Développement de la compétence « Chercher » en Troisième

Quel que soit le niveau de classe dans lequel on enseigne, une difficulté revient inexorablement toquer à la porte de chaque enseignant de mathématiques : comment accompagner les élèves qui ne maîtrisent pas encore la compétence « Chercher » ? Cet article nous donne des pistes de réflexion.

Morgan Gilot

« Extraire d'un document les informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à ses connaissances. »

« S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, émettre une conjecture. »

« Tester, essayer plusieurs pistes de résolution. »

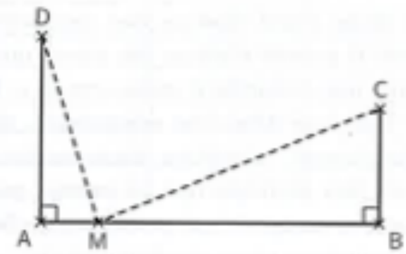
Ces objectifs sont extraits des items qui décrivent la compétence « Chercher » dans le programme de mathématiques du cycle 4.

L'intention de cet article est de présenter une organisation permettant l'acquisition progressive et le développement de cette compétence par des élèves de Troisième.

La « tâche-objectif » [1]

À l'issue du chemin proposé, du parcours d'accompagnement, chaque élève de Troisième devrait (théoriquement) être en mesure de donner à voir des éléments relatifs à la compétence « Chercher » autour de l'activité suivante :

On considère la configuration ci-contre où : $AB = 13\,\text{cm}$; $AD = 5\,\text{cm}$; $BC = 2\,\text{cm}$ et $M \in [AB]$.
Le dessin n'est pas à l'échelle.



Où placer le point M sur [AB] pour que les aires des triangles AMD et BMC soient égales ?

Afin que les objectifs aient une chance d'être atteints, il est nécessaire, avant de proposer cette tâche, que l'enseignant s'assure que les élèves aient à leur disposition les savoir-faire numériques (tableur, GeoGebra) nécessaires à la mise en place de différentes stratégies. Sans cela, il y a fort à parier que les élèves se contenteront, au mieux, de quelques essais-erreurs réalisés à la main.

Les différents éléments relatifs à la compétence « Chercher » attendus peuvent être :

- quelques essais-erreurs faits à la main avec ajustements des essais en fonction des résultats trouvés ;

1. Tâche à atteindre à la fin du cycle d'apprentissage.

- essais-erreurs faits avec le tableur, avec adaptation du pas pour déterminer une mesure au millimètre près ;
- utilisation de GeoGebra pour reproduire la configuration proposée et déplacer le point M sur [AB] pour comparer les aires de ADM et MBC ;
- utilisation de GeoGebra pour tracer les courbes des aires de ADM et de MBC en fonction de AM par exemple ;
- mise en équation et résolution de l'équation.

Pour déterminer la solution de cette « tâche-objectif », le recours au modèle d'évolution continu (établi à partir de fonctions) est nécessaire : la réponse est AM = $\frac{26}{7}$. En remplaçant « AD = 5 cm » par « AD = 3 cm », le modèle d'évolution discret (établi à partir de suites) suffirait car la réponse serait AM = 5,2 cm, ce qui pourrait être trouvé à la main ou à l'aide d'un outil numérique (tableur ou GeoGebra).

Ici, le choix d'une réponse non décimale est délibéré. Il permet d'inciter les élèves qui ont opté pour une démarche d'essais-erreurs (« S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter… ») à affiner leur stratégie (qui ne permet pas de conclure), à adapter leur procédure (« Tester, essayer plusieurs pistes de résolution »).

Les trois activités qui constituent le « chemin »

Chacune des activités qui constituent le « chemin » qui conduit à la « tâche-objectif » a pour objectif d'accompagner les élèves dans la maîtrise d'outils numériques et mathématiques, et aussi dans la prise de conscience des limites de certaines démarches.

