Examen – Seconde session : Corrigé

Exercice 1 (OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES). **1**. Posons $g(x,y) = x^4 + y^4$. Pour un point critique sous contrainte, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x^2 & = & 4\lambda x^3 \\ 2y & = & 4\lambda y^3 \end{array} \right. .$$

Il faut maintenant distinguer suivant qu'une coordonnée est nulle ou non.

- Si $x = 0$, alors $y = \pm\sqrt[4]{5}/3$ et $\lambda = 9/2\sqrt{5}$ convient.
- Si $y = 0$, alors $x = \pm\sqrt[4]{5}/3$ et $\lambda = \pm 9/4\sqrt[4]{5}$ convient.
- Si $x, y \neq 0$, alors en divisant par x^2 la première équation, on trouve $\lambda = 3/4x$. De même, en divisant par y dans la seconde on trouve $\lambda = 1/2y^2$. Ainsi, $y^2 = 2x/3$. On peut maintenant utiliser cette relation dans l'équation $g(x,y) = 5/81$ pour obtenir

  $$x^4 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{5}{81} = 0$$

  Le discriminant de cette équation est $\Delta = 16/81 + 20/81 = 36/81$ et les racines sont donc

  $$x^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{9} + \frac{6}{9}\right) = \frac{1}{9} \text{ et } x^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{9} - \frac{6}{9}\right) = -\frac{5}{9}.$$

  La deuxième solution n'a pas de sens, donc on a finalement $x = \pm 1/3$, ce qui donne ensuite $y^2 = \pm 2/9$. Comme $y^2 \geqslant 0$, on doit finalement avoir $x \geqslant 0$ donc $x = 1/3$ et $y = \pm\sqrt{2}/3$.

2. On remarque que si $\nabla g(x,y) = 0$, alors $x = 0 = y$. Or, le point $(0,0)$ ne vérifie pas la contrainte $g(x,y) = 5/81$. Ainsi, ∇g est nul en tout point vérifiant les contraintes, donc d'après le court le minimum global est atteint en un point critique sous contrainte.

3. On voit que $f(x,y) \geqslant 0$ dès que $x \geqslant 0$. Or, il n'y a qu'un point critique tel que $x < 0$, à savoir $(-\sqrt[4]{5}/3, 0)$. La valeur correspondante est

$$f\left(-\frac{\sqrt[4]{5}}{3}, 0\right) = -\frac{5^{4/3}}{27} < 0.$$

Comme toutes les autres valeurs sont positives, il s'agit du minimum global.

4. (a) La première contrainte signifie que si $(x,y) \in \mathcal{D}$, $\|(x,y)\|^2 \leqslant 1$, autrement dit que $\mathcal{D}$ est borné. De plus, comme $\mathcal{D}$ est défini par des inégalités larges, c'est également une partie fermée. Par conséquent, c'est un compact de $\mathbb{R}^2$.

(b) La fonction f est continue car elle est polynomiale en les coordonnées. Donc, elle possède un minimum global sur le compact $\mathcal{D}$.

5. (a) Posons

$$h_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \text{ et } h_2(x,y) = -2x - 2y - 1.$$

On a alors

$$\nabla h_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \text{ et } \nabla h_2(x,y) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(b) On constate que $\nabla h_1(x,y)$ et $\nabla h_2(x,y)$ ne sont pas colinéaires si $x \neq y$. Ainsi, les gradients sont linéairement indépendants en ces points et la qualification linéaire des contraintes est donc vérifiée.

6. (a) Les conditions KKT sont, avec $\mu_1, \mu_2 \leqslant 0$,

$$\begin{cases} 3x^2 & = & 2x\mu_1 - 2\mu_2 \\ 2y & = & 2y\mu_1 - 2\mu_2 \\ \mu_1\left(x^2+y^2-1\right) & = & 0 \\ \mu_2\left(-2x-2y-1\right) & = & 0 \end{cases}$$

(b) Il suffit de distinguer suivant les multiplicateurs qui sont non nuls.

- Si $\mu_1 = 0 = \mu_2$, alors $x = 0 = y$ et ce point vérifie bien les contraintes.
- Si $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 \neq 0$, alors en égalisant $2\mu_2$ dans les deux premières équations on obtient

$$3x^2 = 2y.$$

Comme de plus la seconde condition de complémentarité donne alors $2y = -2x-1$, on trouve finalement

$$3x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Cette équation a pour discriminant $\Delta = -9$ et n'a donc pas de solution réelle. Autrement dit, ce cas n'est pas possible.

- Si $\mu_1 \neq 0$ et $\mu_2 = 0$, supposons que $y \neq 0$. Alors, la seconde équation donne $\mu_1 = 1$, ce qui contredit $\mu_1 \leqslant 0$. Ainsi, on doit avoir $y = 0$. On a alors par la première condition de complémentarité $x = -1$. Mais $2 \times (-1) + 2 \times 0 = -2 < -1$ donc le point $(-1, 0)$ ne satisfait pas les contraintes.

