

Éléments d'analyse vectorielle

Objectifs :

- calculer le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface
- calculer la divergence d'un champ de vecteur
- calculer la circulation d'un champ de vecteur
- calculer le rotationnel d'un champ de vecteur
- calculer le gradient d'une fonction scalaire
- calculer le laplacien d'un champ de vecteurs
- utiliser le théorème d'Ostrogradski
- utiliser le théorème de Stokes

Nous allons démontrer dans ce chapitre les très importants théorèmes d'Ostrogradski et de Stokes. Voici l'idée générale de ces théorèmes. Nous savons que l'intégrale de la dérivée d'une fonction le long d'un segment est reliée à la valeur de la fonction aux bornes du segment. Autrement dit $f(B) - f(A) = \int_A^B \frac{df}{dx} dx$.

Nous allons généraliser ce résultat à un volume et à une surface. Le théorème d'Ostrogradski va ainsi relier le flux d'un champ de vecteur à travers une surface fermée à l'intégrale volumique d'une quantité à définir. Le théorème de Stokes va quant à lui relier la circulation d'un champ de vecteur le long d'un contour fermé à l'intégrale surfacique d'une quantité à définir (figure 1.1).

1.1 Flux d'un champ de vecteurs

Nous nommons **champ de vecteurs ou champ vectoriel une fonction vectorielle** $\vec{A}(\vec{OM})$ où M est un point de l'espace et \vec{A} un vecteur de \mathbb{R}^3 . C'est à dire qu'il existe un vecteur à trois composantes défini en chaque point de l'espace. Le champ vectoriel \vec{A} peut également dépendre du temps.

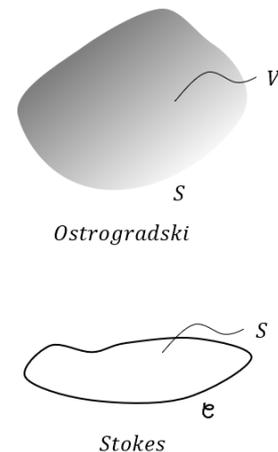


FIGURE 1.1: Topologies envisagées dans les théorèmes d'Ostrogradski et de Stokes.

Point notation ! Supposons que nous repérons un point de l'espace à l'aide du système de coordonnées cartésien alors notre champ vectoriel \vec{A} dépend des variables (x, y, z) et s'écrit donc $\vec{A}(x, y, z)$. Le vecteur \vec{A} défini au point (x, y, z) peut lui-même avoir trois composantes et nous écrirons dans ce cas $\vec{A} = A_x(x, y, z)\hat{u}_x + A_y(x, y, z)\hat{u}_y + A_z(x, y, z)\hat{u}_z$. **Attention à ne pas confondre la composante du vecteur qui est indiquée par un indice avec les variables dont peut dépendre chaque composante.** Il n'y a pas de lien entre les deux.

1.1.1 Flux d'un champ de vecteurs uniformes à travers une surface plane

Afin de se faire une image mentale de cette notion, nous considérons pour l'instant le champ de vecteurs vitesse d'un écoulement d'eau uniforme. Nous voulons mesurer le débit d'eau en $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ qui passe à travers une surface plane S . Mathématiquement, il faut calculer le flux du vecteur vitesse à travers la surface S pour obtenir cette quantité. Pour une surface plane perpendiculaire aux vecteurs vitesse, le débit, ou flux du vecteur \vec{v} à travers la surface, est tout simplement $\Phi = vS$ où S est la valeur de la surface.

Considérons maintenant une surface S plane parallèle aux vecteurs vitesse, dans ce cas, le débit d'eau qui passe à travers la surface est nul. Cela signifie que le flux du vecteur vitesse à travers la surface S est nul. La valeur du flux d'un champ de vecteurs à travers une surface plane dépend donc de l'orientation de la surface.

Il nous faut donc pouvoir évaluer la direction de la surface. Nous allons donc construire **un vecteur \vec{S} perpendiculaire à la surface dont la norme est égale à la valeur de la surface**. Autrement dit, **un vecteur peut représenter une surface**.

Ainsi, le flux de \vec{v} à travers une surface plane qui fait un angle θ avec un champ de vecteurs uniformes \vec{v} (figure 1.2) a pour expression $\Phi = \vec{v} \cdot \vec{S} = vS \cos \theta$.

1.1.2 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface quelconque

Nous allons définir le flux d'un champ de vecteurs quelconque \vec{A} à travers une surface quelconque. Pour ce faire, nous décomposons la surface quelconque en petits éléments de surface plane $\delta\vec{S}_i$. Le flux de \vec{A} à travers la surface vaut donc approximativement $\Phi = \sum_i \vec{A}_i \cdot \delta\vec{S}_i$. Pour calculer **exactement le flux à travers notre surface de forme quelconque, nous devons faire tendre vers zéro les petits éléments de surface**, Nous obtenons ainsi l'intégrale $\Phi = \lim_{\delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{A}_i \cdot \delta\vec{S}_i = \iint \vec{A} \cdot d\vec{S}$.

- **Le flux de \vec{A} à travers une surface** s'écrit donc :

$$\Phi = \iint \vec{A} \cdot dS \hat{n} = \iint \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (1.1)$$

où \hat{n} est un vecteur unitaire localement normal à la surface. Calculer le flux de \vec{A} à travers une surface revient donc à calculer l'intégrale de la composante normale de \vec{A} à travers cette surface.

- Si nous calculons le flux de \vec{A} à travers **une surface fermée**, il est d'usage de noter :

$$\Phi = \oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (1.2)$$

Nous verrons dans la suite que nous prendrons par convention $d\vec{S}$ dirigé vers l'extérieur lorsque nous aurons à calculer le flux d'un champ de vecteur à travers une surface fermée.

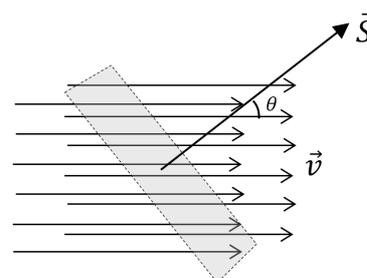


FIGURE 1.2: Flux d'un champ de vecteurs \vec{v} à travers une surface S .