Pour chaque activité, les élèves sont disposés en îlots hétérogènes élaborés par le professeur et une classe-mobile est réservée. Ainsi, chaque îlot peut, s'il le souhaite, utiliser un ou plusieurs ordinateurs pour avancer dans le problème. Il suffit, pour cela, que les élèves aillent chercher un ordinateur au fond de la salle. Les ordinateurs ne sont pas déposés préalablement sur les tables pour ne pas orienter les stratégies (il n'est pas rare que des îlots n'aillent pas en chercher durant certaines séances). À l'issue de chaque séance d'une heure, chaque îlot doit avoir trouvé une solution et une synthèse doit avoir été effectuée.

Première activité (en septembre)

Une population de bactéries augmente de 5 % toutes les heures. Au bout de combien d'heures cette population aura-t-elle triplé ?

Cette situation a pour objectif d'amener tous les élèves à entrer dans une démarche mobilisant un modèle d'évolution discret. Plus particulièrement, le professeur aimerait que les élèves retiennent que :

- il est parfois nécessaire de prendre des initiatives pour avancer dans la résolution d'un problème (par exemple, commencer par étudier un cas particulier) ;
- les outils numériques peuvent faire gagner du temps, notamment avec l'automatisation de certains calculs.

L'énoncé ne présente pas de problème de compréhension particulier. Le seul point qui représente une réelle difficulté pour les élèves est que la population initiale, à l'instant $t = 0$, n'est pas connue. La régulation sur ce point est assurée par la disposition en îlots. En effet, un élève du groupe propose en général, assez rapidement, « on n'a qu'à essayer avec un nombre de départ au pif ». Si ce n'est pas le cas dans chacun des groupes, une mise en commun, un point-étape, permettra à tous les groupes bloqués d'opter pour cette stratégie.

Les élèves calculent alors les augmentations successives en effectuant deux étapes à chaque fois : la multiplication de la population de l'année en cours par $\frac{5}{100}$ et l'addition de ce produit à la population de l'année en cours (la multiplication par $\left(1+\frac{5}{100}\right)$ n'a pas encore été abordée).

Devant la lenteur de la progression, certains élèves ont la bonne idée de vouloir trouver une stratégie plus efficiente, qui « va plus vite » et sont souvent tentés par des « fausses bonnes idées » reposant sur des connaissances partielles ou erronées au sujet des pourcentages. Par exemple :

- « 5 % × 40 = 200 % donc il faut 40 ans » ;
- « 5 % de 100 personnes = 5 personnes, 40 × 5 personnes = 200 personnes et 100 personnes + 200 personnes = 300 personnes, qui est le triple de 100 personnes. Donc il faut 40 ans ».

Encore une fois, la disposition en îlots et la présence de l'enseignant qui circule dans la classe permettent la mise en défaut de ces stratégies et leur régulation.

Une fois toutes les stratégies erronées écartées, le professeur propose à l'ensemble de la classe une nouvelle mise en commun. Le « c'est trop long à faire » fait rapidement son apparition et une discussion est lancée sur la manière de faire plus rapidement, d'automatiser les calculs. Si les élèves ont manipulé régulièrement le tableur lors des années précédentes, on peut espérer que cette proposition vienne des élèves.

C'est à ce moment de la séance que l'apport nouveau est fait (et devra être clairement explicité par l'enseignant comme étant « à retenir »). C'est ce dernier qui, on l'espère, sera remobilisé par la suite et c'est celui-ci que l'enseignant souhaite voir mémorisé par les élèves. Une synthèse écrite sera alors co-construite avec les élèves. Cette dernière peut prendre diverses formes (une phrase, une carte mentale qui pourra être complétée tout au long du « chemin », ...). Dans cette synthèse écrite, prenant la forme d'un encadré « À retenir » dans le cahier, figurent les deux éléments-cibles devant être retenus :

- la nécessité de prendre des initiatives dans une démarche de recherche (par exemple : commencer par étudier un cas particulier) ;
- le fait que les outils numériques peuvent faire gagner du temps, notamment grâce à l'automatisation de certains calculs.

