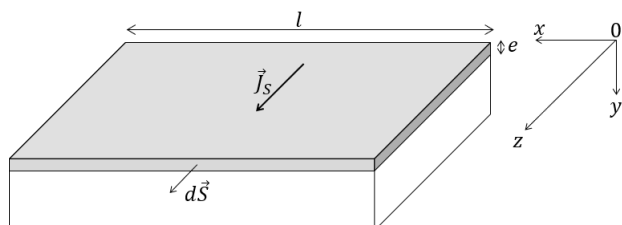


FIGURE 4.3 – Notations utilisées pour définir la densité de courant surfacique.

### 4.3 La conservation de la charge

La conservation de la charge est une observation expérimentale. Nous en faisons un postulat en disant que la charge d'un système isolé se conserve. C'est à dire que la somme algébrique des charges positives et négatives présentes à un instant quelconque reste toujours constante.

Le but de cette section est d'établir **l'équation de conservation de la charge** qui en découle.

#### 4.3.1 Équation locale de conservation de la charge

Nous allons maintenant établir **l'équation de conservation de la charge** qui en découle. Pour l'établir, nous considérons un volume de surface  $S$  et d'épaisseur  $dx$  dans un système de coordonnées cartésiennes. La figure 4.4 montre le principe du calcul. La partie hachurée en noir (figure 4.4-(a)) représente les charges comprises entre  $x$  et  $x + dx$  tandis que les parties hachurées en vert et rouge (figure 4.4-(b)) représentent les charges qui rentrent et sortent du volume compris entre  $x$  et  $x + dx$ .

La conservation de la charge s'écrit :

$$Sdx(\rho(t + dt, x) - \rho(t, x)) = S\rho(t, x)v_x(t, x)dt - S\rho(t, x + dx)v_x(t, x + dx)dt$$

L'équation précédente se réécrit :

$$\frac{\{\rho(t + dt, x) - \rho(t, x)\}}{dt} = - \frac{\rho(t, x + dx)v_x(t, x + dx) - \rho(t, x)v_x(t, x)}{dx}$$

Nous reconnaissons les définitions des dérivées partielles. Nous obtenons ainsi l'équation de conservation de la charge à une dimension :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} = 0$$

Nous généralisons immédiatement à trois dimensions pour obtenir :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

soit :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0} \tag{4.5}$$

avec  $\vec{J} = \rho\vec{v}$ . L'équation précédente est l'équation de **conservation de la charge** qui fait partie de la famille des **équations de continuité**.

Notons que pour une distribution de charges indépendante du temps, la conservation de la charge entraîne :

$$\text{div}(\rho\vec{v}) = \text{div } \vec{J} = 0 \tag{4.6}$$

Cette équation est l'équation de conservation de la charge en **régime permanent ou stationnaire**.

#### 4.3.2 Équation de conservation de la charge

L'équation 4.5 est une équation locale, nous pouvons intégrer l'équation précédente sur un volume  $V$  fixe pour obtenir la conservation de la charge contenue dans ce volume d'où :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \iiint_V \text{div}(\rho\vec{v}) d\tau = 0$$

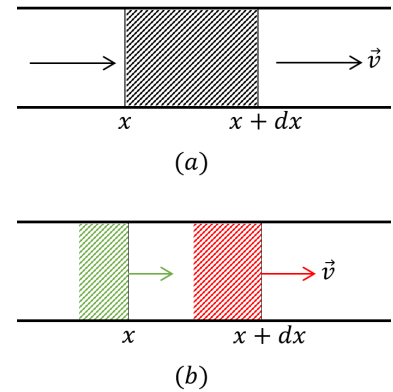


FIGURE 4.4: Conservation de la charge.

☞ La conservation de la charge s'écrit : **Variation temporelle du nombre de charges dans le volume = Nombre de charges qui rentrent dans le volume - Nombre de charges qui sortent du volume.**

☞ Nous pouvons également utiliser un développement de Taylor à l'ordre 1 pour retrouver l'équation de conservation de la charge. Dans ce cas, il est d'usage d'utiliser la notation  $\delta x$  au lieu de  $dx$ .  $\delta x$  est une quantité petite qui permet de faire un développement de Taylor. Nous faisons tendre ensuite  $\delta x$  vers zéro.

☞ Attention, le régime permanent ou stationnaire ne veut pas dire statique. La vitesse des particules est non nulle mais en un point fixe de l'espace la densité volumique de charges ne dépend pas du temps.

Le théorème d'Ostrogradski nous permet d'écrire :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}_{ext} = 0$$

Puisque le volume  $V$  est fixe, nous pouvons sortir la dérivée par rapport au temps de l'intégration sur le volume pour obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho d\tau + \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}_{ext} = 0$$

Nous reconnaissons l'expression de la charge totale  $Q = \iiint_V \rho d\tau$  contenue dans le volume  $V$ . La conservation de la charge contenue dans le volume s'écrit donc :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}_{ext} = 0 \tag{4.7}$$

La quantité  $\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$  représente la quantité de charges qui quitte par unité de temps le volume  $V$ .