☞ Un vecteur peut donc représenter un déplacement, une vitesse, un accélération, une force, un champ électrique ... mais également une surface. Notons que tous ces vecteurs sont des vrais vecteurs au sens où leur définition ne dépend pas d'une convention. Les vecteurs qui sont définis en utilisant la règle de la main droite comme convention sont des pseudo-vecteurs. L'orientation d'un vecteur qui résulte d'un produit vectoriel dépend de la règle de la main droite, le produit vectoriel entre deux vrais vecteur est donc un pseudo-vecteur.

Point notation ! Le symbole de l'intégrale double dans l'expression précédente est redondant puisque l'élément infinitésimal de surface dS indique déjà que l'intégrale porte sur une surface. Néanmoins, nous garderons le symbole de l'intégrale double pour des raisons de clarté.

Exemple

Soit le champ de vecteur d'expression $\vec{A} = \alpha r \hat{u}_\theta$ dans un système de coordonnées sphériques. Le flux de \vec{A} à travers une sphère de rayon R a pour expression $\Phi = \oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oiint \alpha R \hat{u}_\theta \cdot \hat{u}_r dS = 0$ où $d\vec{S}$ est dirigé vers l'extérieur pour une surface fermée. Par contre, si nous considérons un champ de vecteurs d'expression $\vec{A} = \alpha r \hat{u}_r$, nous obtenons $\Phi = \oiint \alpha R \hat{u}_r \cdot \hat{u}_r dS = \alpha 4\pi R^3$. Ainsi, le flux est positif si les vecteurs fuient le centre de la sphère et négatif si les vecteurs sont dirigés vers le centre de la sphère.

L'exemple précédent montre que le flux d'un champ de vecteurs nous renseigne sur l'orientation globale des vecteurs à travers une surface fermée. Pour des vecteurs dont la norme varie peu spatialement, si nous trouvons que le flux est positif, cela signifie qu'il y a globalement plus de vecteurs qui pointent vers l'extérieur de la surface que de vecteurs qui pointent vers l'intérieur de la surface.

Nous aimerions cependant avoir une idée du comportement des vecteurs localement, nous allons donc devoir construire une nouvelle quantité physique.

1.2 Divergence d'une fonction vectorielle

1.2.1 Définition formelle

Nous avons calculé précédemment le flux d'un champ de vecteur à travers une surface quelconque. Nous avons vu dans l'exemple de la surface sphérique, que le signe de la valeur du flux nous renseigne sur l'orientation des vecteurs sur la sphère considérée.

Le problème est que la valeur du flux obtenu dépend de la surface choisie pour calculer le flux du champ de vecteur. Nous voulons maintenant avoir une quantité locale qui nous renseigne localement sur l'orientation du champ de vecteur autour d'un point et dont la valeur dépend uniquement du champ de vecteurs. De la même manière que la masse volumique est une quantité définie en chaque point tandis que la masse est une quantité globale, nous allons calculer une densité volumique de flux d'un champ de vecteurs. Cette quantité s'appelle la divergence d'un champ de vecteurs.

La quantité $\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ est finie. C'est un scalaire dont la valeur dépend du point où est calculé l'intégrale et qui représente la densité volumique de flux du champ de vecteurs \vec{A} . C'est la divergence du champ de vecteurs \vec{A} au point où est calculée l'intégrale.

On note **div** l'opérateur mathématique divergence qui est donc donné par :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}_{ext} \quad (1.3)$$

Notons que cette définition montre que **la divergence d'un champ de vecteur est indépendante du système de coordonnées.**

☞ Le cas de figure où la surface fermée considérée est une sphère est particulièrement intéressant. La valeur du flux est négative si le champ de vecteur est orienté vers l'intérieur de la sphère, positive si le champ de vecteur est orienté vers l'extérieur et nulle si le champ de vecteurs "tourbillonne" autour du centre de la sphère ou si autant de vecteurs "rentrent" et "sortent" de la sphère. Nous verrons que la circulation d'un champ de vecteurs et l'opérateur associé permet de faire la distinction entre les deux derniers cas de figures.

Point notation ! Attention, la notation $\operatorname{div} \vec{A}$ pourrait laisser croire que cette quantité est une quantité vectorielle alors que la divergence d'un champ de vecteurs est une quantité scalaire. L'opérateur mathématique div appliqué à un champ de vecteurs retourne un scalaire, ce qui est indiqué par l'absence de flèche sur le symbole de l'opérateur divergence.

☞ Cette notion est importante, les équations de la physique décrivent la nature et ne doivent donc pas dépendre d'un système de coordonnées particulier choisi par un observateur.

1.2.2 Expression de la divergence dans différents systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes

Nous allons établir l'expression de l'opérateur divergence dans un système de coordonnées cartésiennes. Dans ce système de coordonnées, il est naturel de considérer un petit cube de volume V . La figure 1.3 montre un tel cube. Nous allons établir l'expression de la quantité $\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint \vec{A} \cdot d\vec{S}$ où $V = \delta x \delta y \delta z$ est le volume du cube. Puisque nous devons prendre la limite quand le volume du cube tend vers zéro, nous considérons dès le début un petit cube avec $\delta x \ll 1$, $\delta y \ll 1$ et $\delta z \ll 1$. Nous calculons dans un premier temps $\oiint \vec{A} \cdot d\vec{S}$:

$$\begin{aligned} \oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6 \\ &= -A_x(x, y, z) \delta y \delta z + A_x(x + \delta x, y, z) \delta y \delta z \\ &\quad - A_y(x, y, z) \delta x \delta z + A_y(x, y + \delta y, z) \delta x \delta z \\ &\quad - A_z(x, y, z) \delta x \delta y + A_z(x, y, z + \delta z) \delta x \delta y \end{aligned}$$

Étant donné que $\delta x \ll 1$, $\delta y \ll 1$ et $\delta z \ll 1$, nous pouvons faire un développement de Taylor à l'ordre 1 en δx , δy et δz de l'expression précédente pour obtenir :

$$\oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z$$

d'où :

$$\frac{1}{V} \oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Nous devons ensuite faire tendre le volume du cube vers zéro pour obtenir l'expression de la divergence du champ de vecteur. Nous obtenons finalement :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

L'expression précédente a une structure qui laisse penser à un produit scalaire. Nous introduisons donc le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ qui s'appelle **le vecteur nabla et est noté $\vec{\nabla}$** .