	A	B	C
1	Année	Population	5% de la pop
2	0	20	1
3	1	21	1,05
4	2	22,05	1,1025
5	3	23,1525	1,157625
6	4	24,310125	1,21550625
7	5	25,525631	1,276281563
8	6	26,801913	1,340095641
9	7	28,142009	1,407100423
10	8	29,549109	1,477455444
11	9	31,026564	1,551328216
12	10	32,577892	1,628894627
13	11	34,206787	1,710339358
14	12	35,917126	1,795856326
15	13	37,712982	1,885649142
16	14	39,598631	1,9799316
17	15	41,578563	2,07892818
18	16	43,657491	2,182874589
19	17	45,840366	2,292018318
20	18	48,132384	2,406619234
21	19	50,539003	2,526950196
22	20	53,065953	2,653297705
23	21	55,719251	2,785962591
24	22	58,505214	2,92526072
25	23	61,430475	3,071523756

Utilisation du tableur pour automatiser les calculs.

Deuxième activité (en novembre)

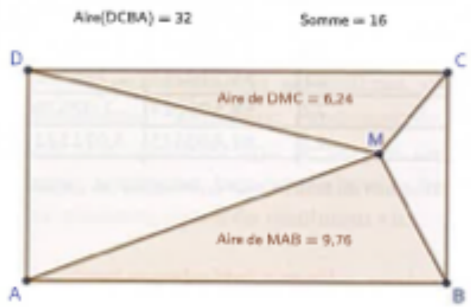
On considère un rectangle ABCD. Clara affirme « *Si on prend un point M à l'intérieur de ce rectangle, alors la somme des aires des triangles* ABM *et* CDM *est égale à la moitié de l'aire du rectangle* ABCD ». Qu'en pensez-vous ? On présentera soigneusement toute la démarche.

Avec cette tâche, l'enseignant poursuit deux nouveaux objectifs :

- amener les élèves à passer d'un modèle d'évolution discret à un modèle d'évolution continu ;
- découvrir ou réinvestir quelques fonctionnalités du logiciel GeoGebra.

Sans grande surprise, certains élèves répondent immédiatement *« ça ne peut pas être vrai, ça dépend d'où se situe le point M dans le rectangle car les triangles sont plus ou moins grands selon où se trouve le point M »*. Une représentation sur papier est rapidement effectuée, des mesures sont prises et des calculs sont faits. Le cas où M appartient à un des côtés du rectangle, voire où M est un sommet du rectangle, est testé par les élèves (qui cherchent le cas qui ne fonctionne pas). Après deux ou trois exemples (au bout d'environ quinze minutes), les élèves, travaillant en îlots, arrivent en général tous à la conclusion « C'est vrai ». Une mise en commun s'impose alors. En général, les élèves ne pensent pas à utiliser GeoGebra.

C'est une belle occasion de le faire avec eux, d'utiliser les fonctionnalités « Polygone » et « Aire » et de voir que, en déplaçant le point M à l'intérieur du rectangle, la somme des aires de ABM et CDM ne varie pas.



Arrive alors LA question cruciale : *« Toutes ces données nous permettent-elles de conclure ? »*. Une discussion doit alors s'engager sur le statut de l'affirmation « C'est vrai ». Pour la quasi-totalité des élèves, il est clair que les 3 ou 4 exemples étudiés sur papier ne suffisent pas à prouver que l'affirmation est vraie et que ces quelques exemples permettent d'établir seulement une conjecture. Cependant, après l'utilisation du logiciel GeoGebra, de nombreux élèves sont convaincus que l'outil numérique a permis de traiter tous les cas et a donc fourni une preuve à l'affirmation « C'est vrai ». Si l'enseignant ne veut pas que l'utilisation du logiciel s'avère contre-productive, il va devoir s'attarder un peu sur l'outil numérique lui-même et en souligner certaines limites : ici, le fait que les coordonnées de M soient décimales, avec une partie décimale à deux chiffres, et qu'entre 3,26 et 3,27, on ait une infinité de nombres, dont certains sont non décimaux, que GeoGebra ne nous permet pas de traiter.

