Ex : ① Soit $a \in \mathbb{C}^*$ un élément d'ordre 4, il vérifie $a^4 = 1$; a est donc une racine quatrième de l'unité

$a \in \{ e^{\frac{2k\pi i}{4}} ; k \in \mathbb{Z} \} = \{ e^{\frac{2\pi i}{4}} ; e^{\frac{4\pi i}{4}}, e^{\frac{6\pi i}{4}}, e^{\frac{8\pi i}{4}} \}$

$= \{ i ; -1 ; -i , 1 \}$; 1 et -1 sont d'ordre 2

donc $a \in \{-i, i\}$.

On peut également retrouver ce résultat en factorisant :

$a^4 - 1 = (a^2-1)(a^2+1) = (a-1)(a+1)(a^2+1)$.

② voir cours.

Ex 2 ① $a = 2^3 \times 5^2 \times 7$, $b = 2 \times 5^3 \times 11$.

pour calculer le pgcd de (a,b) : on prend les facteurs premiers communs avec la plus petite puissance.

$pgcd(a,b) = 2 \times 5^2 = 50$.

pour calculer ppcm ; on prend tous les facteurs avec la plus grande puissance. ie en fait on enlève que la partie pgcd !

$ppcm(a,b) = 2^3 \times 5^3 \times 7 \times 11$.

② $2750 = 1 \times 1400 + 1350$

$1400 = 1350 \times 1 + 50$ pgcd(a,b)

$1350 = 50 \times 27 + 0$.

Ex 3 ① $4^{2n+2} - 1 = (4^2)^n \times 4^2 - 1$

$= 16^n \times 4^2 - 1$

$\equiv 1^n \times 1 - 1 \; [15]$

$\equiv 0 \; [15]$

② $v_{n+1} - v_n = 4^{2n+2+2} - 1\cancel{5}n - 15 - \cancel{16} - 4^{2n+2} + \cancel{15n} + \cancel{16}$

$= 4^{2n+2}\left[4^2 - 1\right] - 15$

$= 15 \times \left[4^{2n+2} - 1\right] = 15 \times u_n = 15 \times 15k, \; k \in \mathbb{Z}$

③ par récurrence : $n = 0, \; v_1 - v_0 = 4^4 - 15 - 16 \cancel{-16} \cancel{+16}$

$= (4^2)^2 - 15 - 16 = 16(16-1) - 15$

$= 15 \times 15$

supposons la propriété vraie pour un n donné quelconque

i.e. $225 \mid v_n$.

$v_{n+1} - v_n = 225k \Rightarrow v_{n+1} = v_n + 225k \equiv 0 \, [225]$

④ $v_n = 4^{2n+2} - 15n - 16$

$= 4^{2n} \times 16 - 15n - 16$

$= \cancel{16 [\;4}$

$= 16^n \times 16 - 15n - 16$

$= 16(16^n - 1) - 15n$

$16^n = (15+1)^n = 1 + 15 \times C_n^{n-1} + 15^2 C_n^{n-2} + \dots + 15^n C_n^n$

$= 1 + 15n + 15^2(\; \dots \;)$

$= 1 + 15n + 15^2(\quad) - 15$

$v_n = \cancel{16 \times 15 + 16 \times 15n + 15^2(\quad)} + 16 \times 15$

$= \cancel{15n[16-1] + 15^2 \times (\quad) +}$

12

$16^n = 1 + 15n + 15^2(\quad)$.

$v_n = 16\left[(1+15n+15^2(\quad))-1\right] - 15n$.

$= 16 \times 15n + 16 \times 15^2 \times (\quad) - 15n$

$= 16 \times 15n + 16 \times 15^2 \times (\quad)$.

$= 15n \times (16-1) + 16 \times 15^2 \times (\quad)$

$= 15 \times 15n + 16 \times 15^2 \times (\quad)$

$\equiv 0 \; [225]$.

Exercice 4 : 1) $5409 = 360 \times 15 + 9$

$360 = 9 \times 40 + 0$

2) On pose $a = 9k$; $b = 9k'$, avec (k, k') premiers entre eux : $ppcm(a,b) = 9kk'$.

si $p \mid 9kk'$, p divise l'un des facteurs ; il divise donc a ou divise b. On a :

$3 \mid 360 \Rightarrow 3 \mid a$ ou $3 \mid b$.

b) $3 \mid 360 \Rightarrow 3 \mid a$ ou $3 \mid b$. $9 \mid 5409 \Rightarrow$

si $3 \mid a \Rightarrow 9 \mid a^2$ et on se retrouve avec :

$9 \mid b^2$; $3 \mid b$ (corrollaire du

$3 \mid b^2$, 3 étant premier, th de Gauss.

