

Exercice 1

Des travaux sont menés pour étudier le temps d'absorption de deux molécules à visée thérapeutique. La première molécule est injectée aux patients de l'échantillon A, la deuxième aux patients de l'échantillon B. Les résultats sont résumés dans les tableaux suivants :

Échantillon	Âge des patient (ans)	Temps d'absorption (heures)
A	28	2.7
A	54	2.8
A	48	2.9
A	44	2.9
A	20	3.1
A	64	3.3
A	52	3.4
A	24	3.5
A	62	3.6
A	42	3.7
A	46	3.8
A	30	3.9

Échantillon	Âge des patients (ans)	Temps d'absorption (heures)
B	40	2.5
B	38	2.6
B	60	2.8
B	64	2.8
B	36	2.9
B	26	2.9
B	34	3.1
B	32	3.3
B	22	3.4
B	58	3.5
B	50	3.6
B	56	3.7

Tous les tests seront effectués au risque α de 5%.

Question 1

Que peut-on dire de la randomisation de l'étude par rapport à l'âge des patients ?

Correction avec rédaction complète : Comparaison de 2 moyennes expérimentales en séries indépendantes (petits échantillons) 10 pts

On cherche à connaître la qualité de la randomisation par rapport à l'âge des patients, autrement dit si l'âge des patients est bien réparti aléatoirement entre les 2 échantillons. Cela revient à comparer la distribution de l'âge des patients entre les 2 échantillons et donc de faire une comparaison de moyenne de l'âge des patients.

Notons μ_A (respectivement μ_B), la moyenne exacte de l'âge des patients de la population A (resp. B); m_A (resp. m_B), leur moyenne estimée d'après les mesures observées sur l'échantillon A (resp. B); σ_A (resp. σ_B), l'écart-type exact de l'âge des patients de la population A (resp. B) ; s_A (resp. s_B), leur écart-type estimé d'après les mesures observées sur l'échantillon A (resp. B).

$$m_A = 42,8 \text{ ans} ; s_A = 14,5 \text{ ans}$$

$m_B = 43,0$ ans ; $s_B = 14,1$ ans

On cherche donc à savoir si l'âge moyen des patients est le même dans la population A et dans la population B. Pour répondre à cette question, nous posons les hypothèses suivantes :

(2 pts)

H_0 : La randomisation est bonne, les 2 échantillons proviennent de la même population, $\mu_A = \mu_B$

H_1 : Les 2 échantillons ne proviennent pas de la même population, $\mu_A \neq \mu_B$ (le test est bilatéral)

Le risque α est de 5 %.

L'échantillon A contenant 12 individus (comme le B), nous traitons le cas d'une comparaison de deux moyennes expérimentales en séries indépendantes sur de petits échantillons.

(4 pts) Les conditions du test de Student sont alors :

- **Normalité des 2 séries de mesures (que nous supposons vérifiée)**
- **Égalité des variances que nous allons vérifier avec un test de Fisher**

Nouvelles hypothèses pour le test de Fisher :

H_0 : les 2 variances sont égales, $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1$

H_1 : les 2 variances sont différentes, $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \neq 1$

$$F_{obs} = \frac{s_A^2}{s_B^2} = \frac{211}{199} = 1,1$$

Notre statistique de Fisher F_{obs} est inférieure à la valeur seuil $F_{th} = 3,43$ lue sur la table de Fisher à 2,5% pour 11 degrés de libertés (ddl) au numérateur et 11 au dénominateur.

Donc non rejet de H_0 : nous considérons que les 2 variances sont égales.

Toutes les conditions sont réunies pour mener à bien un test de Student.

Puisque les 2 variances sont égales, nous pouvons calculer une variance commune : $s_{com}^2 = 205$ ans²

(2 pts) Nous calculons notre statistique de Student :

$$t_{obs} = \frac{m_A - m_B}{\sqrt{s_{com}^2 \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B} \right)}} = -0,03$$

(2pts) Notre statistique de Student, en valeur absolue, $|t_{obs}|$ est inférieure à la valeur seuil $t_{th} = 2,074$ lue sur la table de Student à 5% et 22 ddl.