- La divergence d'un champ de vecteurs dans un système de coordonnées cartésiennes s'écrit donc :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (1.4)$$

Exemple

Soit $\vec{A} = \alpha \vec{r}$. Nous avons $A_x = \alpha x$, $A_y = \alpha y$ et $A_z = \alpha z$. L'expression 1.4 de la divergence implique que $\operatorname{div} \vec{A} = 3\alpha$.

Coordonnées cylindriques

Le calcul est plus complexe dans les autres systèmes de coordonnées. Nous allons établir l'expression de l'opérateur divergence dans un système de

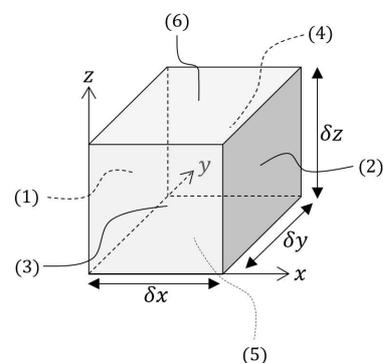


FIGURE 1.3: Volume élémentaire dans un système de coordonnées cartésiennes.

coordonnées cylindriques. Dans ce système de coordonnées, il est naturel de subdiviser un volume en petit camembert de volume V avec $\delta r \ll 1$, $\delta \theta \ll 1$ et $\delta z \ll 1$. La figure 1.4 montre un tel camembert. En se rappelant que la surface d'un secteur de disque de rayon r et d'angle θ vaut $\frac{1}{2}r^2\theta$, la surface hachurée du camembert a pour expression $\frac{1}{2}(r + \delta r)^2\delta\theta - \frac{1}{2}r^2\delta\theta = r\delta\theta\delta r$ à l'ordre 1. Nous allons établir l'expression de la quantité $\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint \vec{A} \cdot d\vec{S}$ où $V = r\delta\theta\delta r\delta z$ est le volume du petit camembert. Nous calculons dans un premier temps $\oiint \vec{A} \cdot d\vec{S}$:

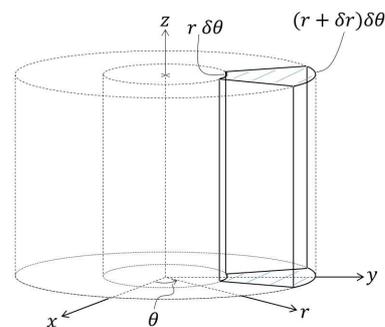


FIGURE 1.4: Volume élémentaire dans un systèmes de coordonnées cylindriques.

$$\begin{aligned} \oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} &= -A_r(r, \theta, z)r\delta\theta\delta z + A_r(r + \delta r, \theta, z)(r + \delta r)\delta\theta\delta z \\ &\quad - A_\theta(r, \theta, z)\delta r\delta z + A_\theta(r, \theta + \delta\theta, z)\delta r\delta z \\ &\quad - A_z(r, \theta, z)r\delta\theta\delta r + A_z(r, \theta, z + \delta z)r\delta\theta\delta r \end{aligned}$$

Étant donné que $\delta r \ll 1$, $\delta\theta \ll 1$ et $\delta z \ll 1$, nous pouvons faire un développement de Taylor à l'ordre 1 en δr , $\delta\theta$ et δz de l'expression précédente pour obtenir :

$$\begin{aligned} \oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} &= A_r\delta r\delta\theta\delta z + \frac{\partial A_r}{\partial r}r\delta r\delta\theta\delta z + \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\delta r\delta\theta\delta z + \frac{\partial A_z}{\partial z}r\delta r\delta\theta\delta z \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r}r\delta r\delta\theta\delta z + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}r\delta r\delta\theta\delta z + \frac{\partial A_z}{\partial z}r\delta r\delta\theta\delta z \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{1}{V} \oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Nous obtenons finalement, en coordonnées cylindriques :

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- La divergence d'un champ de vecteurs dans un système de coordonnées cylindriques s'écrit donc :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.5}$$

Point notation ! Notons que nous ne pouvons pas écrire sous la forme d'un produit scalaire la divergence dans un système de coordonnées cylindriques.

Coordonnées sphériques

- Le calcul de l'expression de la divergence dans le système de coordonnées sphériques se fait sur le même principe. Nous trouvons le résultat suivant :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \tag{1.6}$$

Point notation ! Notons que nous ne pouvons pas écrire sous la forme d'un produit scalaire la divergence dans un système de coordonnées sphériques.

Exemple

Soit $\vec{A} = \alpha \vec{r}$. L'expression 1.6 de la divergence montre que $\text{div } \vec{A} = 3\alpha$. La valeur de la divergence ne dépend pas du système de coordonnées choisies, nous retrouvons donc la valeur calculée dans le système de coordonnées cartésiennes.

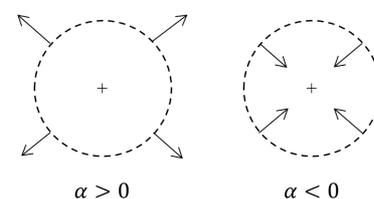


FIGURE 1.5: Interprétation de la divergence.

1.2.3 Interprétation physique de la divergence

Le nom de l'opérateur divergence n'a pas été choisi par hasard. Nous allons voir que la valeur de la divergence d'un champ de vecteur en un point nous renseigne sur le caractère convergent ou divergent des vecteurs autour de ce point. Soit $\vec{A} = \alpha \vec{r}$. En utilisant l'expression 1.6 de la divergence en coordonnées sphériques, nous trouvons l'expression de la divergence de ce champ de vecteur : $div \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\alpha r^3)}{\partial r} = 3\alpha$. La définition 1.3 de la divergence nous montre comment interpréter correctement le calcul de la divergence. Il faut prendre une surface qui entoure le point où la divergence est calculée et calculer le flux du champ de vecteur à travers cette surface. La figure 1.5 montre la direction des vecteurs en fonction du signe de α . Nous constatons comme attendu que **le signe de la divergence est lié au caractère convergent ou divergent des lignes de champ**. Une valeur positive de la divergence en un point implique que les vecteurs ont tendance à fuir ce point. La figure 1.6 montre un autre cas important où la divergence d'un champ de vecteur est non nulle. L'amplitude du champ de vecteurs diminue au passage d'un point mais la direction des vecteurs reste fixe. Nous considérons la surface en pointillées qui entoure ce point. Le flux du champ de vecteur est nul à travers les surfaces (2) et (4). Le flux du champ de vecteur à travers la surface (3) est positif puisque la normale à la surface est orientée dans le sens des vecteurs. Le flux du champ de vecteur à travers la surface (1) est négatif mais sa valeur absolue est plus élevée que le flux du champ de vecteur à travers la surface (3). Ainsi, la divergence du champ de vecteur au centre de cette surface est négative.

