CHAPITRE 10

Propagation d'un paquet d'ondes et dispersion

Objectifs :

- Définir la vitesse de groupe d'un paquet d'onde.
- Définir un milieu dispersif.
- Établir le contenu physique d'une relation de dispersion.

Dans tout ce qui précède, nous avons utilisé uniquement des ondes planes harmonique dans le vide illimité. Nous avons montré que l'injection d'une solution en onde plane harmonique dans l'équation de propagation du champ électromagnétique conduit à une relation appelée **relation de dispersion d'une onde EM dans le vide illimité $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$.** Nous n'avons cependant pas justifié le terme de **"dispersion" dans cette relation**. C'est l'objet de ce chapitre.

Pour répondre à cette question, nous allons nous demander ce que deviennent les résultats précédents si nous considérons un paquet d'ondes de différentes fréquences.

10.1 Propagation dans un milieu faiblement dispersif : vitesse de phase et vitesse de groupe

Nous avons considéré jusqu'à présent la propagation d'une onde sinusoïdale de la forme $E = E_0 \cos(\omega t - kx)$. Le terme $(\omega t - kx)$ est appelé la phase de l'onde. Nous avons montré dans un chapitre précédent que nous pouvons définir une vitesse de propagation d'une onde sinusoïdale en considérant un point d'amplitude constante que nous suivons des yeux. Ce point est donc un point de phase constante. Nous avons montré qu'un tel point se propage à la vitesse $\frac{\omega}{k}$. Nous nommons ainsi vitesse de phase cette vitesse que nous notons $v_\phi = \frac{\omega}{k}$. La vitesse de phase a donc pour définition :

$$\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{k}} \tag{10.1}$$

Notons que la vitesse de phase représente la vitesse de propagation d'une seule onde sinusoïdale.

Nous allons ici considérer la superposition de plusieurs ondes de telle sorte que l'extension temporelle de ce paquet d'ondes reste finie.

Nous cherchons à établir l'expression de la vitesse de l'enveloppe d'un paquet d'onde. Pour ce faire, nous allons considérer la superposition de deux OPPHEM et nous généraliserons ensuite le résultat obtenu. Nous considérons donc deux OPPHEM de fréquence $\omega_1 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ et $\omega_2 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$ voisines, c'est-à-dire que $\Delta\omega << \omega_0$. Ces deux ondes se propagent vers les x croissants et sont polarisées rectilignement. Le module du champ électrique total a pour expression :

$$\begin{aligned} E = E_1 + E_2 &= E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x) \\ &= 2E_0 \left\{ \cos(\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x) \cos(\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x) \right\} \end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{E = 2E_0 \left\{ \cos(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x) \cos(\omega_0 t - k_0 x) \right\}} \tag{10.2}$$

La figure 10.1 montre le graphe du champ électrique total en fonction du temps mesuré par un observateur en un point fixe. L'amplitude du champ électrique total a pour expression $2E_0 \cos(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x)$. L'amplitude du champ électrique total est donc modulée par la fonction $\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x)$ appelée l'enveloppe de l'onde. Le graphe de cette fonction est tracée en orange sur la figure 10.1. Le graphe montre que l'amplitude du champ électrique total s'annule régulièrement. C'est un phénomène **de battements.**

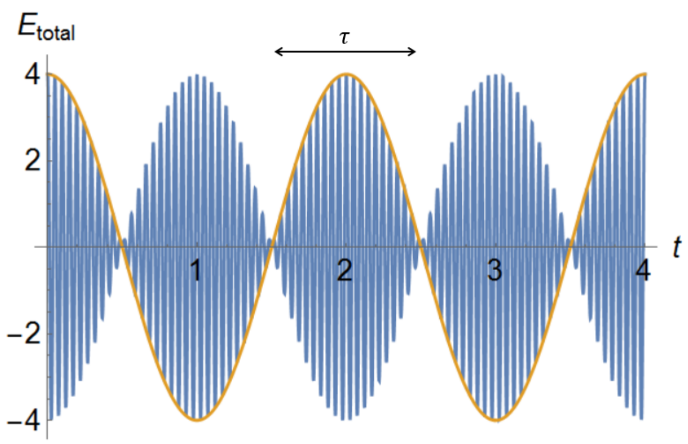

FIGURE 10.1 – Graphe du module du champ électrique total.