Ici, l'obstacle est grand, car les élèves sont confrontés au passage d'un modèle d'évolution discret, avec un ensemble fini de points à coordonnées décimales avec une partie décimale à deux chiffres, à un modèle d'évolution continu comprenant un ensemble infini de points de coordonnées réelles.

Bien que la fonction « Aire » relève du modèle d'évolution continu, le logiciel GeoGebra ne permet pas une mise en œuvre de ce modèle. En effet, en supposant A (0 ; 0) ; AB = 12 et AD = 7 (notation de la figure précédente), on a un nombre fini de positions possibles pour le point M avec GeoGebra, en raison des limites de cet outil : les points $M_{n,k}$ de coordonnées $\left(\frac{n}{100}\,;\,\frac{k}{100}\right)$ avec $n \in [\![0\,;1\,200]\!]$ et $k \in [\![0\,;700]\!]$. Ainsi l'ensemble des points M possibles est $[\![0\,;1\,200]\!] \times [\![0\,;700]\!]$ et il est de cardinal $1\,201 \times 701 = 841\,901$. On a donc 841 901 positions possibles pour le point M dans un rectangle de longueur 12 et de largeur 7. En effet, GeoGebra ne peut pas placer le point M (π ; π). Ces limites de GeoGebra en font un outil de simulation « faussement-continu ». Une réflexion autour de ces limites est intéressante à mener avec les élèves.

Ce travail autour de la compétence « Modéliser » est loin d'être aisé pour les élèves et nécessite qu'on y passe du temps avant de passer à la deuxième phase du travail : la preuve.

Une fois établi le statut de conjecture, j'invite les élèves à démontrer ce résultat.

On passe alors au travail de la compétence « Raisonner ». Pour la preuve, les élèves de Troisième ont tendance à se ruer sur le calcul littéral en prenant d'abord des valeurs chiffrées pour AB et AD.

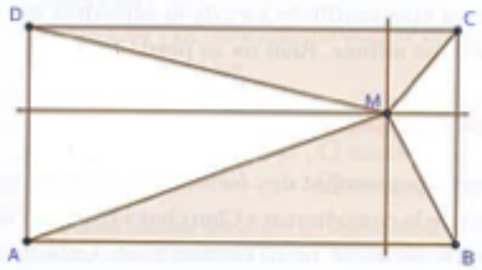
On peut accompagner les élèves à effectuer cette démonstration dans le cas général, en remplaçant les valeurs chiffrées présentes dans leur preuve par « AB » et « AD » :

On note H le pied de la hauteur de ABM issue de M et H' le pied de la hauteur de CDM issue de M. En notant HM = x, on a, comme les points H, M et H' sont alignés, H'M = AD − x.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABM} + \mathcal{A}_{CDM} &= \frac{AB \times x}{2} + \frac{CD \times (AD - x)}{2}\\ &= \frac{AB \times x - CD \times x + CD \times AD}{2}\\ &= \frac{AB \times AD}{2}\\ &= \frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{2}.\end{aligned}$$

En classe de Sixième ou en début de classe de Cinquième, les stratégies auraient sans doute été différentes. Il est intéressant de présenter en Troisième une autre preuve, plus géométrique, afin de souligner qu'il n'y a pas qu'une façon de bien faire :

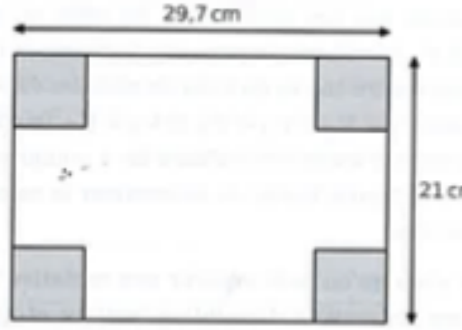
On trace la parallèle à (CD) passant par M et la parallèle à (BC) passant par M.



