

LOIS NORMALES

1. LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale centrée réduite** sur \mathbb{R} (notée $\mathcal{N}(0; 1)$) si sa densité de probabilité f est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Cela signifie que, pour tous réels a et b tels que $a \leq b$:

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

REMARQUES

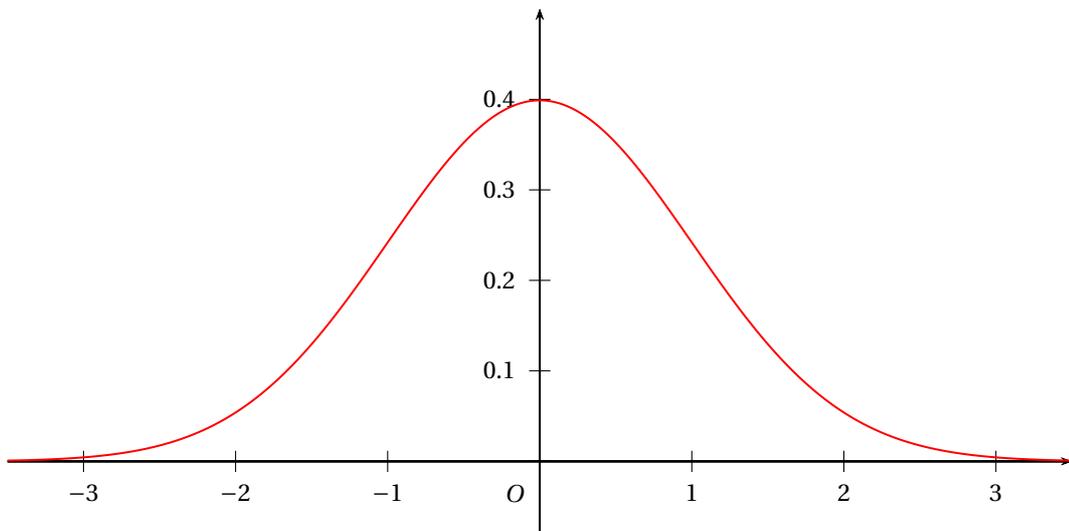
- On admet que f définit bien une densité, c'est à dire que l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f est égale à 1
- On a également :

$$p(X \geq a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ (limite que l'on peut noter : } \int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt)$$

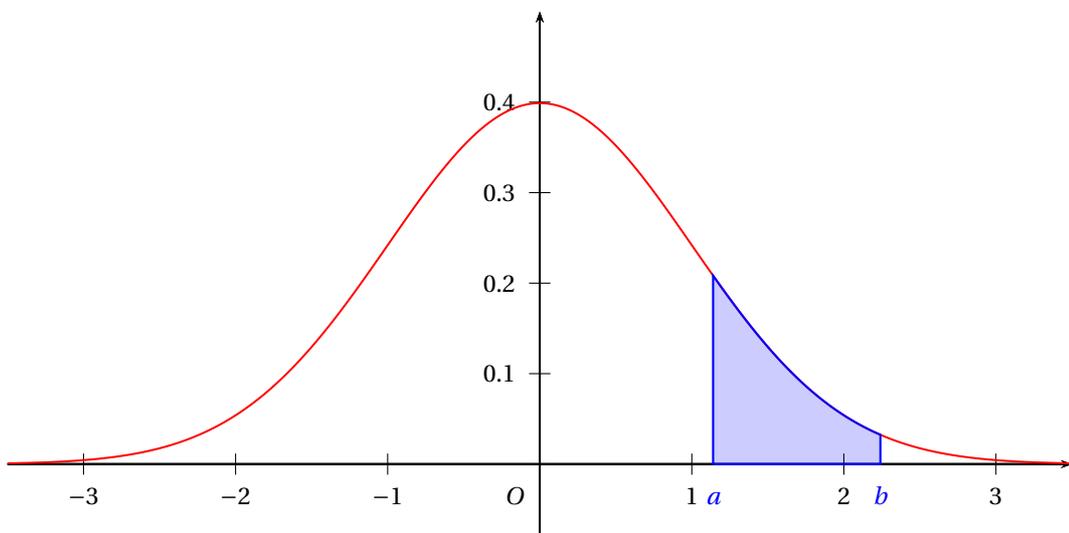
$$p(X \leq b) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ (limite que l'on peut noter : } \int_{-\infty}^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt)$$
- La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est dérivable sur \mathbb{R} , paire, positive, son tableau de variation est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	0

