Les réponses aux questions doivent être précisément justifiées. Les documents et calculatrices sont interdits, les téléphones portables doivent être éteints et rangés.
Barème indicatif: **20+3=4+8+8+3**.

Durée 2 heures

Exercice 1. [Questions de cours] (4 pts)

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.
2. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} u_n$ est-elle nécessairement convergente?
3. Calculer les deux dérivées partielles de $f(x, y) = \sin(1 - x^2 + y^2)$.
4. La fonction $f(x,t) = \frac{x(x-t^2)+t^2}{x^2+t^2}$ si $(x,t) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 1$, est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 2. [Calcul d'Euler] (8 pts)
Introduction: Euler dans ses efforts pour résoudre le problème de Basel a voulu "accélérer" la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Son objectif a été d'identifier sa valeur numérique.

Considérons la série entière $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

1. Justifier que $S(x)$ est une fonction de classe C^1 sur $]-1,1[$.
2. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$,
$$xS'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$
En déduire que $\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.
3. Montrer que $S(x)$ est continue sur $[0,1]$.
4. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0,1[$ par
$$g(x) = \ln(x)\ln(1-x) + S(1-x) + S(x).$$
Montrer que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = S(1)$.
5. En calculant la dérivée de g pour tout $x \in]0,1[$, montrer que g est une fonction constante égale à $S(1)$ pour tout $x \in [0,1[$.
6. En calculant $g(\frac{1}{2})$ montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}.$$

Exercice 3. [Intégrale à paramètre] (8pts)

On considère la fonction $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{(t+1)x}}{1+t} \ln(t+1)\, dt$. On s'intéresse à la valeur $F(x)$ proche de 0 et à l'étude de la fonction F.

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que F est positive et calculer $F(0)$. *Indication: on peut faire le changement de variable* $s = \ln(1+t)$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale à paramètre (formuler précisément le théorème du cours qu'on utilisera). En déduire que F est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. L'approximation du premier ordre de $F(x)$ en 0 est: $F(0) + xF'(0)$. L'expliciter.
4. En intégrant par parties, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xF'(x) = e^{2x}\ln 2 - \int_0^1 \frac{e^{(t+1)x}}{t+1}\,dt$.
5. Montrer que pour tout $x > 0$, $0 \leq \int_0^1 \frac{e^{(t+1)x}}{t+1}\,dt \leq \frac{e^{2x}-e^x}{x}$.
6. En déduire, un encadrement de $xF'(x)$. Calculer $\lim_{x\to+\infty} xe^{-2x}F'(x)$.

Partie Bonus (3pts)

7. Calculer $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}F(x)$.
8. Montrer que $F(x)$ est équivalent à $\ln 2 \int_1^x \frac{e^{2s}}{s}\,ds$ en $+\infty$. .