Examen – Première session

Durée de l'épreuve : 3 heures.

Aucun document n'est autorisé, ni aucun dispositif électronique.

Exercice 1 (Optimisation sous contraintes)**.** On considère la fonction $f : U \to \mathbb{R}$, avec $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

1. Calculer le gradient de f en tout point $(x,y) \in U$.

2. (a) Montrer que 0 est le minimum global de f
   (b) Montrer que si (x,y) est un point critique de f, alors $x = 0$ ou $y = 0$.
   (c) La fonction f possède-t-elle un maximum global ?

3. On cherche maintenant les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x,y) \in U \mid x^4 + y^4 = 2\}$.
   (a) Montrer que la méthode des multiplicateurs de Lagrange s'applique en tout point.
   (b) Déterminer les points critiques sous contrainte (il y en a huit).
   (c) Déterminer les extrema de f sur $\mathcal{E}$.

4. On veut maintenant trouver le minimum de f sur l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x,y) \in U \mid xy \geqslant 1\}$.
   (a) Vérifier que les contraintes sont qualifiées en tout point.
   (b) On admet l'existence d'un minimum global. En utilisant les conditions KKT, montrer que s'il y a un minimum en un point (x,y), alors $y = x$.
   (c) En déduire le minimum recherché.

Exercice 2 (Optimisation linéaire)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = 6x + 9y.$$

On cherche son minimum sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+3y & \geqslant & 12 \\ x+y & \geqslant & 8 \\ x,y & \geqslant & 0 \end{array} \right.$$

On note P l'ensemble des points vérifiant les contraintes.

1. Justifier que f n'a pas d'extremum sur l'ensemble $\mathring{P}$ des points pour lesquels toutes les inégalités sont strictes.

2. Faire un dessin représentant P et les quatre droites délimitant les demi-plans formant P.

3. (a) Déterminer les coordonnées des six points d'intersection des droites précédentes.
   (b) En déduire les sommets de P.

4. On admet que f a bien un minimum sous contraintes, déterminer sa valeur.

T.S.V.P.

Exercice 3. Le but de cet exercice est d'optimiser la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

sur l'ensemble

$$\mathcal{D} = \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = -1 \quad \& \quad x_i \leqslant 0 \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$$

Partie I.

1. (a) Montrer que $\mathcal{D}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.
   (b) En déduire que f admet un maximum global et un minimum global sur $\mathcal{D}$.
2. On pose, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $h_i(x) = x_i$ et

$$g(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

   (a) Calculer les gradients des fonctions g et h_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
   (b) Écrire les conditions KKT associées à ce problème d'optimisation (on ne demande pas de vérifier la qualification des contraintes).

Partie II. Soit $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \cdots, \widetilde{x}_n)$ un point auquel les conditions KKT sont vérifiées. On note p le nombre de contraintes actives au point $\widetilde{x}$.

3. Si la contrainte h_i est active, que vaut $\widetilde{x}_i$?
4. (a) Montrer que $p < n$.
   (b) Montrer que si h_i est inactive, alors $\widetilde{x}_i = \lambda/2$, où λ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'égalité $g(x) = 0$.
   (c) En déduire que $\lambda = -2/(n-p)$.
5. Conclure que toutes les contraintes sont inactives en $\widetilde{x}$.

Partie III. Nous allons maintenant utiliser ce qui précède pour trouver le minimum de f.

6. (a) Montrer que la fonction f est convexe.
   (b) En déduire que si $\widetilde{x}$ vérifie les conditions KKT, alors c'est un minimum. Est-il global ?
7. Déterminer le minimum global de f sur $\mathcal{D}$.

Partie IV. On s'intéresse maintenant au problème dual.

8. Calculer la fonction duale

$$f^*(\lambda, \mu_1, \cdots, \mu_n) = \inf_x \left(f(x) - \lambda g(x) - \sum_{j=1}^{n} \mu_j h_j(x) \right).$$

9. Rappeler l'énoncé du Théorème de Slater.
10. En déduire la solution du problème dual.

Partie V. (Bonus)

11. Quel est le maximum de f sur $\mathcal{D}$?