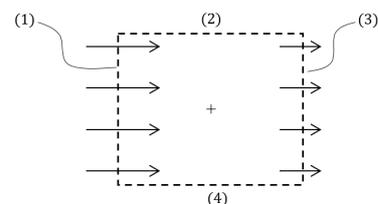


FIGURE 1.6: La divergence de ce champ de vecteur est négative au centre.

1.3 Le théorème d'Ostrogradski

Nous allons montrer que nous pouvons **relier le flux de \vec{A} à travers une surface fermée à l'intégrale volumique de la divergence du champ de vecteur \vec{A} dans le volume délimité par la surface** en question.

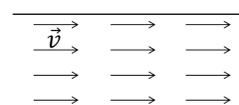
Commençons par montrer un résultat qui va nous être utile dans la suite. Remarquons à l'aide de la figure 1.7 que $\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_1} \vec{A} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{A} \cdot d\vec{S}$ étant donné que le flux à travers la surface commune s'annule.

Nous pouvons mettre à profit ce résultat pour calculer le flux à travers une surface fermée Σ quelconque. Nous subdivisons le volume V délimité par la surface fermée Σ en petits volumes V_i . Le flux à travers la surface fermée Σ est alors égale à la somme du flux à travers chaque surface S_i d'après notre résultat précédent (figure 1.8). Notons que pour retrouver exactement la surface Σ , nous devons faire tendre vers zero chaque petit volume V_i .

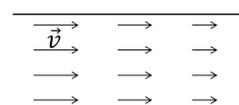
En utilisant ce résultat, la figure 1.8 nous montre ainsi que :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \lim_{V_i \rightarrow 0} \sum_i \iint_{S_i} \vec{A} \cdot d\vec{S} \\ &= \lim_{V_i \rightarrow 0} \sum_i V_i \iint_{S_i} \frac{1}{V_i} \vec{A} \cdot d\vec{S}_i \\ &= \lim_{V_i \rightarrow 0} \sum_i V_i \iint_{S_i} \frac{1}{V_i} \vec{A} \cdot d\vec{S}_i \\ &= \lim_{V_i \rightarrow 0} \sum_i V_i div \vec{A} \\ &= \iiint_V div \vec{A} \, d\tau \end{aligned}$$

La divergence est un opérateur qui intervient en mécanique des fluides. La figure (a) suivante montre le champ de vitesse de l'écoulement d'un fluide incompressible dans une conduite. Pour un fluide incompressible, la norme du vecteur est nécessairement constante si la section du tube ne change pas. En utilisant ce que nous avons appris sur l'interprétation géométrique de la divergence, nous pouvons conclure que $div \vec{v} = 0$ pour un écoulement incompressible. La figure (b) montre par contre le champ de vitesse d'un écoulement compressible. Pour un fluide compressible, nous pouvons en effet avoir une diminution de la norme du vecteur vitesse d'une particule fluide sans que la section du tube ne change. Dans ce cas, nous avons $div \vec{v} \neq 0$.



(a)



(b)

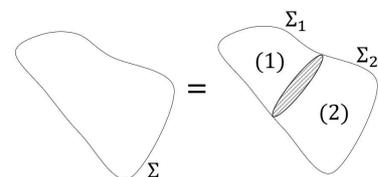


FIGURE 1.7: Volume subdivisé en deux volumes.

- Nous obtenons donc **le théorème d'Ostrogradski** :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \, d\tau \quad (1.7)$$

où $\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S}_{ext}$ représente le flux de \vec{A} à travers la surface Σ avec \hat{n} orienté vers l'extérieur. L'indice *ext* indique que le vecteur $d\vec{S} = dS\hat{n}$ doit impérativement être orienté vers l'extérieur pour appliquer le théorème d'Ostrogradski.

- Ce théorème s'énonce ainsi : **l'intégrale volumique de la divergence d'un champ de vecteur est égale au flux du champ de vecteur à travers la surface délimitant le volume.**

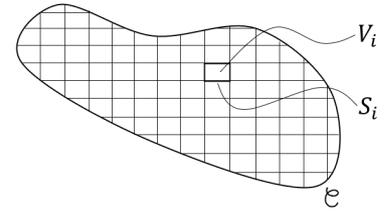


FIGURE 1.8: Volume V subdivisé en petit volume V_i .

1.4 Circulation d'un champ de vecteur

1.4.1 Abscisse curviligne

Avant de parler de circulation d'un champ de vecteur, nous devons introduire une variable qui permet de repérer la position d'un point le long d'une trajectoire. Nous notons l cette variable qui se nomme l'abscisse curviligne. Nous pouvons ainsi construire un vecteur $d\vec{l}$ qui représente **un déplacement infinitésimal** dans une direction tangente à la trajectoire.

1.4.2 Intégrale curviligne et circulation d'un champ de vecteurs

Nous définissons **la circulation** \mathcal{C} d'un champ de vecteur \vec{A} le long d'un chemin quelconque par :

$$\mathcal{C} = \int \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (1.8)$$

L'expression explicite du produit scalaire dépend du système de coordonnées choisies. Dans un système de coordonnées cartésiennes, la circulation de \vec{A} s'écrit par exemple $\mathcal{C} = \int (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$.