**Exemple**

Une sphère de rayon variable  $R(t)$  (figure 4.5) contient une charge totale  $Q$  uniformément répartie dans son volume. La densité volumique de charge  $\rho(t)$  a donc pour expression  $\rho(t) = \frac{3Q}{4\pi R(t)^3}$ . Le rayon  $R$  de la sphère varie ce qui provoque un mouvement des charges à l'intérieur de la sphère purement radial qui fait apparaître à l'intérieur de la sphère un vecteur densité de courant volumique  $\vec{j} = j(r, t)\hat{u}_r$ . L'équation locale de conservation de la charge nous permet d'obtenir  $j(r, t) = \frac{3Qr}{4\pi R^4} \frac{dR}{dt}$ . Le courant qui passe à travers une surface sphérique de rayon  $r$  a donc pour expression  $I = \frac{3Qr^3}{R^4} \frac{dR}{dt}$ .

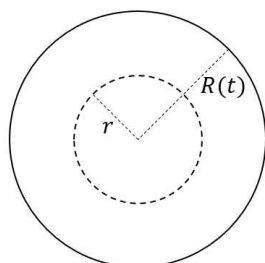


FIGURE 4.5 – Sphère pulsante de rayon  $R$  variable.

☞ Notons que nous aurions pu écrire directement la dernière équation et utiliser le théorème d'Ostrogradski pour remonter à l'équation locale de conservation de la charge.

### 4.4 Lignes et tubes de courant

Nous avons vu que l'équation de conservation de la charge entraîne en régime permanent :

$$\text{div } \vec{J} = 0$$

Cette équation est similaire à l'équation  $\text{div } \vec{B} = 0$ , ainsi tout ce que nous avons dit au chapitre 2 sur les lignes de champ magnétique et les tube de champ magnétique se transpose au courant. On parle alors de **lignes de courant** et de **tube de courant**. Ainsi, en régime permanent, **les lignes de courant sont nécessairement fermées**. Il en est donc de même **des tube de courant**. Notons également, comme pour les lignes de champ magnétique, que les lignes de courant ne peuvent pas se croiser puisque la direction du vecteur  $\vec{J}$  est unique en chaque point de l'espace.

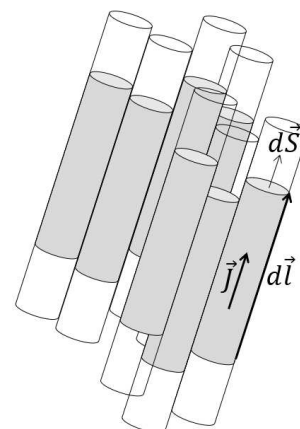


FIGURE 4.6: Distribution volumique de courant décomposée en tubes de courant élémentaire.

Ainsi, nous pouvons décomposer une distribution de courant volumique en régime permanent en une somme de tubes de courant.

Nous pouvons faire cette décomposition en tubes de courant suffisamment fins pour que le vecteur densité de courant volumique dans le tube soit dans le même sens que le vecteur déplacement  $d\vec{l}$  le long du tube (figure 4.6). Ainsi, pour un tube de courant élémentaire, nous avons  $\vec{J} d\tau = \vec{J} \cdot d\vec{S} \cdot d\vec{l} = Id\vec{l}$  où  $d\tau$  est l'élément de volume infinitésimal.

## 4.5 Définition d'un conducteur ohmique

### 4.5.1 Loi d'Ohm locale

Dans un conducteur ohmique, le vecteur densité de courant volumique est relié au champ électrique par la relation  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  où  $\sigma$  est la conductivité du milieu en  $\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ . Pour le cuivre,  $\sigma \simeq 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ . Cette loi est valable en courant continu ou alternatif tant que la fréquence d'oscillation du champ électrique est  $f \ll 10^{14} \text{Hz}$ . Pour un champ électrique qui oscille plus rapidement le temps des réponse des électrons est telle que la loi d'Ohm locale n'est plus valide.

### 4.5.2 De la loi d'Ohm locale à la loi d'Ohm

Nous allons démontrer dans cette sous-section que que la loi d'Ohm locale redonne bien la loi d'Ohm  $U = RI$  au niveau macroscopique parcouru par un courant uniforme. Nous considérons qu'une différence de potentielle  $V_A - V_B$  est appliqué au conducteur et nous considérons un tube de courant élémentaire du conducteur (figure 4.8).

