# Examen – Seconde session

Durée de l'épreuve : 3 heures.

*Aucun document n'est autorisé, ni aucun dispositif électronique.*

---

**Exercice 1** (Optimisation sous contraintes)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^3 + y^2.$$

**Partie I. Contrainte d'égalité**

Dans cette partie, on veut minimiser $f$ sous la contrainte $x^4 + y^4 = 5/81$.

**1**. Montrer qu'il y a six points critiques sous contraintes (on distinguera suivant que $x = 0$, $y = 0$ ou $x, y \neq 0$).

**2**. On admet qu'il existe un minimum global sous contraintes. Justifier qu'il est atteint en l'un des points précédents.

**3**. Montrer qu'un seul de ces points critiques sous contraintes correspond à une valeur négative de $f$. En déduire le minimum recherché.

**Partie II. Contraintes d'inégalités**

On *remplace* maintenant la contrainte précédente par :

- $x^2 + y^2 \leqslant 1$ ;
- $2x + 2y \geqslant -1$.

**4**. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points vérifiant les contraintes.

(a) Montrer que $\mathcal{D}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.

(b) En déduire que $f$ admet bien un minimum sous ces contraintes.

**5**. (a) Calculer les gradients des contraintes.

(b) En déduire que la qualification linéaire des contraintes est vérifiée aux points $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

**6**. (a) Écrire les conditions KKT associées au problème de minimisation de $f$.

(b) On suppose que soit $\mu_1 = 0$, soit $\mu_2 = 0$. Montrer que le système admet deux solutions.

(c) En admettant que les contraintes sont qualifiées en tout point, en déduire le minimum recherché.

**7**. **(Bonus)** Montrer qu'on ne peut pas avoir $\mu_1$ et $\mu_2$ tous les deux non nuls.

**T.S.V.P.**

**Exercice 2** (Optimisation linéaire)**.** Une usine produit des câbles de cuivre de 5 mm et 10 mm de diamètre respectivement, sur lesquels le bénéfices est de 2 € et 7 € au mètre respectivement. Le bénéfice total est donc donné par la fonction

$$f : (x, y) \mapsto 2x + 7y.$$

De plus, les contraintes de production se traduisent par les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} x + 4y & \leqslant & 20 \\ x & \leqslant & 15 \\ -4x + 6y & \leqslant & 0 \\ x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \end{cases}$$

**Partie I. Résolution par la méthode KKT**

**1.** On s'intéresse au problème d'optimisation linéaire précédent, et on retire les contraintes $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. Écrire les conditions KKT associées à ce problème. *On fera attention au fait que les multiplicateurs sont positifs puisqu'on cherche un maximum.*

**2.** (a) On suppose $\mu_2 = 0$. Déterminer la valeur de $\mu_1$ et $\mu_3$ et conclure.

(b) On suppose $\mu_2 \neq 0$. En déduire la valeur de $x$, puis celle de $y$ pour laquelle $f(x, y)$ sera maximale.

(c) Calculer alors $\mu_1$, $\mu_2$ et $\mu_3$.

**3.** Déduire de ce qui précède le maximum recherché.

**Partie II. Résolution géométrique**

**4.** Dessiner l'ensemble $\mathcal{D}$ des points du plan vérifiant les contraintes.

**5.** Déterminer les sommets de $\mathcal{D}$.

**6.** Retrouver le résultat de la partie précédente.

**Partie III. Problème dual**

**7.** On pose $F(x, y) = -f(x, y)$. Montrer que le dual du problème de *minimisation* de $F$ sous les contraintes de la **Partie I.** consiste à maximiser la fonction

$$F^*(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = 20\mu_1 + 15\mu_2$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} -2 & = & \mu_1 + \mu_2 - 4\mu_3 \\ -7 & = & 4\mu_1 + 6\mu_3 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 & \leqslant & 0 \end{cases}$$

**8.** (a) Montrer que si les contraintes sont satisfaites, alors

$$\begin{cases} -7 & \leqslant & 4\mu_1 \\ -20 & \leqslant & 11\mu_1 + 3\mu_2 \end{cases}$$

(b) Réciproquement, on suppose qu'on a trouvé $\mu_1, \mu_2 \leqslant 0$ vérifiant les deux dernières inégalités, et on pose

$$\mu_3 = \frac{-7 - 4\mu_1}{6}.$$

Montrer qu'alors $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ vérifient les contraintes.

**9.** Résoudre le problème dual.