Si la circulation du champ de vecteurs entre un point A et un point B ne dépend pas du chemin suivi, alors la valeur de la circulation dépend uniquement des points A et B . Nous pouvons alors poser $\int \vec{A} \cdot d\vec{l} = f(B) - f(A)$ où f est une fonction. Nous pouvons également noter que la circulation le long d'un contour fermé ($A = B$) est donc nulle lorsque la circulation ne dépend pas du chemin suivi. Pour ce qui est du vocabulaire, nous disons que le champ de vecteurs est à **circulation conservative (ou irrotationnel) si la circulation du champ de vecteurs ne dépend pas du chemin suivi.**

Cette notion est importante car nous avons vu que nous pouvons relier un champ de vecteurs à circulation conservative à une fonction scalaire. Par exemple, le champ électrostatique est un champ à circulation conservative et dérive de la fonction scalaire potentiel électrique.

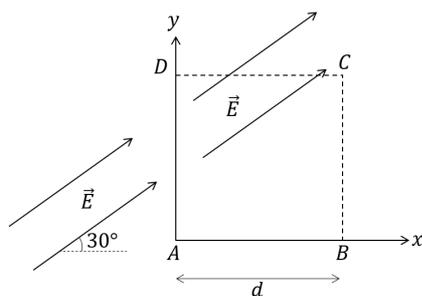
Exemple

Voyons un exemple de fonctionnement de l'intégrale curviligne d'un champ de vecteur. Nous allons calculer la circulation du champ \vec{E} constant de la figure suivante entre A et B puis entre B et C puis le long du contour $ABCD$.

☞ La quantité de carburant dans le réservoir d'une voiture est un exemple de variable qui permet de repérer la position de la voiture le long de sa trajectoire.

☞ En mécanique, nous utilisons davantage la notation $d\vec{OM}$ où \vec{OM} est le vecteur position

☞ Voici comment se fait le calcul, il faut imaginer un opérateur se déplacer le long d'un chemin \mathcal{C} . A chaque pas, l'opérateur fait le produit scalaire entre le vecteur qu'il mesure et le vecteur déplacement le long de la courbe. Il fait la somme au fur et à mesure de son déplacement pour obtenir la circulation du champ de vecteur le long d'un chemin donné.



Nous considérons un opérateur qui se déplace de A à B le long de l'axe Ox . A chaque pas, l'opérateur fait le produit scalaire entre le vecteur qu'il mesure et le vecteur déplacement le long de la courbe. La circulation entre A et B a donc pour expression $\mathcal{C}_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed \cos(30^\circ)$. De même, la circulation entre B et C a pour expression $\mathcal{C}_{BC} = \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed \cos(60^\circ)$. La circulation le long du contour $ABCD$ vaut $\Gamma = Ed \cos(30^\circ) + Ed \cos(60^\circ) - Ed \cos(30^\circ) - Ed \cos(60^\circ) = 0$.

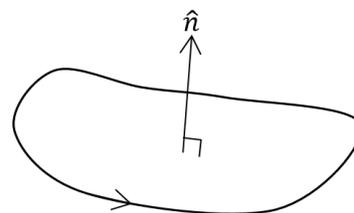
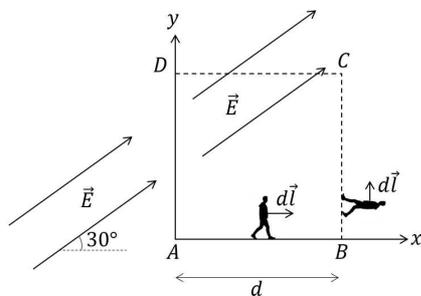


FIGURE 1.9: Orientation de la normale à la surface définie à partir de l'orientation du vecteur $d\vec{l}$.

- Nous allons nommer Γ dans la suite la circulation d'un champ de vecteur le long d'un contour fermé.

$$\Gamma = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (1.9)$$

- Le sens de circulation le long de la trajectoire définit alors la normale à la surface ainsi délimitée par **la règle de la main droite** (figure 1.9).

Exemple

Soit le champ de vecteurs d'expression $\vec{A} = \alpha r \hat{u}_\theta$ dans un système de coordonnées cylindriques. La circulation de \vec{A} le long d'un cercle de rayon R dont la normale est orientée suivant \hat{u}_z a pour expression $\Gamma = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint \alpha R dl = \alpha 2\pi R^2$. Dans le cas d'un champ de vecteurs d'expression $\vec{A} = \alpha r \hat{u}_r$, nous obtenons $\Gamma = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$. Notons au passage l'apparition de la surface du disque dans le calcul de la circulation.

☞ L'exemple de la circulation d'un champ de vecteurs le long d'un cercle nous permet de donner une vision géométrique à la circulation d'un champ de vecteur. Si le champ de vecteur est convergent ou divergent vers le centre du cercle, la circulation est nécessairement nulle puisque les vecteurs sont en tout point perpendiculaire à la tangente à la trajectoire. Par contre, si le champ de vecteurs "tourbillonne" autour du centre, alors la circulation de ce champ de vecteur est non nulle. Le signe de la circulation indique dans quel sens "tournent" les vecteurs par rapport à la normale en utilisant la règle de la main droite.

1.5 Rotationnel d'un champ de vecteur

1.5.1 Définition formelle

Nous avons vu que le signe de la valeur de circulation nous renseigne sur l'orientation des vecteurs le long de la trajectoire.

Nous voulons maintenant avoir une quantité locale qui nous renseigne localement sur l'orientation du champ de vecteur autour d'un point. Nous allons calculer une densité surfacique de circulation d'un champ de vecteurs. Cette quantité s'appelle le rotationnel d'un champ de vecteurs.

Nous considérons ainsi la circulation le long d'un contour \mathcal{C} qui délimite une surface S . La quantité $\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l}$ est finie et représente la densité surfacique de circulation du champ de vecteurs \vec{A} . C'est le rotationnel du champ de vecteurs \vec{A} . Attention, contrairement à la divergence, nous devons prendre une précaution en faisant tendre la surface vers zéro, nous ne devons pas changer l'orientation de la normale à la surface qui est définie par le sens de circulation (1.10). La quantité $\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l}$ a une limite non nulle. C'est un scalaire dont la valeur dépend de l'orientation de la surface et du point où est calculé l'intégrale. Nous notons cette quantité $\text{rot } \vec{A} \cdot \hat{n}$ où \hat{n} est la normale à la surface S . Notons que le rotationnel d'un champ de vecteur est indépendant du système de coordonnées. **Puisque la valeur calculé dépend de l'orientation du vecteur normal à la surface, le rotationnel d'un champ de vecteur produit un autre champ de vecteur.**

1.5.2 Expression du rotationnel dans différents systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes

Nous allons établir l'expression de l'opérateur rotationnel dans un système de coordonnées cartésiennes. Dans ce système de coordonnées, il est naturel de considérer un petit rectangle de coté $\delta x \ll 1$ et $\delta y \ll 1$ comme contour.

