Un corrigé pour l'examen OLMA201 2023-2024

Ex 1 (1) Il s'agit d'une série entière lacunaire. On peut procéder ainsi. Pour $x \neq 0$, on pose $u_n = \frac{|x|^{n^2}}{2^n}$. On a $u_n^{1/n} = \frac{|x|^n}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x|>1 \\ 0 & \text{si } |x|<1 \end{cases}$

D'après le critère de Cauchy, si $|x|>1$ la série $\sum u_n$ diverge et si $|x|<1$ la série $\sum u_n$ converge.

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^{n^2}}{2^n}$ vaut $\boxed{R=1}$.

(2) Non. Un contre exemple est donné par $u_n = (-1)^n$

La série entière $\sum u_n x^n = \sum (-x)^n$ est une série géométrique qui converge si $|-x|<1$ et diverge si $|-x|\geq 1$ donc son rayon de convergence vaut $\boxed{R=1}$. Et pourtant, $\sum \frac{(-1)^n}{n}(-1)^n = \sum \frac{1}{n}$ est la série harmonique divergente.

(3)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x\cos(1-x^2+y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\cos(1-x^2+y^2)$$

(4) On a pour $(x,t)\neq(0,0)$
$$|f(x,t)-f(0,0)| = \left|\frac{x^2+t^2-xt^2}{x^2+t^2}-1\right| = \frac{|x|\,t^2}{x^2+t^2} \leq |x|$$
$$\leq \|(x,t)\|_1 = |x|+|t|.$$

On a donc $\lim_{\|(x,t)-(0,0)\|_1\to 0} |f(x,t)-f(0,0)| = 0$

et f est continue en $(0,0)$.

Ex 2 (1) On commence par déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

On peut utiliser la formule du cours (liée au critère de d'Alembert). En posant $a_n = \frac{1}{n^2}$, on a

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 = \ell$ donc le rayon de convergence de la série entière vaut $\boxed{R = \frac{1}{\ell} = 1}$.

- On sait alors que la somme S de la série entière est une fonction C^∞ sur $]-R,R[=]-1,1[$, (donc C^1 sur $]-1,1[$).

(2) • De plus, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^{n-1}$$

donc $x S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$. • Le cours dit que pour tout $x \in]-1,1[$, on a $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

En particulier pour $x = \frac{1}{2} \in]-1,1[$, on a

$$\ln 2 = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n}$$

(3) • La série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge normalement sur $[-1,1]$ donc sur $[0,1]$. En effet, on a

$\sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

- Comme de plus les fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{n^2}$ sont toutes continues $(n \geq 1)$ sur $[-1,1]$, on en déduit avec la convergence normale de $\sum \frac{x^n}{n^2}$ sur $[-1,1]$, que S est continue sur $[-1,1]$.

(4) • On a $\ln(1-x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x$ donc $\ln x \cdot \ln(1-x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln x$

- Or par croissances comparées, $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

Donc on a $\lim_{x\to 0^+} \ln x \ln(1-x) = 0$

- S est continue sur $[0,1]$, donc on a

$\lim_{x\to 0^+} S(x) = S(0) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} S(1-x) = S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

On a donc montré que $\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x) = S(1)}$.

5 Comme S est C^1 sur $]-1,1[$, on a g C^1 sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[$,

$$g'(x) = \frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{1}{1-x}\ln x - S'(1-x) + S'(x)$$

Or d'après 2 on a $\forall x \in]0,1[$, $S'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$

et donc $S'(1-x) = -\frac{\ln(1-(1-x))}{1-x} = -\frac{\ln x}{1-x}$

(car $1-x \in]0,1[$). On en déduit, $\forall x \in]0,1[$

$$g'(x) = \frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{\ln x}{1-x} - \left(-\frac{\ln x}{1-x}\right) + \left(-\frac{\ln(1-x)}{x}\right)$$
$$= 0$$

- Comme la dérivée de g est nulle sur $]0,1[$, elle est constante sur $]0,1[$

$\forall x \in]0,1[$, $g(x) = C = g\left(\frac{1}{2}\right)$

- On a vu dans 4 que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = S(1)$.

Donc g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = S(1)$.

- Donc $\forall x \in [0,1[$, $g(x) = C = g\left(\frac{1}{2}\right)$.

6 On a montré que $S(1) = g(0) = g\left(\frac{1}{2}\right)$

donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2S\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= (\ln 2)^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\frac{1}{n^2}$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2 2^n}$$

en utilisant 2.

Ex3 Soit $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{x(1+t)}}{1+t}\ln(1+t)\,dt$.

1 - On pose $f(x,t) = \frac{e^{x(1+t)}}{1+t}\ln(1+t)$.

Il est facile de voir que $(x,t) \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}\times[0,1]$. Donc d'après un théorème de continuité des intégrales à paramètre, F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

- Comme $f(x,t) \geq 0$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$, on en déduit $F(x) = \int_0^1 f(x,t)\,dt \geq 0$ et $F(0) = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t}\,dt$

$= \left[\frac{1}{2}(\ln(1+t))^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

2 . L'application partielle $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in [0,1]$ avec $\partial_x f(x,t) = \cancel{(1+t)}\frac{e^{x(1+t)}}{\cancel{1+t}}\ln(1+t)$

$= \ln(1+t)\, e^{x(1+t)}$.