L'onde résultante est donc formée de paquet d'onde d'extension temporelle τ. Le graphe montre que τ vaut la moitié de la période de l'enveloppe. Nous avons donc $\tau\Delta\omega = 2\pi$.

Nous pouvons également fixer le temps et tracer l'évolution du module du champ électrique total en fonction de x. Nous observons dans ce cas un phénomène de battements spatiaux.

L'onde qui oscille à haute fréquence se propage à la vitesse $\frac{\omega_0}{k_0}$ tandis que l'enveloppe de l'onde se propage à la vitesse $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$. Ces deux vitesses ne sont en général pas identiques.

La vitesse v_g est nommée la vitesse de groupe de l'onde. Elle correspond à la vitesse de l'enveloppe du paquet d'onde et a pour expression dans le cas général :

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}} \tag{10.3}$$

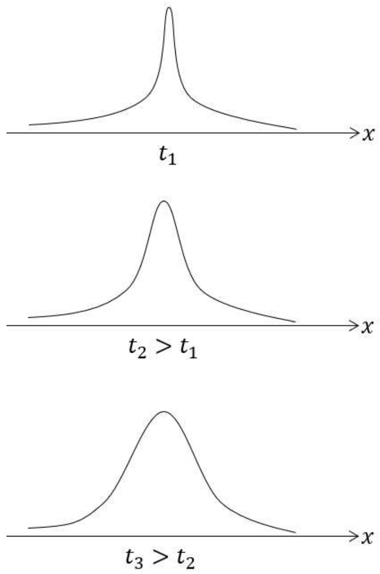

FIGURE 10.2: Étalement d'un paquet d'onde au cours de sa propagation.

10.2 Qu'est-ce qu'un milieu dispersif ?

Un milieu est dit dispersif si v_ϕ **dépend de** ω. Cela revient à dire que des ondes de fréquences différentes se propagent à des vitesses différentes ce qui entraîne la déformation du paquet d'onde. Dans ce cas, v_g **et** v_ϕ **sont différentes**. L'enveloppe de l'onde et l'onde de fréquence moyenne se propage avec des vitesses différentes. **Le paquet d'onde se propage donc en se déformant** (figure 10.2).

Dans ce cas, **les ondes ne sont pas solutions d'une équation de d'Alembert**. En effet, nous avons vu que l'équation de d'Alembert est non dispersive.

Attention, nous pouvons définir une vitesse de groupe uniquement dans **un milieu faiblement dispersif**. Il faut que l'enveloppe de l'onde ne se détruise pas au cours de la propagation pour définir une vitesse de groupe.

Notons que pouvoir calculer v_g et v_ϕ et déterminer le caractère dispersif ou non du milieu dans lequel les ondes se propagent, nous devons avoir explicitement la relation qui relie k à ω. Une telle relation est appelée **relation de dispersion**.

☞ Attention, la notion de relation de dispersion n'a du sens que si l'équation de propagation est linéaire.

Nous avons $v_\phi = v_g$ pour une onde électromagnétique qui se propage dans le vide illimité. Autrement dit, le vide illimité est un milieu non dispersif.

10.3 Établissement de la relation de dispersion : exemple du plasma

Pour obtenir la relation de dispersion des ondes EM dans le vide, nous avons injecté une solution en onde plane complexe dans l'équation de propagation du champ, nous allons suivre la même procédure dans un autre milieu. Nous allons voir dans cette section la propagation d'une onde EM dans un plasma froid dilué.

Nous avons établi l'équation de propagation du champ électromagnétique dans le vide illimité à partir des équations de Maxwell. Nous allons faire de même pour établir les équations de propagation du champ électromagnétique dans un plasma. C'est à partir de l'équation de propagation que nous pourrons déterminer l'expression de la relation de dispersion.

10.3.1 Les équations de Maxwell dans un plasma froid dilué

Un plasma est un milieu ionisé constitué d'ions de masse M de charge +e et d'électrons de masse m de charge -e. Nous avons $n_+ = n_- = n_0$.

Les équations de Maxwell dans un plasma ont donc pour expression :

$$(1) : div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad (2) : div\ \vec{B} = 0$$
$$(3) : \overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (4) : \overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0\ \vec{j} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Nous devons maintenant déterminer **ρ et $\vec{j}$ qui décrivent le plasma.** Un plasma est milieu ionisé, il peut donc se propager un courant dans un plasma. La densité volumique de charge est globalement neutre mais il est possible à priori que la densité volumique locale de charge ne soit pas neutre.