La circulation de \vec{A} le long du contour de la figure 1.11 donne l'expression de la composante z de $\text{rot } \vec{A}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ &= A_y(x + \delta x, y, z)\delta y - A_x(x, y + \delta y, z)\delta x \\ &\quad - A_y(x, y, z)\delta y + A_x(x, y, z)\delta x \end{aligned}$$

Étant donné que $\delta x \ll 1$ et $\delta y \ll 1$, nous pouvons faire un développement de Taylor à l'ordre 1 en δx et δy de l'expression précédente pour obtenir :

$$\Gamma = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \delta x \delta y$$

La composante du rotationnel suivant Oz a donc pour expression :

$$\text{rot } \vec{A}|_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

• De la même manière, nous pouvons obtenir les autres composantes du

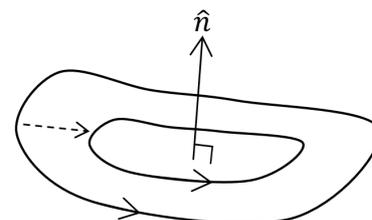


FIGURE 1.10: L'orientation de la normale à la surface ne doit pas changer lors de la contraction du contour.

Notons que par construction, l'orientation du vecteur produit par l'opérateur rotationnel dépend de la règle de la main droite comme convention, le rotationnel d'un vrai vecteur produit donc un pseudo-vecteur. Si les vecteurs tournent suivent les indexes de la main droite alors $\text{rot } \vec{A}$ est orienté suivant le pouce de la main droite.

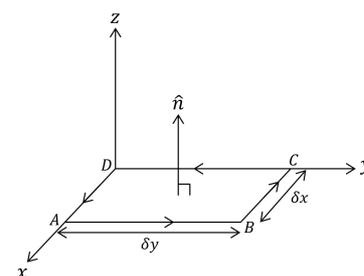


FIGURE 1.11: Contour élémentaire naturel dans un système de coordonnées cartésiennes.

rotationnel en coordonnées cartésiennes qui a donc pour expression :

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (1.10)$$

Coordonnées cylindriques

- Le calcul du rotationnel d'un champ de vecteur dans un système de coordonnées cylindriques est plus long et nous donnons directement le résultat :

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Exemple

On considère un champ de vecteurs \vec{A} défini en coordonnées cylindriques par $\vec{A} = \alpha r^n \hat{u}_\theta$ où α est une constante et n un entier positif supérieur ou égal à 1. Le rotationnel de ce champ de vecteurs a pour expression $\text{rot } \vec{A} = \alpha(n+1)r^{n-1}\hat{u}_z$.

Coordonnées sphériques

- Le calcul du rotationnel d'un champ de vecteur dans un système de coordonnées sphériques est plus long et nous donnons directement le résultat :

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

1.6 Signification physique du rotationnel

Le nom de l'opérateur rotationnel n'a pas été choisi par hasard. La valeur du rotationnel d'un champ de vecteurs en un point indique si les vecteurs "tournent" autour du point en question. Supposons un champ de vecteur \vec{A} tel que $\text{rot } \vec{A} \neq 0$ en un point M . Le champ de vecteur autour du point M a alors qualitativement la forme montrée sur la figure 1.12.

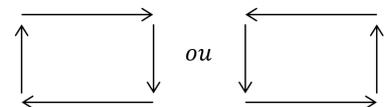


FIGURE 1.12: Orientation des vecteurs autour d'un point où le rotationnel a une valeur non nul.

1.7 Théorème de Stokes

Nous allons dans cette section relier l'intégrale surfacique du rotationnel du champ de vecteur à la circulation du champ de vecteur sur un contour entourant la surface. Pour démontrer ce théorème, remarquons déjà à l'aide de la figure 1.13 que $\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{A} \cdot d\vec{l}$ puisque la circulation sur les parties communes aux deux contours s'annule. Suivant ce résultat, nous subdivisons la surface quelconque \vec{S} délimitée par le contour \mathcal{C} de la

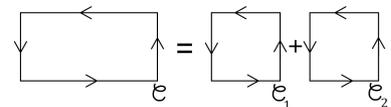


FIGURE 1.13: Les circulations du champ de vecteur le long de la partie commune se compensent.

figure 1.14 en surface \vec{S}_i et nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \lim_{S_i \rightarrow 0} \sum_i \oint_{\mathcal{C}_i} \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ &= \lim_{S_i \rightarrow 0} \sum_i S_i \oint_{\mathcal{C}_i} \frac{1}{S_i} \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ &= \lim_{S_i \rightarrow 0} \sum_i S_i (\text{rot } \vec{A}) \cdot \hat{n} \\ &= \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

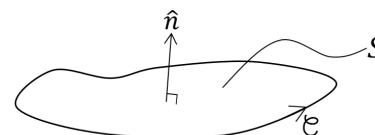


FIGURE 1.15: Notations utilisées dans le théorème de Stokes.

- Nous obtenons donc **le théorème de Stokes** (figure 1.15) :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (1.13)$$

Exemple

On considère un champ de vecteur \vec{A} défini en coordonnées cylindriques par $\vec{A} = \alpha r^n \hat{u}_\theta$ où α est une constante et n un entier positif supérieur ou égal à 1. La circulation de \vec{A} sur un cercle de rayon R et de normale Oz est donnée, en utilisant le théorème de Stokes, par $\iint \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = 2\pi\alpha R^{n+1}$.

Le théorème de Stokes montre qu'un champ de vecteurs conservatifs est irrotationnel.