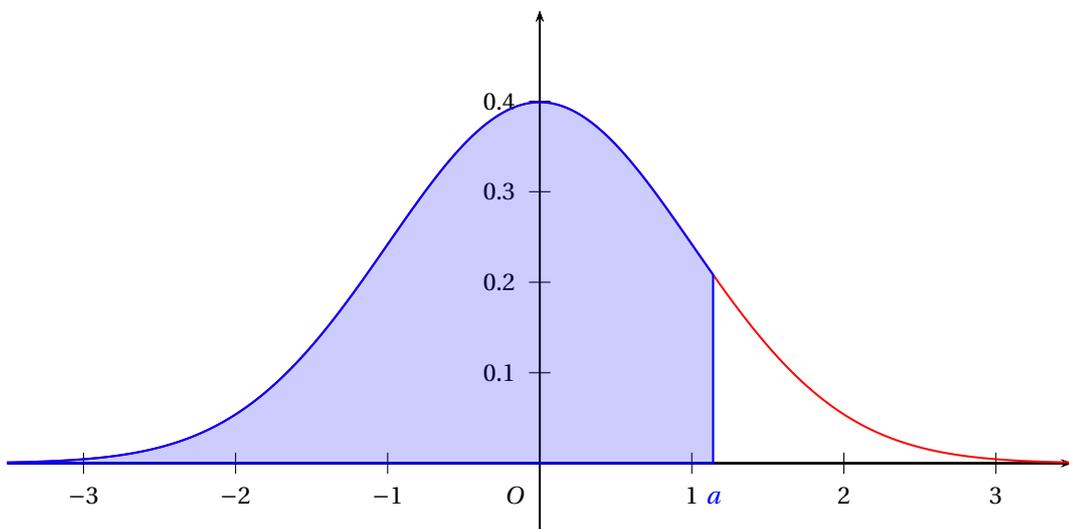
et sa courbe représentative :



- $p(a \leq X \leq b)$ est l'aire du domaine coloré ci-dessous :



- $p(X \leq a)$ est l'aire du domaine coloré ci-dessous :



PROPRIÉTÉS

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite :

- L'espérance mathématique de X est $E(X) = 0$ (loi *centrée*);
- La variance de X est $\sigma(X) = 1$ (loi *réduite*).

PROPRIÉTÉS

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et a un réel quelconque :

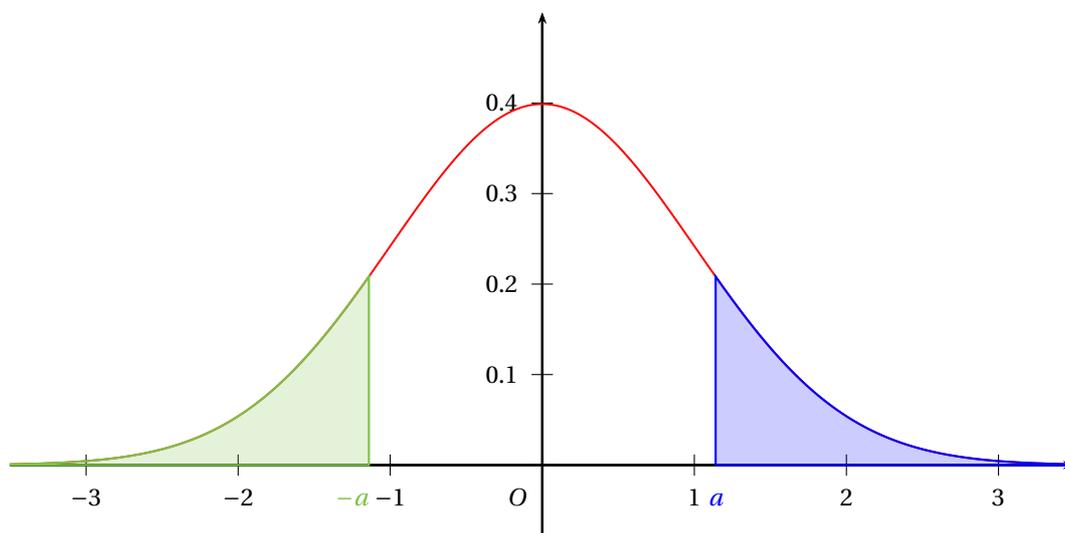
- $p(X \leq 0) = p(X \geq 0) = 0,5$
- $p(X \leq -a) = p(X \geq a)$
- $p(-a \leq X \leq a) = 1 - 2 \times p(X \geq a) = 2 \times p(X \leq a) - 1$

REMARQUE

Ces propriétés résultent du fait que :

- la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
- l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe est égale à 1.

On retrouve facilement ces propriétés à l'aide d'une figure par exemple pour la seconde formule :



$$p(X \leq -a) = p(X \geq a)$$

PROPRIÉTÉ («LOI NORMALE INVERSE»)

Soient X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et un réel $k \in]0; 1[$.