(c) On sait que f a un minimum global, et comme on suppose que les contraintes sont qualifiées en tout point, on sait que le minimum est atteint en un point critique sous contrainte. Comme on admet qu'en un tel point on ne peut avoir $\mu_1, \mu_2 \neq 0$, on conclut que la seule possibilité est $(0,0)$, qui donne comme minimum $f(0,0) = 0$.

7. Si $\mu_1, \mu_2 \neq 0$, alors $-2x - 2y = 1$ et $x^2 + y^2 = 1$, donc en remplaçant on trouve

$$\begin{aligned} x^2 + \left(-x - \frac{1}{2}\right)^2 &= 1 \\ x^2 + x^2 + x + \frac{1}{4} &= 1 \\ 2x^2 + x - \frac{3}{4} &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation a pour discriminant $\Delta = 7$ et ses racines sont donc

$$x_\pm = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Il reste à vérifier que ces valeurs ne donnent pas des solutions des équations KKT. Pour cela, on peut remarquer qu'en soustrayant les deux première équations on trouve

$$3x^2 + 2x + 1 = (4x+1)\mu_1.$$

Or,

$$\frac{3x_+^2+2x_++1}{4x_++1}=\frac{3/2+5\sqrt{7}/2}{\sqrt{7}}>0 \text{ et } \frac{3x_-^2+2x_-+1}{4x_-+1}=\frac{3/2-5\sqrt{7}/2}{-\sqrt{7}}>0,$$

ce qui contredit $\mu_1 \leqslant 0$.

Exercice 2 (Optimisation linéaire). **Partie I.**

1. Les conditions KKT sont, avec $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geqslant 0$,

$$\begin{cases} 2 &= \mu_1+\mu_2-4\mu_3 \\ 7 &= 4\mu_1+6\mu_3 \\ \mu_1(x+4y-20) &= 0 \\ \mu_2(x-15) &= 0 \\ \mu_3(-4x+6y) &= 0 \end{cases}$$

2. (a) Si $\mu_2=0$, alors il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} 2 &= \mu_1-4\mu_3 \\ 7 &= 4\mu_1+6\mu_3 \end{cases}$$

En soustrayant la seconde ligne à quatre fois la première, on trouve

$$1=-22\mu_3,$$

ce qui donne $\mu_3<0$. Il n'y a donc pas de solution dans ce cas.

(b) Si $\mu_2 \neq 0$, les conditions de complémentarité donnent $x=15$. Pour maximiser f il faut prendre y le plus grand possible. Les deux autres équations deviennent alors $y \leqslant 5/4$ et $y \leqslant 10$, dont la solution maximale est $y=5/4$.

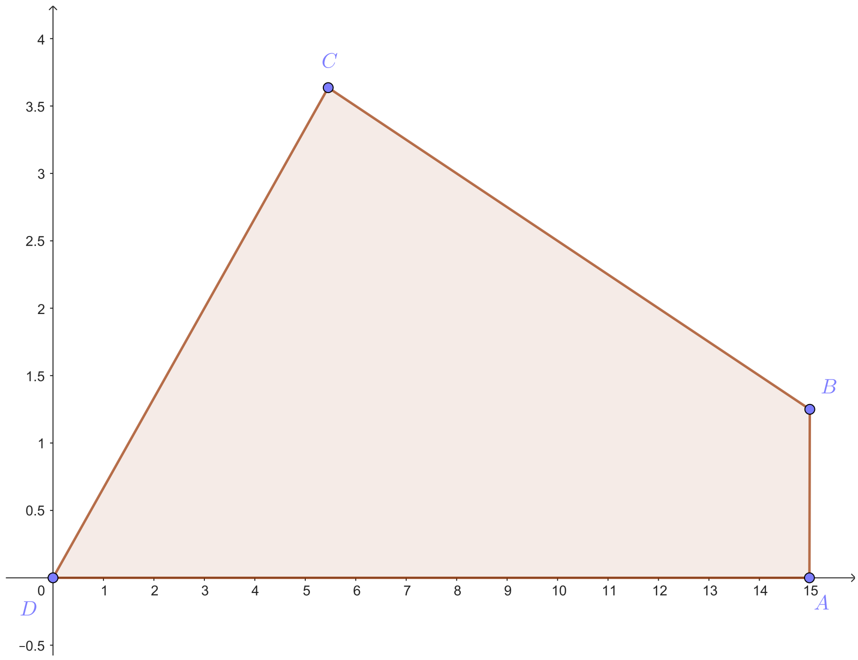
(c) Comme $-4x+6y \neq 0$, on a $\mu_3=0$. Quant à μ_1, la seconde équation donne $\mu_1=7/4 \geqslant 0$ et la première donne alors $\mu_2=1/4 \geqslant 0$.