- On remarque que $(x,t) \mapsto \partial_x f(x,t) = \ln(1+t)e^{x(1+t)}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$.
- On en déduit d'après le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre que F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et que

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \int_0^1 \partial_x f(x,t)\,dt = \int_0^1 \ln(1+t)\, e^{x(1+t)}\,dt$.

- On voit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0,1]$, $\partial_x f(x,t) \geq 0$ (car $1+t \geq 1 \Rightarrow \ln(1+t) \geq 0$) et donc $F'(x) \geq 0$.

Donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

3 On a calculé $F(0) = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$ (voir 1.)

On a $F'(0) = \int_0^1 \ln(1+t)\,dt = \left[(1+t)\ln(1+t)\right]_0^1$

$- \int_0^1 (1+t)\frac{1}{(1+t)}\,dt = 2\ln 2 - \int_0^1 dt = 2\ln 2 - 1$.

(On a fait une intégration par parties en posant $u'(t) = 1$, $u(t) = t+1$, $v(t) = \ln(1+t)$, $v'(t) = \frac{1}{1+t}$.)

Donc $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + (2\ln 2 - 1)x + x\,\varepsilon(x)}$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

4 On a $xF'(x) = \int_0^1 x e^{x(t+1)}\ln(1+t)\,dt$

$= \left[e^{x(t+1)}\ln(1+t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{x(t+1)}}{1+t}\,dt$

$= (\ln 2)\, e^{2x} - \int_0^1 \frac{e^{x(t+1)}}{1+t}\,dt$

(on a fait une intégration par parties en posant

$u'(t) = x e^{x(t+1)}$, $u(t) = e^{x(t+1)}$, $v(t) = \ln(1+t)$

et $v'(t) = \frac{1}{1+t}$.)

5 Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x > 0$, on a

$$0 \leq \frac{e^{x(t+1)}}{1+t} \leq \frac{e^{x(t+1)}}{1} \quad \text{donc}$$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{x(t+1)}}{1+t}\,dt \leq \int_0^1 e^{x(t+1)}\,dt = \left[\frac{e^{x(t+1)}}{x}\right]_0^1$$

$$\leq \frac{e^{2x} - e^x}{x}.$$

6 Grâce à 4 et 5, on a : $\forall x > 0$,

$$-\frac{e^{2x} - e^x}{x} \leq -\int_0^1 \frac{e^{x(t+1)}}{t+1}\,dt = x F'(x) - e^{2x} \ln 2 \leq 0$$

donc $\boxed{e^{2x} \ln 2 - \frac{e^{2x} - e^x}{x} \leq x F'(x) \leq e^{2x} \ln 2.}$

On en déduit

$$\forall x > 0, \quad \ln 2 - \frac{1 - e^{-x}}{x} \leq e^{-2x} x F'(x) \leq \ln 2$$

Grâce au théorème des gendarmes, on obtient

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x e^{-2x} F'(x) = \ln 2.}$$

Bonus

7 • Pour tout $x > 0$, on a

$$e^{-x} F(x) = \int_0^1 \frac{e^{xt}}{1+t} \ln(1+t)\,dt \geq \int_{1/2}^1 \frac{e^{xt}}{1+t} \ln(1+t)\,dt$$

$$\geq e^{x/2} \int_{1/2}^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t}\,dt \geq e^{x/2} \int_{1/2}^1 \frac{\ln(1+\frac{1}{2})}{1+1}\,dt$$

$$\geq e^{x/2} \frac{\ln(3/2)}{4} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

donc $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} F(x) = +\infty$ par comparaison.

• Pour tout $x > 0$, on a

$$0 \leq e^{-2x} F(x) = e^{-x} \int_0^1 \frac{e^{xt}}{1+t} \ln(1+t)\,dt \leq e^{-x} \int_0^1 e^{xt} \frac{\ln 2}{1}\,dt$$

$$\leq (\ln 2) e^{-x} \left[\frac{e^{xt}}{x}\right]_0^1 = (\ln 2) e^{-x} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\leq (\ln 2) \frac{1 - e^{-x}}{x} \leq (\ln 2) \frac{1}{x}.$$

On a donc

$$0 \leq e^{-2x} F(x) \leq \frac{\ln 2}{x}$$

Par le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} F(x) = 0$.

8 On sait d'après 6 que $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{F'(u)}{\left(\frac{e^{2u}}{u}\right)} = \ln 2$

Comme $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{e^{2u}}{u} = +\infty$, il est donc clair que

$\lim\limits_{u \to +\infty} F'(u) = +\infty$.

D'après la règle de l'Hôpital, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_1^x F'(u)\,du}{\int_1^x \frac{e^{2u}}{u}\,du} = \ln 2$$

donc

$$F(x) - F(1) \underset{+\infty}{\sim} (\ln 2) \int_1^x \frac{e^{2u}}{u}\,du$$

$$\| $$

$$F(x)\left(1 - \frac{F(1)}{F(x)}\right) \underset{+\infty}{\sim} F(x)$$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ (voir 7).

Finalement $\boxed{F(x) \underset{+\infty}{\sim} (\ln 2) \int_1^x \frac{e^{2u}}{u}\,du.}$