Examen – Première session : Corrigé

Exercice 1. **1**. On a

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} \right).$$

2. (a) On a par définition $f(x,y) \geqslant 0$ pour tout $(x,y) \in U$. De plus, $f(0,1) = 0$, donc 0 est bien le minimum global de f.

(b) Si le gradient de f s'annule, alors $xy = 0$ donc soit $x = 0$ soit $y = 0$.

(c) Tout extremum global de f est un point critique. Donc, si f avait un maximum global, il serait atteint en un point dont une des coordonnées est nulle. Mais alors, ce maximum vaudrait 0, ce qui est impossible puisque par exemple $f(1,1) = 1/2 > 0$. Ainsi, f n'a pas de maximum global.

3. On cherche maintenant les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x,y) \in U \mid x^4 + y^4 = 2\}$.

(a) Posons $g(x,y) = x^4+y^4-2$. Alors, $\nabla g(x,y) = (4x^3, 4y^3)$ ne s'annule qu'en $(0,0)$, qui n'appartient pas à $\mathcal{E}$. Ainsi, la méthode de Lagrange s'applique en tout point de $\mathcal{E}$.

(b) On cherche les points pour lesquels il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfaisant $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, ce qui donne

$$\begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = 4\lambda x^3 \\ \dfrac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} = 4\lambda y^3 \end{cases}$$

Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $f(x,y) = 0$ est minimal. Supposons donc que ce n'est pas le cas. Alors, on peut diviser pour obtenir

$$\frac{y^4/x^2}{2(x^2+y^2)^2} = \lambda = \frac{x^4/y^2}{2(x^2+y^2)^2}.$$

Cette égalité peut s'écrire $y^4/x^2 = x^4/y^2$ et donc $y^6 = x^6$, c'est-à-dire $x = \pm y$. Si $x = y$, la définition de $\mathcal{E}$ donne $x = \pm 1 = y$. Si $x = -y$, alors $x = -1$ et $y = 1$ ou $x = 1$ et $y = -1$. Nous avons donc huit points critiques sous contraintes : $(0, \pm\sqrt[4]{2})$, $(\pm\sqrt[4]{2}, 0)$, $(\pm 1, \pm 1)$, $(\pm 1, \mp 1)$.

(c) Il suffit de calculer les valeurs de f sur les différents points critiques. En observant que f ne dépend que de x^2 et y^2, on voit que le signe n'importe pas et qu'il suffit donc de calculer deux valeurs : $f(0, \sqrt[4]{2}) = 0$ et $f(1,1) = 1/\sqrt{2}$. Ainsi, le maximum de f sur $\mathcal{E}$ est $1/\sqrt{2}$ et son minimum est 0.

4. On veut maintenant trouver le minimum de f sur l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x,y) \in U \mid xy \geqslant 1\}$.

(a) La contrainte peut s'écrire $h(x,y) = 1 - xy$. On a alors $\nabla h(x,y) = (-y, -x)$ qui ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, donc les contraintes sont qualifiées.

(b) S'il y a un minimum global, donc en particulier local, en (x, y), alors les conditions KKT sont vérifiées puisque les contraintes sont qualifiées. On a donc

$$\begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = -\mu y \\ \dfrac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} = -\mu x \\ \mu(1-xy) = 0 \end{cases}$$

Comme x et y doivent être tous les deux non nuls pour que $xy \geqslant 1$, on peut diviser pour obtenir

$$\frac{xy^3}{2(x^2+y^2)^2} = -\mu = \frac{x^3y}{2(x^2+y^2)^2}.$$

On en déduit que $y^2 = x^2$ et donc $y = \pm x$. De plus, $xy^3 = -\mu \geqslant 0$, donc on doit avoir $y = x$.

(c) Comme x et y sont non nuls, on a $\mu \neq 0$, donc $h(x, y) = 0$. Ainsi, $1 = xy = x^2$ ce qui donne $x = \pm 1$. Nous avons donc deux points critiques sous contraintes $(1, 1)$ et $(-1, -1)$, qui donnent la même valeur de f, à savoir $1/2$. Ainsi, le minimum de f sur $\mathcal{D}$ est égal à $1/2$.