Nous pouvons en conclure à un non rejet de H_0 : la randomisation concernant l'âge des patients est bonne.

Question 2

Le temps d'absorption dépend-il de la molécule injectée ?

Correction : Comparaison de 2 moyennes expérimentales en séries indépendantes (petits échantillons)
10 pts

(2 pts)

H_0 : Le temps d'absorption ne dépend pas de la molécule injectée, les 2 échantillons proviennent de la même population, $\mu_A = \mu_B$

H_1 : Les 2 échantillons ne proviennent pas de la même population, $\mu_A \neq \mu_B$ (le test est bilatéral)

Le risque α est de 5 %.

(4 pts) Les conditions du test de Student sont:

- Normalité des 2 séries de mesures (que nous supposons vérifiée)
- Égalité des variances que nous allons vérifier avec un test de Fisher

$$F_{obs} = \frac{s_A^2}{s_B^2} = \frac{0,17}{0,16} = 1,1$$

$F_{obs} < F_{th}(\text{Fisher}, 2, 5\%, 11ddl, 11ddl) = 3,43$

Donc non rejet de H_0 : les 2 variances sont égales.

$$(2 \text{ pts}) : t_{obs} = \frac{m_A - m_B}{\sqrt{s_{com}^2 \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B} \right)}} = 1,25$$

(2pts) $t_{obs} < t_{th}(\text{Student}, 5\%, 22 \text{ ddl}) = 2,074$

Nous pouvons en conclure à un non rejet de H_0 : le temps d'absorption ne dépend pas de la molécule injectée.

Question 3

Existe-t-il un lien entre l'âge des patients et le temps d'absorption de la première molécule ?

Correction : Test de corrélation 10 pts

(2 pts)

H_0 : Il n'existe pas de lien entre l'âge des patients et le temps d'absorption de la première molécule, $\rho = 0$

H_1 : Il existe un lien entre l'âge des patients et le temps d'absorption de la première molécule, $\rho \neq 0$ (le test est bilatéral)

Le risque α est de 5 %.

(2 pts) Les conditions du test de Student sont la binormalité de la série (âge, temps d'absorption) (que nous supposons vérifiée)

$$(4 \text{ pts}) : t_{obs} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2} = 0,09 \text{ avec } r = 0,03 \text{ et } n = 12$$

(2 pts) $t_{obs} < t_{th}(\text{Student}, 5\%, 10 \text{ ddl}) = 2,228$

Nous pouvons en conclure à un non rejet de H0 : il n'y pas de lien entre l'âge des patients et le temps d'absorption de la première molécule.

Question 4

Pour ces molécules, on considère que l'absorption est rapide si le temps d'absorption est strictement inférieur à 3 heures. Le caractère rapide de l'absorption dépend-telle de la molécule ?

Correction avec rédaction partielle : Test de Khi² 10 pts

(2 pts) : Tableau de contingence d'après les observations :

Observée	Abs. Rapide	Abs. Lente	Total
Molécule A	4	8	12
Molécule B	6	6	12
Total	10	14	24

(2 pts)

H0: Le caractère rapide de l'absorption ne dépend pas de la molécule

H1 : Le caractère rapide de l'absorption dépend de la molécule

Le risque α est de 5 %.

(2 pts) Les conditions du test de Khi² est que toutes les fréquences théoriques sont supérieures ou égales à 5, ce qui est bien le cas :

Théorique	Abs. Rapide	Abs. Lente	Total
Molécule A	5	7	12
Molécule B	5	7	12
Total	10	14	24

(2 pts) : $\chi_{obs}^2 = 0,69$

$\chi_{obs}^2 < \chi_{th}^2(khi^2, 5\%, 1 ddl) = 3,841$

(2 pts) Nous pouvons en conclure à un non rejet de H0 : Le caractère rapide de l'absorption ne dépend pas de la molécule