Tous les tests seront effectués au risque α de 5%.

Exercice 1

On veut vérifier que des machines sont réglées pour fabriquer des comprimés d'aspirine d'un poids de 500 mg. Pour cela on prélève de façon aléatoire deux échantillons de 12 comprimés sur deux machines différentes (ASP 1 et ASP 2).

ASP 1 (mg)	ASP 2 (mg)
505,04	496,82
478,43	490,94
468,84	476,58
495,25	466,39
503,34	504,44
491,54	475,35
492,46	485,15
498,26	493,41
506,90	483,15
500,94	469,15
523,35	494,55
489,29	480,46

Tableau 1. Mesures des poids des comprimés d'aspirine issus de la machine 1 (ASP 1) et 2 (ASP 2)

Question 1 : La machine ASP 1 produit-elle des comprimés d'aspirine au bon poids ?

Correction (10 points) : Comparaison d'une moyenne expérimentale avec une moyenne théorique

Les hypothèses (2 pts)

H0 : La masse moyenne des comprimés est égale à 500 mg

H1 : Elle est différente (test bilatéral).

Le test choisi et ses conditions d'application (2 pts)

Test de Student en supposant que les données suivent une loi normale.

Calcul de la statistique (2 pts)

$t_{obs} = |m - 500| \; / \; s(moyenne)$

$t_{obs} = 0,96$

Conclusions (2 pts)

t_{table} (Student, bilatéral, 5%, 11 ddl) = 2,201

$t_{obs} < t_{table}$ donc non rejet de H0 au risque 5%. La masse moyenne des comprimés n'est pas significativement différente de la masse attendue au risque α = 5 %.

Rédaction et soin apporté à la réponse (2 pts)

Question 2 : Les machines ASP 1 et ASP 2 produisent-elles des comprimés d'aspirine de poids comparables ?

Corrigé (15 pts) : Comparaison de 2 moyennes expérimentales

Les hypothèses (4 pts)
H0 : Oui, les 2 machines produisent des comprimés de poids comparables en moyenne
H1 : Non (test bilatéral)

Le test choisi et ses conditions d'application (4 pts)
On suppose les données distribuées normalement pour effectuer un test de Student.

Première étape : vérifier l'égalité des variances par un test de Fisher.
H0 : les variances des 2 échantillons sont égales
H1 : elles sont différentes.
s^2_1 = 196 mg²
s^2_2 = 136 mg²
ddl numérateur = 11
ddl dénominateur = 11

F = 1,44, non rejet de H0. Les 2 variances peuvent être considérées comme égales. On peut donc calculer une variance commune : s^2_c = 166 mg²

Calcul de la statistique et conclusion (5 pts)
D'où t_{obs} = 2,17 à comparer à t_{table} = 2,074 avec 22 ddl : Limite de Zone de rejet…

Difficile de conclure sur la comparaison entre les poids moyens entre les 2 machines avec cette seule expérience : pour gagner en précision, il faudrait recommencer avec plus de comprimés.

Rédaction et soin apporté à la réponse (2 pts)

Exercice 2

On voudrait comparer le pourcentage de personnes atteintes d'arythmie chez les plus de 80 ans en France à celui connu aux États-Unis pour être égal à 10%. Une enquête est menée en France au cours de laquelle des médecins interrogent 1 000 personnes selon un protocole permettant un tirage aléatoire. L'enquête conclut que 85 personnes sont atteintes.

Question 1 : Comparer le pourcentage de personnes atteintes d'arythmie chez les plus de 80 ans en France à celui connu aux États-Unis.

Corrigé (10 pts) : Comparaison d'un % expérimental à un % théorique (Test de conformité)

On compare un pourcentage observé (les personnes atteintes d'arythmie en France) à un pourcentage de référence (celui des Etats-Unis).

H0 : L'échantillon est issu d'une population normale de moyenne π_0 et d'écart-type $\sqrt{(\pi_0(1-\pi_0)/n)}$ avec n, taille de l'échantillon, soit $\pi = \pi_0$ = 10 %

H1 : $\pi \neq \pi_0$ (test bilatéral)

On vérifie que l'approximation par la loi normale est valide :
$n\pi_0 = 100$ et $n(1 - \pi_0) = 900$.

La statistique du test se calcule de la façon suivante :

$$Z_{obs} = \frac{p_{exp} - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1 - \pi_0)}{n}}}$$

Elle vaut 1.58 (en valeur absolue) à comparer à z_{table} (Normal, bilatéral, 5%) ≈ 1,96

$z_{obs} < z_{table}$ donc non rejet de H0 : le pourcentage de personnes atteintes d'arythmie chez les plus de 80 ans en France est le même que celui connu aux États-Unis.

Question 2 : Donner un intervalle de confiance à 95% du pourcentage observé.

Corrigé (5 pts) : Intervalle de confiance d'un % observé.

La formule à utiliser s'appuie toute entière sur le % observé :

Borne $_{inf}$ = $p_{exp} - 1{,}96\ s_{pexp}$ = 0,0677 ou 6,77 %
Borne $_{sup}$ = $p_{exp} + 1{,}96\ s_{pexp}$ = 0,1022 ou 10,22 %
Avec s_{pexp} = racine[p_{exp} (1 - p_{exp})/n] = 0,0088 ou 0,88 %

D'où l'Intervalle de confiance demandé à 95 % : [6,77 % ; 10,22 %]