Exercice 2 (Optimisation linéaire). On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

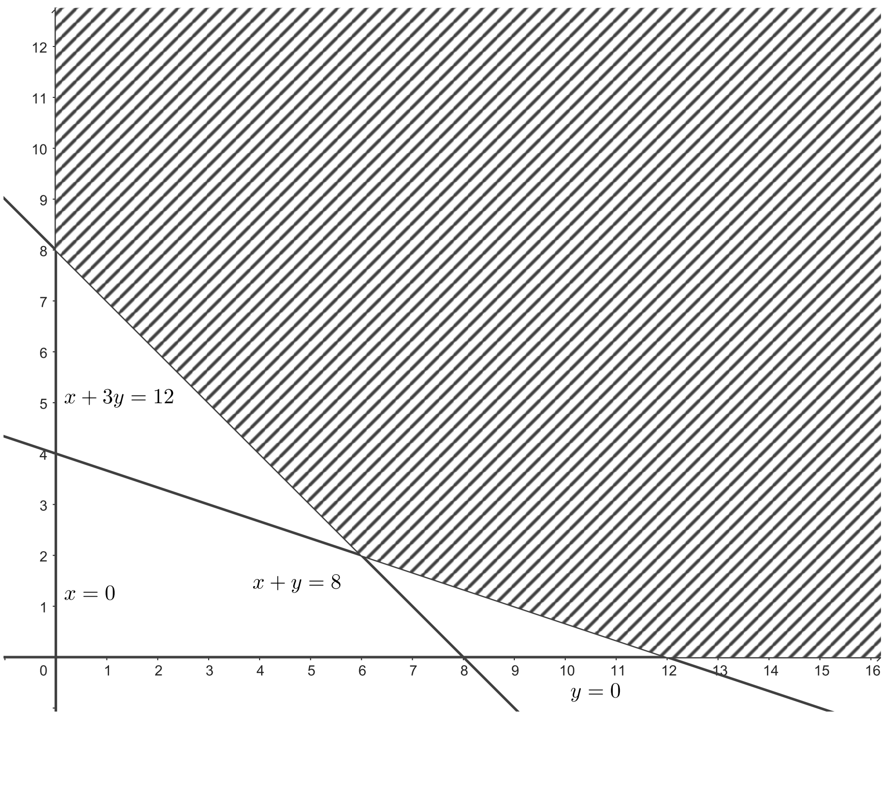
$$f(x, y) = 6x + 9y.$$

On cherche son minimum sous les contraintes

$$\begin{cases} x + 3y \geqslant 12 \\ x + y \geqslant 8 \\ x, y \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Le gradient de f est égal à $\nabla f(x, y) = (6, 9)$, qui n'est jamais nul. Or, s'il y avait un extremum local en un point intérieur, alors le gradient devrait s'y annuler.

2. Voici la figure :



3. (a) Un calcul direct donne les coordonnées suivantes : $(0,0)$, $(0,4)$, $(0,8)$, $(8,0)$, $(12,0)$ et $(6,2)$.

(b) Parmi les points précédents, ceux qui sont dans P – et qui en sont donc les sommets – sont $p_1 = (12,0)$, $p_2 = (0,8)$ et $p_3 = (6,2)$.

4. D'après le THÉORÈME DE LA SOLUTION-SOMMET, l'extremum est atteint sur un sommet et il suffit donc de comparer les valeurs : $f(p_1) = 72$, $f(p_2) = 72$ et $f(p_3) = 54$. Ainsi, f atteint son minimum au point p_3, et ce minimum vaut 54.

Exercice 3. Partie I.

1. (a) Pour $x \in \mathcal{D}$, on a $-1 \leqslant x_i \leqslant 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, donc $\mathcal{D}$ est bornée. De plus, cette partie est l'intersection de $\mathbb{R}_+^n$ et $g^{-1}(\{0\})$ qui sont fermés (car g est continue), donc c'est un fermé. Ainsi, $\mathcal{D}$ est bien compacte.

(b) La fonction étant polynomiale, elle est continue sur $\mathcal{D}$ qui est compacte, donc elle est bornée et atteint ses bornes.

2. (a) On a $\nabla h_i(x) = e_i$, où $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $\nabla g(x) = \sum_i e_i$.