3. Nous avons vu que pour $(x,y)=(15,5/4)$, le système KKT admet une solution. D'après le cours, il s'agit d'un maximum sous contraintes. Ainsi, le bénéfice maximum est

$$f(15,5/4)=30+35/4=155/4.$$

Partie II. Résolution géométrique

4. Voici la figure :



5. Il faut trouver les intersections des droites définies par les conditions d'égalités dans les contraintes, puis vérifier qu'elles sont dans $\mathcal{D}$.

- Si $x + 4y = 20$ et $x = 15 \geqslant 0$, alors $y = 5/4 \geqslant 0$ et
$$-4x + 6y = -60 + 15/2 \leqslant 0$$
donc le point $(15, 5/4)$ est un sommet.
- Si $x+4y = 20$ et $-4x+6y = 0$, alors $22y = 80$ donc $y = 40/11 \geqslant 0$, d'où $x = 20-160/11 = 60/11$ et ce nombre est bien compris entre 0 et 15. Ainsi, le point $(40/11, 60/11)$ est un sommet.
- Si $x + 4y = 20$ et $x = 0$, alors $y = 5 \geqslant 0$ mais $-4x + 6y = 30 > 0$, donc la troisième contrainte n'est pas vérifiée et ce n'est pas un sommet.
- Si $x + 4y = 20$ et $y = 0$, alors $x = 20 > 15$ donc la deuxième contrainte n'est pas vérifiée et ce n'est pas un sommet.
- Si $x = 15$ et $-4x + 6y = 0$, alors $y = 10 \geqslant 0$ et $x + 4y = 95 > 20$ donc la première contrainte n'est pas vérifiée et ce n'est pas un sommet.
- Le cas $x = 15$ et $x = 0$ est impossible.
- Si $x = 15$ et $y = 0$, alors $x + 4y = 15 \leqslant 20$ et $-4x + 6y = -60 \leqslant 0$, donc le point $(15, 0)$ est un sommet.
- Si $-4x + 6y = 0$ et $x = 0$, alors $y = 0$ et ce point vérifie bien toutes les contraintes.
- Si $-4x + 6y = 0$ et $y = 0$, alors $x = 0$ et ce point vérifie bien toutes les contraintes.
- Il ne reste à nouveau que le cas $x = 0$ et $y = 0$.

En conclusion, nous avons trouvé quatre sommets : $(0, 0)$, $(15, 0)$, $(15, 5/4)$ et $(60/11, 40/11)$.

6. D'après le Théorème de la solution-sommet, le maximum est atteint sur un sommet. Il suffit

donc de calculer les valeurs correspondantes, à savoir

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f(15,0) &= 30 \\ f\left(15, \frac{5}{4}\right) &= 30 + \frac{35}{4} \\ f\left(\frac{60}{11}, \frac{40}{11}\right) &= \frac{400}{11} \end{aligned}$$

La plus grande parmi ces quatre valeurs est la troisième. Ainsi, le maximum est atteint en $(15, 5/4)$ et vaut $155/4$.

Partie III. Problème dual

7. D'après le cours et avec ses notations, le problème dual consiste à maximiser la fonction

$$F^*(\mu) = \langle \mu, d \rangle$$

si les contraintes s'écrivent $Hx \leqslant d$. On a ici $d = (20, 15, 0)$, donc

$$F^*(\mu) = 20\mu_1 + 15\mu_2.$$

De plus, les contraintes sont – toujours d'après le cours – $\mu \leqslant 0$ et $(-2, -7) = H^t\mu$. On a ici

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

ce qui donne bien les contraintes de l'énoncé.

8. (a) Comme $\mu_3 \leqslant 0$, la deuxième inégalité donne

$$\begin{aligned} -7 &\leqslant 4\mu_1 + 6\mu_3 \\ &\leqslant 4\mu_1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire la première inégalité demandée. Quant à la seconde, on l'obtient en multipliant la première par 3, la seconde par 2 et en additionnant.

(b) Tout d'abord, comme $4\mu_1 \geqslant -7$, on a bien $\mu_3 \leqslant 0$. De plus, $4\mu_1 + 6\mu_3 = 0 \geqslant -7$ donc la seconde contrainte est bien vérifiée. Enfin,

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 - 4\mu_3 &= \mu_1 + \mu_2 - 4\frac{-7 - 4\mu_1}{6} \\ &= \frac{6\mu_2 + 28 + 22\mu_1}{6} \\ &= \frac{14}{3} + \frac{3\mu_2 + 11\mu_1}{3} \\ &\geqslant \frac{14}{3} - \frac{20}{3} \\ &= -2 \end{aligned}$$

et la première contrainte est également vérifiée.

9. D'après le Théorème de dualité forte pour les problèmes linéaires, le maximum de F^* est atteint pour des valeurs correspondants aux multiplicateurs du minimum de F, donc du maximum de f. Autrement dit, pour $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (-7/4, -1/8, 0)$ (on remarquera qu'on a bien $-7 - 4\mu_1 = 0 = 6\mu_3$). La valeur correspondante est

$$F^*\left(\frac{-7}{4}, \frac{-1}{8}, 0\right) = -35 - \frac{15}{8}.$$