Il existe un **unique** réel m_k tel que $p(X \leq m_k) = k$.

REMARQUE

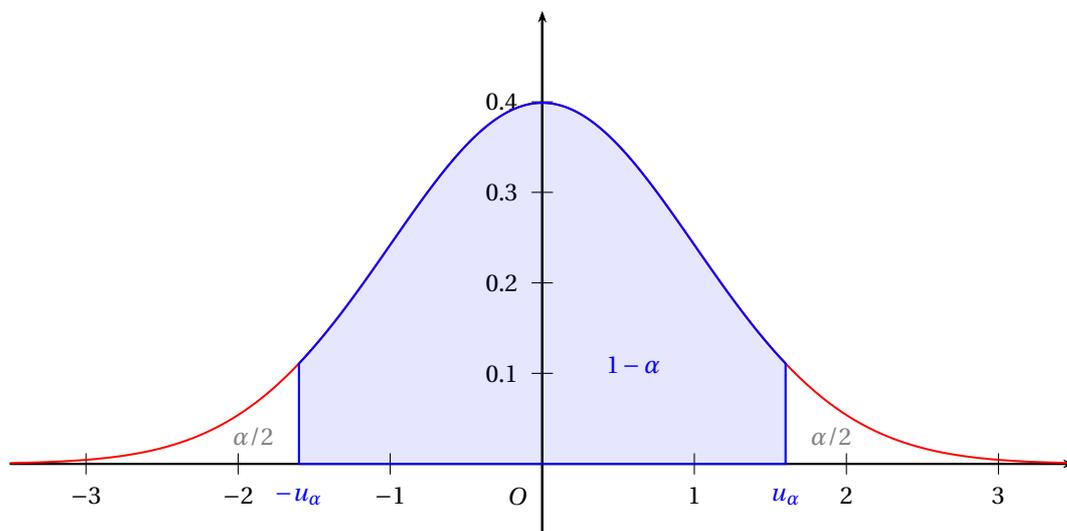
On peut calculer les valeurs de m_k à la calculatrice.

THÉORÈME

Soient X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et un réel $\alpha \in]0; 1[$.

Il existe un **unique** réel u_α tel que :

$$p(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha.$$



$$p(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

REMARQUES

- En utilisant la formule $p(-a \leq X \leq a) = 2 \times p(X \leq a) - 1$ et la «loi normale inverse» on peut calculer les valeurs de u_α à la calculatrice.
- Deux valeurs à retenir :
 - $u_{0,05} = 1,96$ c'est à dire que $p(-1,96 \leq X \leq 1,96) = 0,95$
 - $u_{0,01} = 2,58$ c'est à dire que $p(-2,58 \leq X \leq 2,58) = 0,99$

2. LOI NORMALE GÉNÉRALE

DÉFINITION ET THÉORÈME

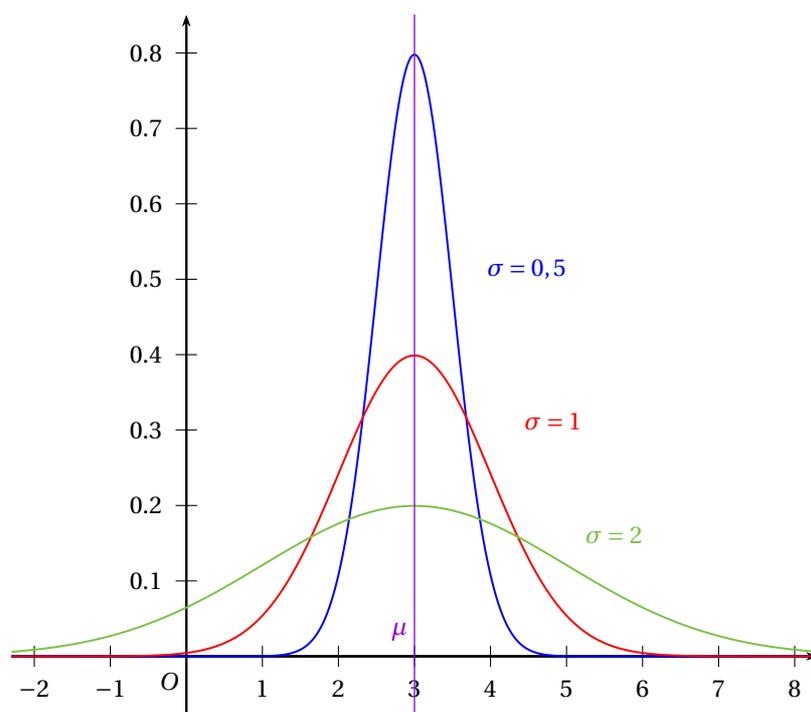
Soient deux réels μ et $\sigma > 0$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi normale de paramètres μ et σ^2** (notée $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$) si la variable aléatoire $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

L'espérance mathématique de X est μ et son écart-type σ (et donc sa variance σ^2).