(b) Les conditions KKT s'écrivent, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ avec $\mu_i \leqslant 0$,

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2x_i & = & \lambda + \mu_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i & = & -1 \\ \mu_i x_i & = & 0 \end{array}\right.$$

Partie II.

3. Par définition, si la contrainte h_i est active alors $\widetilde{x}_i = h_i(\widetilde{x}) = 0$.

4. (a) Comme

$$\sum_{i=1}^n \widetilde{x}_i = -1,$$

on ne peut pas avoir $\widetilde{x}_i = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, donc $p < n$.

(b) Si h_i est inactive, on doit avoir $\mu_i = 0$, donc la i-ième condition KKT devient $2x_i = \lambda$ et le résultat suit.

(c) Notons $h_{i_1}, \cdots, h_{i_p}$ les contraintes actives. Alors, $\widetilde{x}_{i_1} = \cdots = \widetilde{x}_{i_p} = 0$, donc

$$\begin{aligned} -1 &= \sum_{i=1}^n \widetilde{x}_i \\ &= \sum_{i\notin\{i_1,\cdots,i_p\}} \widetilde{x}_i \\ &= \sum_{i\notin\{i_1,\cdots,i_p\}} \frac{\lambda}{2} \\ &= (n-p)\frac{\lambda}{2}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

5. Si une contrainte i était active, alors on aurait

$$0 = \widetilde{x}_i = \lambda + \mu_i,$$

d'où $\mu_i = -\lambda = 2/(n-p) > 0$. Or $\mu_i \leqslant 0$, donc on a une contradiction.

Partie III.

6. (a) La fonction f est quadratique, et la matrice associée est l'identité, qui est bien définie positive, donc f est convexe (on peut également calculer directement la Hessienne, qui est la matrice identité).

(b) La contrainte d'égalité est linéaire et les contraintes d'inégalité, étant linéaires, sont convexes. Donc, tout point vérifiant les conditions KKT est un minimum global sous contraintes.

7. D'après la seconde partie, le seul point vérifiant les conditions KKT est celui dont toutes les coordonnées sont égales à $\lambda/2$. La contrainte $g(\widetilde{x}) = 0$ donne alors $\lambda/2 = -1/n$. On obtient donc comme minimum de f

$$f(\widetilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}.$$

Partie IV.

8. Posons $v = \sum_i e_i$ et $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$. Le Lagrangien du problème s'écrit alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x,\lambda,\mu) &= \|x\|^2 - \lambda(\langle x, v\rangle + 1) - \langle x, \mu\rangle \\ &= \|x\|^2 - \langle x, \lambda v + \mu\rangle - \lambda.\end{aligned}$$

Pour minimiser cette quantité par rapport à x, il faut prendre $x = (\lambda v + \mu)/2$, ce qui donne

$$f^*(\lambda,\mu) = -\frac{1}{4}\|\lambda v + \mu\|^2 - \lambda.$$

9. Le Théorème de Slater affirme que si la fonction à minimiser et les contraintes d'inégalités sont convexes, si les contraintes d'égalités sont affines, si 0 est dans l'intérieur de $g(U)$ et s'il existe un point x satisfaisant les contraintes et tel que $h_j(x) < 0$ pour tout x, alors le problème dual a la même solution que le problème primal.

10. Le problème dual consiste à maximiser la fonction $f^*(\lambda,\mu)$ sous les contraintes $\mu \leqslant 0$. Il suffit de vérifier les hypothèses ci-dessus. Celles sur la convexité ou l'affinité sont évidentes. De plus, g étant linéaire, on a $g(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$ qui est ouvert et contient 0. Enfin, le point x de coordonnées $x_i = -1/n$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ vérifie les contraintes, et $h_j(x) < 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$. Ainsi, d'après le Théorème de Slater, le maximum de f^* sous les contraintes $\mu \leqslant 0$ est égal à $1/n$.

Partie V. (Bonus)

11. Pour $x \in \mathcal{D}$, on a pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ que $0 \leqslant |x_i| \leqslant 1$, et donc que

$$x_i^2 = |x_i|^2 \leqslant |x_i|.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \\ &= 1.\end{aligned}$$

Nous avons par conséquent trouvé une borne supérieure de f et il suffit de montrer qu'elle est atteinte. Or, $f(-e_i) = 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, donc le maximum de f est 1.