CHAPITRE 3

Les relations de passage du champ électrostatique

Objectifs :

- citer et utiliser les relations de passage du champ électrostatique à travers une interface chargée.

Dans ce chapitre, nous établissons les relations de passage du champ électrostatique à travers une surface chargée.

3.1 L'exemple de la plaque infinie

Considérons une plaque infinie uniformément chargée positivement et nous nommons $\widehat{u}_x$ le vecteur unitaire normale à la plaque. Le champ électrique est contenu dans les plans de symétries de la distribution de charge et est donc orienté suivant $\widehat{u}_x$ (figure 3.1). Le théorème de Gauss appliqué à une surface cylindrique de section S s'écrit $2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$ d'où $E_x = \text{sign}(x)\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

La figure 3.2 montre le graphe de la composante E_x du champ électrique. Au passage d'une plaque uniformément chargée, la composante normale du champ électrique subit donc une discontinuité de $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Nous allons montrer dans la section suivante que ce résultat est vrai pour n'importe quelle surface chargée.

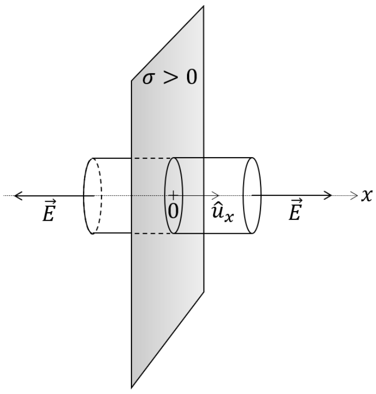


FIGURE 3.1: Champ électrique produit par une plaque infinie uniformément chargée.

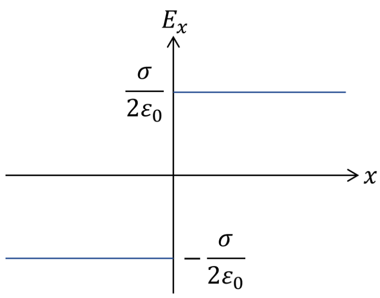
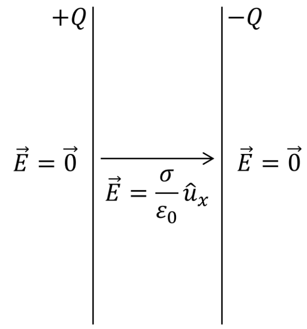


FIGURE 3.2: Graphe du champ électrique produit par une plaque infinie uniformément chargée.

Exemple

Le champ électrique produit par un condensateur plan constitué de deux plaques infinies a pour expression $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ dans le condensateur et est nul à l'extérieur. Nous retrouvons la discontinuité de $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ de la composante normale à l'interface du champ électrique de part et d'autre d'une surface chargée.



3.2 Discontinuité de la composante normale du champ électrique à travers une surface chargée

L'équation $div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ traduit la discontinuité de la composante normale du champ électrique à travers une interface chargée. Localement, une interface peut être assimilée à un plan. Considérons une surface de Gauss cylindrique de hauteur h et de section S qui passe de part et d'autre de l'interface.

Le théorème de Gauss appliqué à la surface de Gauss s'écrit :

$$E_{1//}h2\pi R - E_{1\perp}S + E_{2//}h2\pi R + E_{2\perp}S = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}S$$

où σ est la densité surfacique de charge de l'interface. Puisque nous cherchons à établir le lien entre les composantes du champ électrique au voisinage immédiat de l'interface, nous prenons $h \to 0$ pour obtenir :

$$\boxed{E_{2\perp} - E_{1\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \tag{3.1}$$

Ce qui démontre la **discontinuité de la composante normale** du champ électrique de part et d'autre d'une interface chargée.

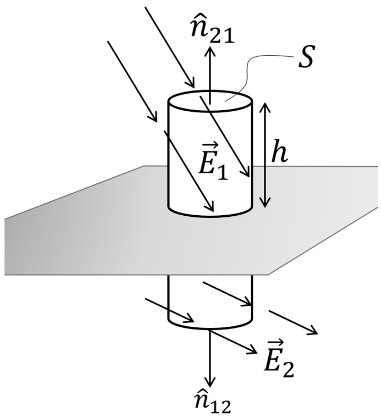


FIGURE 3.3: Démonstration de la discontinuité de la composante normale du champ électrostatique.

3.3 Continuité de la composante tangentielle du champ électrique à travers une surface chargée

L'équation $\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = 0$ traduit la continuité de la composante tangentielle du champ électrique à travers une interface chargée. Localement, une interface peut être assimilée à un plan. Considérons un contour de hauteur h et de longueur L qui passe de part et d'autre de l'interface.

La circulation du champ électrique le long du contour s'écrit :

$$E_{1//}L + E_{1\perp}h/2 + E_{2\perp}h/2 - E_{2//}L - E_{1\perp}h/2 - E_{2\perp}h/2 = 0$$

Puisque nous cherchons à établir le lien entre les composantes du champ électrique au voisinage immédiat de l'interface, nous prenons $h \to 0$ pour obtenir :

$$\boxed{E_{1//} = E_{2//}} \tag{3.2}$$

Ce qui démontre la **continuité de la composante tangentielle** du champ électrique de part et d'autre d'une interface chargée.

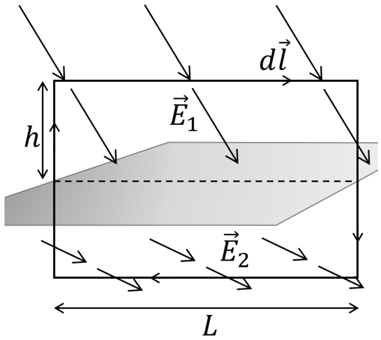


FIGURE 3.4: Démonstration de la continuité de la composante tangentielle du champ électrostatique.