3) $c = 3k$; $d = 3k'$; $ppcm(c,d) = 3kk'$

$= \frac{360}{3} = 120$ et $c^2 + d^2 = \frac{5409}{9} = 601$

4) $601 = 5 \times 120 + 1$; $pgcd(601, 120) = 1$

soit d un diviseur positif de c et de d :

$d \mid ppcm(c,d)$ et $d \mid c^2 + d^2$.

$\Rightarrow d \mid pgcd(601, 120) = 1 \Rightarrow d = 1$

(c,d) sont donc premiers entre eux ; on sait que

dans ce cas : $ppcm(c,d) = cd$ (cours).

5 – $(c-d)^2 = c^2 + d^2 - 2cd = 601 - 240 = 361 = 19^2$

$(c+d)^2 = c^2 + d^2 + 2cd = 841 = 29^2$

(On a supposé $c > d$

ce qui donne $c - d = 19$

$c + d = 29$

ou encore : $c = \frac{19+29}{2} = \frac{48}{2} = 24$

$d = 5$

$(a,b) \in \{15, 72\}$.

enfin :

Ex 5 : 1 $a^{n-1} \equiv 1 [n] \Leftrightarrow a^{n-1} = 1 + kn$

ou encore : $a \times a^{n-2} - kn = 1$, Identité de Bézout

On en tire $pgcd(a,n) = 1$

2 Soit d un diviseur positif de n ; $d \neq n$.

$pgcd(d,n) = d$ ~~a~~ $= 1$ (d'après question 1)

donc n est premier.

Ex : 6 On pose $m = kd$; $n^* = k'd$;

$d = pgcd(m,n)$; $pgcd(k,k') = 1$

On a : $m^2 = k^2d^2 \mid k'^2d^2$ ou

encore : $k^2 \mid k'^2$; $k \mid k'.k'$

$pgcd(k,k') = 1 \Rightarrow k \mid k'$; ce qui donne

$k = 1$; $m = d = pgcd(m,n) \mid n = k'd$.

Remarque : On peut également ~~ecr~~ écrire m et n sous la forme de produit de facteurs premiers et raisonner sur les puissances de chaque facteurs, on obtient au même résultat. $m \mid n$.

Ex 7 — $\{ a^k, k \in \mathbb{Z} ; a \in H \} \subset H$ car H est stable par composition, comme H est finie ; $\exists\ k, k'$, $k' > k$ tel que $a^k = a^{k'}$ ou encore : $a^{k'-k} = 1$; ce qui donne d'une part : $1 = a^{k'-k} \in H$ et d'autre part :

$a^{k'-k-1} . a = 1$; $a^{-1} = a^{k'-k-1} \in H$.

On conclut que H vérifie le critère de sous-groupe de G.

Ex 8 Soit $P(n)$: $\det(M_n)$ est impair ;

$M_n = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$; a_{ii} = impair, a_{ij} = pair si $i \ne j$

$n=2$; $M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\det M_2 = \underbrace{ad}_{\text{impair}} - \underbrace{bc}_{\text{pair}}$ = impair

Supposons $P(n)$ vraie pour un n donné quelconque :

Soit M_{n+1} une matrice carrée d'ordre $(n+1)$ vérifiant les hypothèses : $M_{n+1} = (a_{ij})$; On développe le déterminant de M_{n+1} suivant la première ligne (par exemple).

$$\det M_{n+1} = \underset{\text{impair}}{a_{11}} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2\,n+1} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n+1\,n+1} \end{vmatrix}}_{\text{det matrice d'ordre } n} \underbrace{- \underset{\text{pair}}{a_{12}} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + \cdots + \underset{\text{pair}}{(-1)^{n+1} a_{1\,n+1}} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}}_{\text{pair}}$$

~~la~~ matrice vérifie l'hypothèse de récurrence, alors son det est impair :

le det M_{n+1} est somme d'un nombre ~~impair~~ impair de et des nombres pairs, donc impair.

En conclusion $\det M_n \ne 0$, M_n est inversible.