

---

# Les équations locales de l'électrostatique

---

### Objectifs :

- citer et utiliser les équations locales de l'électrostatique.
- citer l'équation de Poisson.

Dans ce chapitre, nous utilisons les outils mathématiques vus dans le chapitre précédent afin d'obtenir la forme locale du théorème de Gauss.

## 2.1 La forme locale du théorème de Gauss

Rappelons l'expression du théorème de Gauss :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

Nous considérons un volume  $V$  qui contient la charge  $Q$ . En introduisant la densité volumique de charges  $\rho$ , nous pouvons réécrire le théorème de Gauss sous la forme  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$ . Le théorème de d'Ostrogradski nous permet alors d'écrire  $\iiint_V \text{div } \vec{E} d\tau = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$ .

- L'expression précédente doit-être valide quelque soit le volume  $V$ , l'égalité suivante doit donc être respectée :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.2)$$

- Cette équation constitue **la forme locale du théorème de Gauss**. Cette équation reste valide en régime variable.

☞ Cette équation est la première des quatre équations de Maxwell.

**Exemple**

Une boule de rayon  $R$  porte une charge volumique telle qu'à l'intérieur de cette boule,  $\vec{E} = E_0 \hat{u}_r$  où  $E_0$  est une constante. Nous pouvons en déduire la densité volumique de charge en utilisant la forme locale du théorème de Gauss en coordonnées sphériques. Nous obtenons ainsi  $\rho = \frac{2\epsilon_0 E_0}{r}$ .

**2.2 Le rotationnel du champ électrostatique**

Le potentiel électrique est défini à partir de la circulation du champ électrique entre deux points  $V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$  où  $V$  est le **potentiel électrique en Volt**. Notons que si  $V(A) > V(B)$  alors le terme de droite de l'équation précédente est positif, cela implique que le vecteur champ électrique est orienté de  $A$  vers  $B$ . Autrement dit, **le champ électrique est orienté des régions de potentiel électrique élevé vers les régions de potentiel électrique faible**.

Si nous comparons cette formule à la définition du gradient d'une fonction scalaire nous pouvons écrire :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (2.3)$$

où le signe - est dû au fait que le champ électrique est orienté des régions de potentiel électrique élevé vers les régions de potentiel électrique faible.

- Étant donné que  $\vec{\text{rot}} \vec{f} = 0$ , nous en déduisons que :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \quad (2.4)$$

- Cette équation est valide uniquement pour un champ  $\vec{E}$  qui ne **dépend pas du temps**.

La forme intégrale de cette équation a pour expression :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.5)$$

en accord avec la définition du potentiel électrique.

Les équations locales de l'électrostatique ont donc pour expression :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\text{rot}} \vec{E} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (2.6)$$

**2.3 Les équations de Poisson et de Laplace**

Les équations 2.6 permettent théoriquement de calculer le champ électrostatique. Il est néanmoins parfois plus simple de calculer le potentiel électrique pour en déduire en suite le champ électrique.

Il également parfois plus simple de raisonner avec le potentiel électrique car cela revient à raisonner en terme d'énergie potentielle électrique.

Les équations de Poisson et de Laplace permettent de calculer le potentiel électrique.

☞ Rappelons que la différence de potentiel électrique entre deux points représente la variation d'énergie potentielle électrostatique par unité de charge entre ces deux points.

☞ Cette équation montre que le rotationnel du champ électrique est nécessairement nul pour un champ électrostatique. Ainsi, si nous prenons une boucle quelconque dans l'espace, la circulation du champ électrique le long de cette boucle est nécessairement nulle. Si nous remplaçons cette boucle par un fil électrique, cela signifie que les électrons de conduction ne peuvent pas gagner d'énergie en faisant une boucle sur le fil. Ainsi, nous ne pouvons pas faire de générateur à partir d'un champ électrostatique.

### 2.3.1 Équation de Poisson

- En injectant  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  dans le théorème de Gauss local, nous obtenons **l'équation de Poisson** que doit satisfaire le potentiel électrique :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (2.7)$$

#### Exemple

Le potentiel électrique produit par une sphère uniformément chargée de rayon  $R$  a pour expression à l'intérieur de la sphère  $V(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(3R^2 - r^2)$ . Le calcul du Laplacien scalaire en coordonnées sphériques montre que  $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  en accord avec l'équation de Poisson.

**Le saviez-vous ?** Cette équation indique que la présence de charges en un point "courbe" la fonction potentiel électrique.

### 2.3.2 Équation de Laplace

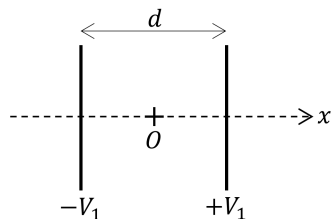
En tout point de l'espace où la densité volumique de charge est nulle, le potentiel électrique doit satisfaire l'équation :

$$\Delta V = 0 \quad (2.8)$$

Cette équation est **l'équation de Laplace**.

#### Exemple

La figure suivante montre un condensateur plan dont les plaques ont un potentiel  $+V_1$  et  $-V_1$ . Étant donné que nous considérons que le condensateur est constitué de deux plaques infinies, le potentiel électrique produit par le condensateur est uniquement fonction de  $x$ .



L'équation de Laplace implique que le potentiel a pour expression  $V = ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes. À l'intérieur du condensateur, le potentiel électrique doit vérifier  $V(x = -\frac{d}{2}) = -V_1$  et  $V(x = \frac{d}{2}) = V_1$  d'où  $V = V_1 \frac{2x}{d}$ . Le champ électrique dans le condensateur a donc pour expression  $\vec{E} = -\frac{2V_1}{d}\hat{u}_x$ .

### 2.3.3 Théorème d'unicité

Il est possible de démontrer que l'équation de Poisson **définit de manière unique le potentiel électrique** lorsque la répartition des charges  $\rho$  est donnée ainsi que les conditions aux limites. Si les charges sont réparties dans un **volume fini**, la condition aux limites utilisée est de prendre un potentiel nul à l'infini. Cette convention peut être inadaptée lorsque la distribution de charges n'est pas bornée (présences de charges jusqu'à l'infini). C'est par exemple le cas pour un plan infini uniformément chargé.

### 2.3.4 Continuité du potentiel électrique

Nous avons rappelé que le potentiel électrique est défini à partir de la circulation du champ électrique entre deux points  $V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Entre deux points infiniment proches, cette relation s'écrit  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Lorsque le champ électrique est fini, nous avons donc  $dV \rightarrow 0$  si  $dl \rightarrow 0$ . Autrement dit, le potentiel électrique est **une fonction continue, sauf aux points où le champ électrique tend vers l'infini**. Physiquement, le potentiel électrique représente l'énergie potentielle électrique par unité de charge, il apparaît donc naturelle que l'énergie potentielle d'une particule qui se déplace dans le potentiel électrique varie continument.

#### Exemple

Reprenons l'exemple du condensateur plan formé de deux plaques infinies en regard et séparé de la distance  $d$ . Nous avons déterminé précédemment le potentiel électrique à l'intérieur du condensateur mais nous pouvons également chercher à le déterminer à l'extérieur, le potentiel électrique a toujours l'expression  $V = ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes mais le potentiel électrique ne peut pas dépendre de  $x$  à l'extérieur du condensateur pour rester fini, nous avons donc  $a = 0$  à l'extérieur du condensateur. La continuité du potentiel implique  $b = +V_1$  à l'extérieur du condensateur du coté droit et  $b = -V_1$  à l'extérieur du condensateur du coté gauche.