Partiel

Exercice 1. **1**. La fonction f étant polynomiale, elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. On calcule
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -3y^2+2x \\ 4y^3-6xy \end{pmatrix}.$$

3. Si le gradient s'annule, on a $x = 3y^2/2$, donc $4y^3 = 9y^3$, c'est-à-dire $y = 0$. Ainsi, le seul point critique est $(0,0)$.

4. La Hessienne de f est
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -6y \\ -6y & 12y^2-6x \end{pmatrix}.$$
En $(0,0)$, la matrice est diagonale avec pour coefficients 2 et 0. Ainsi, le point critique est dégénéré et on ne peut pour l'instant rien déduire, si ce n'est qu'il n'y a pas de minimum local puisqu'alors la Hessienne serait négative.

5. On a $f(y^2,y) = -y^4$ donc il y a des points arbitrairement proches de $(0,0)$ auxquels la fonction prend des valeurs négatives. D'autre part, $f(0,y) = y^4$ donc il y a des points arbitrairement proches de $(0,0)$ auxquels la fonction prend des valeurs négatives. Ainsi, $(0,0)$ n'est pas un maximum local.

Exercice 2. Soit $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ les fonctions définies respectivement par
$$f(x,y,z) = x+y+z$$
$$g(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6}.$$

1. Si $(x,y,z) \in \mathcal{S}$, on a $x^2 \leqslant 2$, $y^2 \leqslant 4$ et $z^2 \leqslant 6$, donc $\|(x,y,z)\|^2 \leqslant 12$. Autrement dit, $\mathcal{S}$ est borné. De plus, g est continue et $\mathcal{S} = g^{-1}(\{1\})$, donc c'est un fermé. Dans $\mathbb{R}^n$, les parties fermées et bornées sont compactes, d'où le résultat.

2. La fonction f est continue sur le compact $\mathcal{S}$, donc d'après le cours elle y admet un minimum global et un maximum global.

3. On remarque d'abord que $\nabla g(x,y,z) = (x, y/2, z/3)$ ne s'annule qu'en $(0,0,0) \notin \mathcal{S}$, donc on peut utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Ainsi, pour un extremum il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y/2 \\ z/3 \end{pmatrix}.$$
On voit que $\lambda \neq 0$ et que $x = y/2 = z/3$. En reportant dans la contrainte on trouve alors
$$\frac{x^2}{2} + x^2 + \frac{3x^2}{2} = 1,$$

d'où $x^2 = \frac{1}{3}$. On a donc deux points critiques sous contraintes :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right) \quad \& \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}\right).$$

Le premier donne une valeur positive pour f tandis que le second donne une valeur négative. Donc, le premier est le maximum global tandis que le second est le minimum global :

$$\max_{\mathcal{S}} f = 2\sqrt{3} \quad \& \quad \min_{\mathcal{S}} f = -2\sqrt{3}.$$

Exercice 3 (Fonction de production CES). **Partie I.**

1. Il suffit de calculer

$$\begin{aligned} tF(K,L) &= (at^\gamma K^\gamma + (1-a)t^\gamma L^\gamma)^{1/\gamma} \\ &= F(tK, tL). \end{aligned}$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial K} &= \frac{1}{\gamma} a\gamma K^{\gamma-1} \left(aK^\gamma + (1-a)L^\gamma\right)^{1/\gamma - 1} \\ &= aK^{\gamma-1} \left(aK^\gamma + (1-a)L^\gamma\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ &= aK^{-\gamma\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left(aK^\gamma + (1-a)L^\gamma\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ &= a\left(aK^{\gamma-\gamma} + (1-a)L^\gamma K^{-\gamma}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ &= a\left(a + (1-a)\left(\frac{L}{K}\right)^\gamma\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ &= a\left(a + (1-a)k^{-\gamma}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \end{aligned}$$

Un calcul similaire donne
$$\frac{\partial F}{\partial L} = (1-a)\left(ak^\gamma + 1 - a\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

(b) Les dérivées partielles sont des sommes de termes positifs élevés à une puissance, elles sont donc positives.

(c) On voit que $\partial F/\partial K$ est une fonction décroissante de k. Comme k est une fonction croissante de K et décroissante de L, on en conclut que $\partial F/\partial K$ croît quand K décroît ou quand L croît.

Partie II.

3. On a

$$\begin{aligned} T(K,L) &= \frac{(1-a)(ak^\gamma + 1 - a)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{a(a + (1-a)k^{-\gamma})^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \\ &= \frac{1-a}{a} k^{1-\gamma}. \end{aligned}$$

4. Il suit de la question précédente que $\ln(T(K,L)) = f(\ln(k))$ avec

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-a}{a}\right) + (1-\gamma)x.$$

5. L'élasticité de substitution est donc $1/(1-\gamma)$, qui est bel et bien constante.

Partie III.

6. On a

$$\frac{\partial F}{\partial K}(k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{k}} \quad \& \quad \frac{\partial F}{\partial L}(k) = \frac{\sqrt{k}}{4} + \frac{1}{4}.$$

7. Si la dérivée partielle s'annule, alors $p\dfrac{\partial F}{\partial K}(k) = r$, donc

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{4r}{p} - 1$$

et le résultat suit.

8. Si on a un point critique, alors la seconde dérivée partielle doit également s'annuler, ce qui donne

$$k = \left(\frac{4w}{p} - 1\right)^2.$$

Pour que ceci se réalise, il faut que les deux expressions de k coïncident, ce qui donne

$$\left(\frac{4w}{p} - 1\right)^2 = \left(\frac{4r}{p} - 1\right)^{-2}$$

Le résultat de la question précédente montre que $4r/p - 1 \geqslant 0$ et il en est de même pour $4w/p - 1$ donc on peut enlever les carrés. En multipliant on trouve alors

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{4w}{p} - 1\right)\left(\frac{4r}{p} - 1\right) \\ &= \frac{16wr}{p^2} - \frac{4r}{p} - \frac{4w}{p} + 1 \end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$4wr = p(w+r).$$