REMARQUE

La courbe représentative de la distribution d'une loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ est une courbe « en cloche » qui admet la droite d'équation $x = \mu$ comme axe de symétrie. Elle est plus ou moins « étirée » selon les valeurs de σ



$\mu = 3$ et $\sigma = 0,5; 1; 2$

PROPRIÉTÉ (RÈGLE DES TROIS SIGMAS)

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ alors :

- $p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$ (à 10^{-2} près)
- $p(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$ (à 10^{-2} près)
- $p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$ (à 10^{-3} près)

EXEMPLE

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(11; 3^2)$ alors :

$$p(5 \leq X \leq 17) \approx 0,95$$

3. THÉORÈME DE MOIVRE-LAPLACE

THÉORÈME (MOIVRE-LAPLACE)

Soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi **binomiale** $\mathcal{B}(n; p)$.

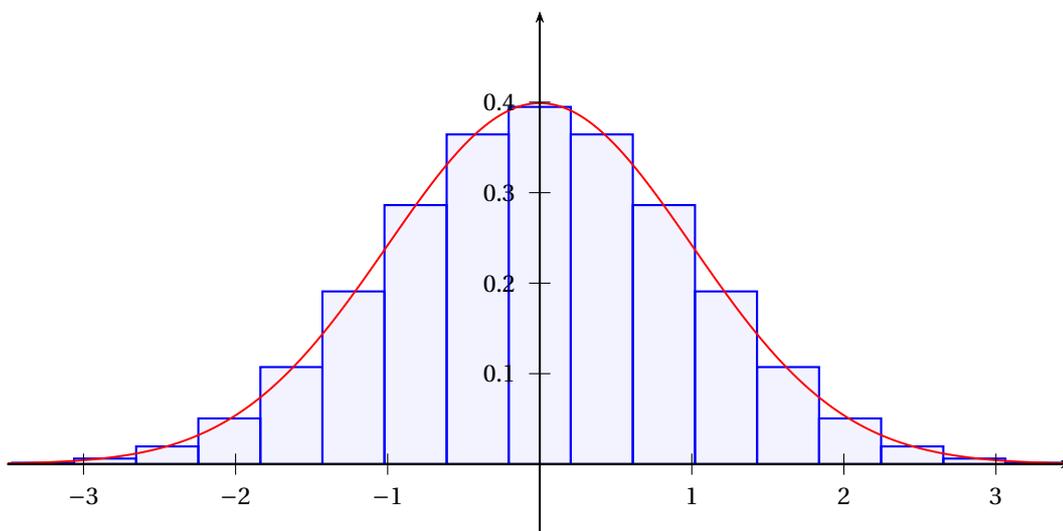
On pose $Z_n = \frac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)}$.

Alors pour tous réels a et b :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

REMARQUES

- On rappelle que pour une loi binomiale X de paramètres n et p : $E(X) = np$ et $\sigma(X)^2 = np(1-p)$.
 Z_n peut donc aussi s'écrire : $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$
- Ce théorème signifie que pour n élevé, la loi de Z_n est proche de la loi normale centrée réduite :



Histogramme de Z_n pour $n = 24$ et $p = 0,5$ et loi $\mathcal{N}(0; 1)$

- En pratique, on considèrera que « n est suffisamment élevé» si $n \geq 30$; $np \geq 5$; $n(1-p) \geq 5$.
 La loi binomiale X pourra alors être approximée par la loi normale $\mathcal{N}(E(X); \sigma(X)^2)$

EXEMPLE

X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(30; 0,4)$.

On cherche à calculer $p(7 < X \leq 17)$.

Posons $Z = \frac{X - 30 \times 0,4}{\sqrt{30 \times 0,4 \times 0,6}} = \frac{X - 12}{\sqrt{7,2}}$. Alors :

$$7 < X \leq 17 \Leftrightarrow -5 < X - 12 \leq 5 \quad \Leftrightarrow -\frac{5}{\sqrt{7,2}} < \frac{X - 12}{\sqrt{7,2}} \leq \frac{5}{\sqrt{7,2}} \quad \Leftrightarrow -1,86 < Z \leq 1,86 \text{ On}$$

a bien $n \geq 30$; $np \geq 5$; $n(1-p) \geq 5$. On peut donc approximer Z par une loi normale centrée réduite.

A la calculatrice on trouve alors :

$$p(-1,86 < Z \leq 1,86) \approx 0,937 \text{ (un calcul direct avec la loi binomiale donne } 0,935)$$