Nous devons déjà définir le type de plasma que nous allons étudier. Nous considérons un plasma froid - c'est-à-dire que l'agitation thermique est négligée - et dilué. Nous pouvons ainsi négliger les interactions entre les particules chargées. Nous considérons également que les ions sont infiniment lourds donc fixes.

On s'intéresse à la propagation d'une onde suivant Ox. Tous les paramètres du plasma sont légèrement perturbés par le passage de l'onde et oscillent à la fréquence ω.

L'équation fondamentale de la dynamique appliquée à un électron s'écrit donc, dans un plasma dilué :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \tag{10.4}$$

Comparons l'action du champ magnétique à l'action du champ électrique :

$$\frac{F_{mag}}{F_{el}} \sim \frac{vB}{E} = \frac{vk}{\omega} \tag{10.5}$$

Nous avons montré que $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$ dans le vide. Étant donné que nous considérons une plasma dilué, nous nous attendons à une avoir un rapport $\frac{k}{\omega}$ proche de $\frac{1}{c}$. nous pouvons donc négliger l'effet du champ magnétique.

L'équation fondamentale de la dynamique donne, en notation complexe : $\underline{\vec{v}} = \frac{ie\underline{\vec{E}}}{m\omega}$.

La densité volumique de courant a donc pour expression :

$$\boxed{\underline{\vec{j}} = \frac{n_0 e^2}{im\omega}\underline{\vec{E}}} \tag{10.6}$$

☞ La loi d'Ohm locale a pour expression $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ où γ est la conductivité du milieu.

La conductivité du plasma étudié a donc pour expression :

$$\boxed{\gamma = \frac{n_0 e^2}{im\omega}} \tag{10.7}$$

Nous cherchons maintenant l'expression de la densité volumique de charge locale. L'expression de la conservation de la charge nous permet d'obtenir :

$$i\left(\omega - \frac{n_0 e^2}{m\epsilon_0\omega}\right)\underline{\rho} = 0 \tag{10.8}$$

Ainsi, si la pulsation est différente de $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m\epsilon_0}}$ (ω_p est appelée la fréquence plasma), la densité volumique de charge est nulle. Le plasma est localement neutre :

$$\boxed{\rho = 0} \tag{10.9}$$

Dans l'ionosphère, $n_0 = 10^{12}\,\mathrm{m}^{-3}$ soit $f_p = 9.0\,\mathrm{MHz}$. C'est le domaine hertzien.

Les équations de Maxwell dans un plasma froid dilué ont donc pour expression :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) : div\ \vec{E} = 0 & (2) : div\ \vec{B} = 0 \\ (3) : \overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (4) : \overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0\ \frac{n_0 e^2}{im\omega}\vec{E} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}} \quad (10.10)$$

Les équations de Gauss montrent que le champ électromagnétique est transverse. On pose $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kx)}\widehat{u}_y$.

10.3.2 Équation de propagation

Nous utilisons les équations de Maxwell pour obtenir :

$$\boxed{\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m}\underline{\vec{E}}} \quad (10.11)$$

10.3.3 Relation de dispersion

Pour obtenir la relation de dispersion, il faut injecter la forme complexe de l'OPPHEM dans l'équation de propagation. On en déduit ici :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} \quad (10.12)$$

☞ On peut chercher la relation de dispersion des ondes transverses qui se propagent dans un plasma. Dans ce cas, on a forcement $div\ \vec{E} = 0$ pour ces ondes. Pour des ondes longitudinales qui se propagent dans un plasma, nous pouvons avoir $div\ \vec{E} \neq 0$.

Remarquons que $k = 0$ pour $\omega = \omega_p$ et que k est imaginaire si $\omega < \omega_p$. Nous avons donc un phénomène nouveau qui apparait pour de telles fréquences. C'est ce que nous allons maintenant étudier.