1.8 Interprétation "visuelle" du rotationnel et de la divergence

Nous allons revenir sur l'interprétation physique de la divergence et du rotationnel d'un champ de vecteurs car il est important d'avoir cette notion en tête pour saisir toute la signification physique des équations que nous allons écrire par la suite. La figure 1.16 montre quatre champs de vecteurs. Le champ de vecteurs (a) est un champ de vecteurs non rotationnel et à divergence nulle. Le champ de vecteurs (c) est clairement un champ de vecteurs à divergence positive mais à rotationnel nul. Le champ de vecteurs (d) est quand à lui à divergence nulle mais à rotationnel négatif en utilisant la règle de la main droite. Pour finir, le champ de vecteurs (b) est à divergence nulle mais à rotationnel non nul. Pour le montrer, il suffit de prendre un contour carré autour d'un point quelconque et de calculer la circulation le long de ce contour.

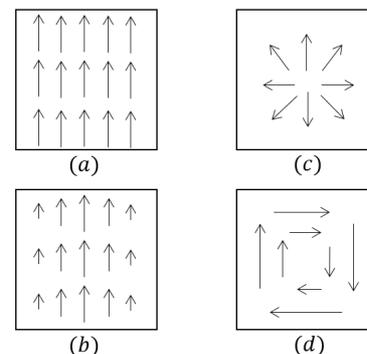


FIGURE 1.16: Exemples de champ de vecteurs.

1.9 Le gradient

1.9.1 Définition formelle

Nous pouvons déjà montrer qu'il est possible de définir un vecteur à partir de la pente d'une courbe à une dimension. Considérons le graphe de la figure 1.17. Nous pouvons construire un vecteur en tout point de la courbe en prenant la valeur de la pente de la courbe comme la composante d'un vecteur suivant \hat{u}_x . Les vecteurs tracés sur le graphe montrent quelques-uns

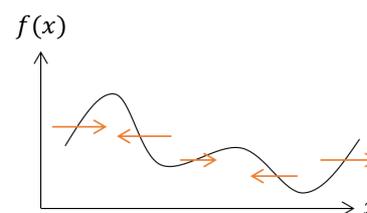


FIGURE 1.17: Orientation du champ de vecteurs produit par l'opérateur gradient à 1D.

de ces vecteurs qui sont donc donnés par $\frac{\partial f}{\partial x} \hat{u}_x$. Nous pouvons constater que ces vecteurs pointent vers la plus haute valeur de la fonction au voisinage du point considéré.

Avant de définir de manière calculatoire le gradient dans les différents systèmes de coordonnées, nous allons généraliser à trois dimensions notre résultat précédent et donner une définition **intrinsèque** du gradient d'une fonction. Soit $d\vec{OM}$ un vecteur déplacement entre deux points infiniment proches de l'espace.

- La différence de valeur d'une fonction scalaire entre ces points s'écrit :

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{OM} \tag{1.14}$$

où $\vec{\nabla} f$ est le gradient de la fonction f également noté $\overrightarrow{grad} f$. C'est un vecteur qui pointe vers la valeur voisine la plus élevée de f en chaque point.

- C'est cette équation qui nous permet de définir l'**opérateur gradient de manière intrinsèque**. Remarquons bien que df et $d\vec{OM}$ ne dépendent pas du système de coordonnées. La valeur de $\vec{\nabla} f$ ne dépend donc pas du système de coordonnées.

Remarquons que si les deux points rejoints par le vecteur déplacement se trouvent sur une surface où $f = cst$ alors $\vec{\nabla} f \cdot d\vec{OM} = 0$. Autrement dit, **le vecteur $\vec{\nabla} f$ est orthogonal aux surfaces d'équation $f = cst$.**

La définition du gradient montre également que si un champ de vecteurs \vec{A} dérive d'un gradient alors nous pouvons écrire $df = \vec{A} \cdot d\vec{OM}$. Puisque $\oint df = 0$ nous en déduisons que $\oint \vec{A} \cdot d\vec{OM} = 0$ si le champ de vecteurs \vec{A} dérive d'un gradient. Autrement dit, un champ de vecteurs qui dérive du gradient d'une fonction est nécessairement un champ de vecteurs à circulation conservative (ou irrotationnel).

1.9.2 Expression du gradient dans différents systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes

- Dans un système de coordonnées cartésiennes, le vecteur déplacement a pour expression $d\vec{OM} = dx\hat{u}_x + dy\hat{u}_y + dz\hat{u}_z$. Nous trouvons ainsi :

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Coordonnées cylindriques

☞ Pour bien comprendre l'opérateur gradient, nous allons considérer la situation suivante. Supposons que vous êtes dans un paysage de collines et que vous vouliez construire un vecteur à partir de la fonction qui donne l'altitude des points autour de vous. Cette fonction est une fonction scalaire qui a comme argument les coordonnées (x, y) par exemple. En réfléchissant, il n'y a pas beaucoup de possibilités pour construire un tel vecteur. Vous pouvez tracer une flèche entre le point où vous êtes et le point d'altitude la plus élevée autour de vous. C'est précisément ce que fait l'opérateur gradient, il permet d'associer un champ de vecteurs à une fonction scalaire en créant un vecteur en tout point tel que ce vecteur pointe vers la valeur de la fonction la plus élevée au voisinage de ce point. Nous allons montrer que l'opérateur gradient est défini à partir des dérivées partielles. Cela n'a rien de surprenant, nous savons déjà que la pente d'une fonction est donnée par la valeur de sa dérivée.

- Dans un système de coordonnées cylindriques, les variables naturelles de la fonction f sont (r, ϕ, z) . Nous avons donc $df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial z} dz$. En coordonnées cylindriques, le vecteur déplacement a pour expression $d\vec{OM} = dr\hat{u}_r + r d\phi\hat{u}_\phi + dz\hat{u}_z$. Nous en déduisons l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} f = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right) \quad (1.16)$$

Coordonnées sphériques

- Dans un système de coordonnées sphériques, les variables naturelles de la fonction f sont (r, θ, ϕ) . Nous avons donc $df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi$. En coordonnées sphériques, le vecteur déplacement a pour expression $d\vec{OM} = dr\hat{u}_r + r d\theta\hat{u}_\theta + r \sin \theta d\phi\hat{u}_\phi$. Nous en déduisons l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} f = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{array} \right) \quad (1.17)$$

Le saviez-vous ? Le gradient de la fonction qui donne l'altitude en fonction du point considéré se visualise sur une carte de randonnée grâce aux lignes de niveaux. Le gradient est alors un vecteur perpendiculaire à la ligne de niveau qui pointe vers la plus forte pente. La valeur du gradient est indiqué par l'écart entre les lignes de niveaux. Plus les lignes de niveaux sont resserrées, plus la valeur du gradient est élevée et plus la pente est raide. Dans un autre registre, la lecture des lignes isobares d'une carte synoptique de la météo donne une information sur la vitesse du vent. A l'équilibre géostrophique, le vent suit les lignes isobares et l'intensité de la vitesse est liée à la valeur du gradient du champ de pression. Ainsi, plus les lignes isobares sont resserrées, plus la valeur du gradient est élevée et plus la vitesse du vent est élevée.