Nous avons vu que dans le cas d'un tube de courant élémentaire, le vecteur  $\vec{j}$  est dans le sens du vecteur déplacement  $d\vec{l}$  le long du fil. La différence de potentiel entre les deux extrémités du fil, qui est donnée par la circulation du vecteur champ électrique entre ces deux points, a alors pour expression :

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \frac{1}{\sigma} \vec{j} \cdot d\vec{l} = \int \frac{1}{\sigma} j dl$$

Pour un courant uniforme, nous avons donc  $\Delta V = \frac{1}{\sigma} jL = \frac{L}{\sigma S} I$  avec  $I = jS$ . La résistance du conducteur est donc donnée par :

$$R = \frac{L}{\sigma S} \tag{4.8}$$

En introduisant la résistivité  $\rho = \frac{1}{\sigma}$ , la résistance du conducteur a pour expression :

$$R = \frac{\rho L}{S} \tag{4.9}$$

Il existe de nombreux matériaux pour lesquels la loi d'Ohm n'est pas valide. C'est à dire que le courant n'est pas proportionnel à la différence de potentiel entre les bornes du matériau. C'est par exemple le cas pour les semi-conducteur, ainsi la caractéristique courant-tension d'une diode est plus complexe que celle d'un conducteur Ohmique. La figure 4.7 montre la valeur de la résistivité pour différents matériaux.

#### Le saviez-vous ?

- Le modèle de Drude fût le premier modèle de conduction électrique. Bien que basé uniquement sur la physique classique, ce modèle a permis d'exprimer la conductivité électrique en fonction de paramètres microscopiques. Plus précisément la conductivité électrique dans ce modèle a pour expression  $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$  où  $n$  est la densité de porteurs de charges,  $m$  la masse d'un porteur de charge et  $\tau$  le temps moyen entre deux collisions
- L'expression  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  est une loi dite phénoménologique. C'est-à-dire que cette loi n'est pas basée sur une théorie physique mais sur un lien de cause à effet, c'est le champ électrique qui a l'origine du déplacement des porteurs de charges. Une théorie plus poussée de la conduction électrique pourrait expliquer pourquoi nous nous limitons à une puissance un du champ électrique.
- Dans le cas général, il n'y a priori pas de raisons que le champ électrique le vecteur densité de courant volumique soit dans la même direction. Dans ce cas  $\sigma$  est un objet mathématique appelé tenseur. On parle de tenseur de conductivité. Pour un matériau isotrope,  $\vec{E}$  et  $\vec{j}$  sont dans la même direction et  $\sigma$  est un scalaire.

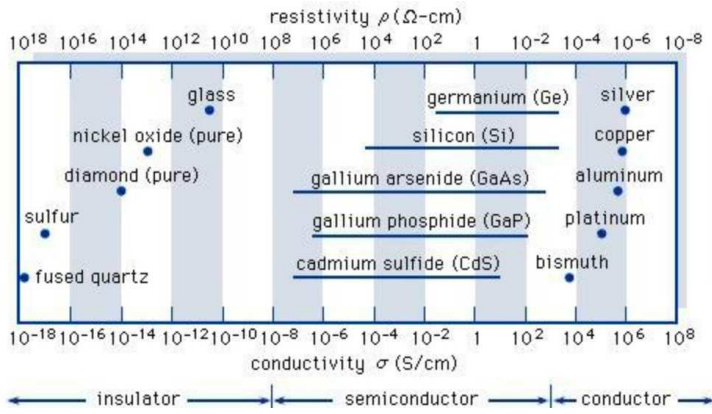


FIGURE 4.7 – Valeur de la résistivité pour différents matériaux.

## 4.6 Circuits filiformes

Nous allons définir dans cette section ce que nous allons appeler par la suite circuit filiformes. Considérons un fil conducteur de longueur  $L$  et de rayon  $R \ll L$  parcouru par un courant uniforme. Dans ce cas, le vecteur  $\vec{j}$  est toujours tangent au fil. Nous allons orienter le vecteur déplacement  $d\vec{l}$  le long du circuit dans le sens du vecteur  $\vec{j}$ . **Ainsi, pour un circuit filiforme, nous avons  $\vec{J} \cdot d\vec{\tau} = \vec{J} \cdot d\vec{S} \cdot d\vec{l} = Id\vec{l}$  où  $d\vec{\tau}$  est l'élément de volume infinitésimal.**

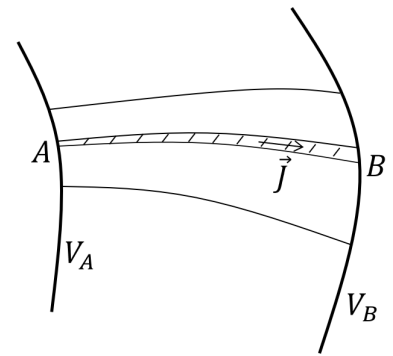


FIGURE 4.8: Morceau de conducteur et tube de courant élémentaire.