10.3.4 Contenu physique de la relation de dispersion

Nous allons maintenant **extraire le contenu physique de la relation de dispersion. Cela revient à donner l'expression de l'onde réelle**. Pour ce faire, nous injectons l'expression de k obtenue précédemment dans l'expression de l'onde plane en distinguant les deux cas mentionnés précédemment :

- Dans le cas $\omega > \omega_p$, la composante du vecteur $\vec{k}$ a donc pour expression $k = \pm\frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c}$. L'OPPHEM réelle correspondante a donc pour expression :

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega t \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}x\right)\widehat{u}_y} \quad (10.13)$$

  où le signe $\pm$ correspond aux deux sens de propagation possible de l'onde.

- Dans le cas $\omega < \omega_p$, la composante du vecteur $\vec{k}$ a pour expression $k = \pm i\frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c}$. L'OPPHEM réelle correspondante a donc pour expression :

$$\boxed{\vec{E} = E_0 e^{\pm\frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c}x}\cos(\omega t)\,\widehat{u}_y} \quad (10.14)$$

Cette onde ne se propage pas car les variables de temps et d'espace sont **découplées.** Physiquement, l'amplitude de l'onde ne peut pas diverger. Nous gardons donc le signe qui correspond à une diminution exponentielle de l'amplitude. Une telle onde est une onde **évanescente**.

Le plasma agit comme un filtre passe haut de fréquence de coupure f_p.

10.3.5 Vitesse de phase et de groupe

Nous avons $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$. Nous obtenons donc :

$$\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{k} = c\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}} \tag{10.15}$$

Pour obtenir la vitesse de groupe, il est plus facile de différentier la relation de dispersion et d'obtenir :

$$2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \tag{10.16}$$

La vitesse de groupe a donc pour expression :

$$\boxed{v_g = \frac{c^2}{v_\phi} = c\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega}} \tag{10.17}$$

Nous avons donc $v_\phi \neq v_g$ ce qui traduit la dispersion des ondes électromagnétiques se propageant dans un plasma. Notons que les vitesses de phase et de groupe ne sont pas définies pour $\omega \leqslant \omega_p$ puisque les ondes ne se propagent pas.

Dans le cas général, nous avons $k = k' + ik''$ **où le terme k'' caractérise l'absorption de l'onde dans le milieu tandis que k' caractérise sa propagation.** Nous définissons donc :

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk'}} \tag{10.18}$$

et

$$\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{k'}} \tag{10.19}$$

10.3.6 Indice imaginaire

On définit l'indice optique d'un milieu par $n = \frac{c}{v_\phi} = \frac{ck}{\omega}$. Dans le cas général, nous avons $k = k' + ik''$, nous pouvons donc définir un **indice optique réel $n' = \frac{ck'}{\omega}$ qui décrit la propagation de l'onde** et un **indice optique imaginaire $n'' = \frac{ck''}{\omega}$ qui définit l'absorption de l'onde.**

10.4 Application : propagation de la houle

La relation de dispersion de la propagation de la houle a pour expression :

$$\omega^2 = gk \tanh(kH) \tag{10.20}$$

où H est la profondeur de l'océan.

La vitesse de phase a donc pour expression :

$$\boxed{v_\phi = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh(kH)} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh(2\pi\frac{H}{\lambda})}} \tag{10.21}$$

Ainsi, la vitesse des vagues dépend de la longueur d'onde. En prenant $H = 90\,\mathrm{m}$, on trouve $v_\phi = 3.95\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ pour $\lambda = 10\,\mathrm{m}$ et $v_\phi = 2.16\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ pour $\lambda = 3\,\mathrm{m}$. Ainsi, les vagues de grandes longueurs d'onde arrivent en premier sur le bord de côte après une tempête au large.

En arrivant sur le bord de la côte, la vitesse de la partie de la vague qui voit le fond de l'eau se rapprocher diminue. Ainsi, la vague "tourne" et se retrouve parallèle à la côte.

Nous pouvons étudier plus en détail deux cas limites.

- En eau très profonde $H >> \lambda$. Dans ce cas $\omega^2 \simeq gk$, soit $v_\phi = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$. On retrouve que les vagues de plus grandes longueurs d'onde se propagent le plus vite. La vitesse des vagues dépend alors uniquement de la longueur d'onde. En eau très profonde, le fond de l'océan n'a plus de raison d'intervenir.
- En eau peu profonde $H << \lambda$. On trouve $v_\phi = \sqrt{gH}$. Le milieu n'est plus dispersif.