1.10 Le laplacien scalaire

1.10.1 Définition

- Nous introduisons l'**opérateur Laplacien scalaire** Δ qui est donné par :

$$\text{div } \vec{\nabla} f = \Delta f \quad (1.18)$$

- Cette équation permet de définir l'**opérateur Laplacien scalaire de manière intrinsèque**.

1.10.2 Expression du laplacien dans différents systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes

- En coordonnées cartésiennes, nous obtenons $\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$ soit :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.19)$$

Exemple

Soit $V = 4xy^2z^3$, nous avons $\Delta V = 8xz^3 + 24xy^2a$.

L'expression du laplacien scalaire dans les autres systèmes de coordonnées est beaucoup plus lourde mais ne présente pas de difficultés à obtenir, il faut utiliser l'expression de la divergence et du gradient dans le bon système de coordonnées.

Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, la divergence d'un champ de vecteurs a pour expression $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$. Si nous posons :

$$\vec{A} = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

- Le laplacien scalaire a donc pour expression, dans un système de coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.20)$$

Coordonnées sphériques

- Dans un système de coordonnées sphériques, nous obtenons :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (1.21)$$

1.10.3 Interprétation physique du Laplacien scalaire

Il est possible de montrer que **la quantité Δf est une mesure de la différence entre la valeur de f en un point quelconque M et la valeur moyenne f au voisinage du point M .** Autrement dit, la valeur du Laplacien d'une fonction scalaire en un point nous renseigne sur la courbure moyenne de la fonction en un point.

1.11 Le laplacien vectoriel

Le **laplacien vectoriel s'écrit $\Delta \vec{A}$** . Le calcul du laplacien vectoriel dans un système de coordonnées cartésiennes ne présente pas de difficultés. en effet, **la direction des vecteurs unitaires dans un système de coordonnées cartésiennes reste fixe**. Nous obtenons ainsi :

$$\Delta \vec{A} = (\Delta A_x) \hat{u}_x + (\Delta A_y) \hat{u}_y + (\Delta A_z) \hat{u}_z$$

soit :

$$\Delta \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \text{ dans un système de coordonnées cartésien.}$$

(1.22)

Le calcul de l'expression du laplacien vectoriel dans les autres systèmes de coordonnées est plus complexe que pour le laplacien scalaire. En effet, **dans les autres systèmes de coordonnées, les vecteurs unitaires**

changent de direction lors de la variation des coordonnées permettant de repérer un point.

Il est donc plus simple d'utiliser une autre approche pour déterminer l'expression du laplacien vectoriel.

Nous avons insisté sur le fait que la définition de la divergence et du rotationnel ne font pas appel à un système de coordonnées particulier. Ainsi, si nous trouvons une relation valide dans un système de coordonnées données, cette relation est valide en toute généralité. Nous pouvons utiliser le système de coordonnées cartésiennes pour établir quelques relations. Nous pouvons entre autre vérifier l'égalité suivante :

$$\vec{rot} \vec{rot} \vec{A} = \vec{\nabla}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} \tag{1.23}$$

Cette dernière relation permet de calculer le laplacien vectoriel.

Exemple

La relation précédente permet de montrer que la composante suivant r du laplacien vectoriel du champ $\vec{A} = A(r, z)\hat{u}_r$ en coordonnées cylindriques a pour expression $(\Delta \vec{A})_r = \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{A_r}{r^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2}$.

1.12 Les relations à connaître

Nous allons dans la suite utiliser le système de coordonnées cartésiennes pour établir quelques relations entre les opérateurs. La définition des opérateurs ne faisant appel à aucun système de coordonnées, les relations trouvées sont intrinsèques et seront valides quelque soit le système de coordonnées.

Commençons par montrer la relation suivante :

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{rot} \vec{B} \tag{1.24}$$

Nous avons $\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$. Nous avons donc $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \partial_x(A_y B_z - A_z B_y) + \partial_y(A_z B_x - A_x B_z) + \partial_z(A_x B_y - A_y B_x)$ soit :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) &= B_x(\partial_y A_z - \partial_z A_y) + B_y(\partial_z A_x - \partial_x A_z) + B_z(\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ &\quad - A_x(\partial_y B_z - \partial_z B_y) - A_y(\partial_z B_x - \partial_x B_z) - A_z(\partial_x B_y - \partial_y B_x) \\ &= \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \end{aligned}$$

Nous pouvons montrer ainsi en utilisant la même méthode les relations suivantes :

$$\text{div} \vec{rot} \vec{A} = 0 \tag{1.25}$$

$$\vec{rot} \vec{\nabla} f = \vec{0} \tag{1.26}$$

Nous rappelons également la relation très importante :

$$\vec{rot} \vec{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} \tag{1.27}$$

Point notation ! La notation ∂_x est équivalente à $\frac{\partial}{\partial x}$.

Le saviez-vous ? La relation $\vec{rot} \vec{\nabla} f = \vec{0}$ se comprend aisément d'un point de vue physique. Nous avons dit que $\vec{\nabla} f$ produit un champ de vecteurs tel que les vecteurs pointent vers les valeurs voisines les plus élevées. Nous produisons ainsi un champ de vecteurs qui ne "tournent" pas autour d'un point mais pointent vers un point, son rotationnel est donc nul.

Nous aurons également besoin dans la suite du cours des relations :

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \wedge (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) + \vec{B} \wedge (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) \quad (1.28)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{A}) = f \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} + \vec{\nabla}f \wedge \vec{A} \quad (1.29)$$

Ces relations, qui peuvent se démontrer à l'aide d'un système de coordonnées cartésiennes, ne sont pas à connaître par cœur.