On a ainsi construit quatre petits rectangles dont la somme des aires est égale à l'aire de ABCD.
Or, chacun de ces quatre petits rectangles est composé d'un triangle blanc et d'un triangle colorié qui sont de même aire.
Ainsi, la somme des aires des surfaces blanches est égale à la somme des aires des surfaces coloriées.
La somme des aires de ABM et CDM est donc égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD.

Troisième activité (en février)

Lucie veut fabriquer une boîte sans couvercle à partir d'une feuille qui est au format A4 (29,7 cm × 21 cm). Elle part pour cela d'une feuille A4 dont elle découpe à chaque coin un carré, comme sur le schéma suivant (les quatre carrés découpés sont superposables) :



Ce schéma n'est qu'un exemple et n'est pas à l'échelle.
Lucie obtient ainsi un patron dont elle replie les faces latérales pour obtenir la boîte voulue. Comment doit-elle se débrouiller pour que sa boite ait le plus grand volume possible ?
On présentera soigneusement toute la démarche.

Cette tâche, très classique, a pour objectifs de :

- poursuivre le travail sur le passage d'un modèle d'évolution discret à un modèle d'évolution continu ;
- tracer une courbe avec le logiciel GeoGebra.

Cette activité est plus difficile que les précédentes car elle nécessite un passage du plan à l'espace délicat pour les élèves. Pour un carré découpé de côté donné, la détermination des dimensions du pavé droit alors obtenu pose en général problème à de nombreux élèves. La régulation par l'îlot est alors, encore une fois, essentielle car elle permet, par la manipulation ou la visualisation explicitée, d'amener tous les élèves à comprendre qu'on retranche deux fois la longueur du côté du carré à 29,7 cm pour obtenir la longueur de la boite parallélépipédique ; qu'on retranche deux fois la longueur du côté du carré à 21 cm pour obtenir la largeur de la boite et que la longueur du côté du carré correspond à la hauteur de la boite. Cette étape de manipulations et de calculs sur des cas particuliers peut prendre du temps, mais est absolument nécessaire pour aborder sereinement la suite.

De plus, les différents essais des élèves seront réalisés en fonction des résultats obtenus lors de l'étude des cas précédents. En effet, si, en notant V_k le volume du pavé droit obtenu en découpant quatre carrés de k cm de côté, les élèves trouvent $V_1 < V_2 < V_3 < V_4$ et $V_4 > V_5$, ils commenceront à tester des valeurs de k comprises entre 4 et 5 pour tenter de déterminer la valeur recherchée.

C'est alors qu'on peut espérer une tentative de passage au modèle d'évolution continu et que, suite à la tâche réalisée en novembre, certains élèves pensent à « prendre x pour la longueur du côté du carré ». Ils arriveront ainsi à l'expression $(29{,}7 - 2x)(21 - 2x)x$ mais ne sauront vraisemblablement pas quoi en faire. Certains essaieront sans doute de développer cette expression ce qui, malgré un léger intérêt technique, ne permettra pas réellement d'avancer dans le problème posé.

À ce moment-là de la séance, une mise en commun est proposée par le professeur. Ce dernier peut amener les élèves à formuler la nécessité de tracer une courbe pour observer visuellement l'évolution du volume. Si la notion de fonction a été abordée (ce qui est préférable), il est intéressant de présenter la fonctionnalité de GeoGebra qui permet d'obtenir une courbe à partir d'une expression algébrique donnée. À l'aide de l'outil numérique, on aboutit alors à « le côté du carré doit être entre 4,03 cm et 4,06 cm ». Comme dans l'activité du mois de novembre, une discussion sur le statut de ce résultat s'impose et conduira à évoquer certaines limites du logiciel de géométrie dynamique.

Un point important ici est de bien préciser aux élèves que les outils mathématiques dont nous disposons en classe de Troisième ne permettent pas de déterminer la valeur exacte de la longueur du carré recherchée, mais que de tels outils existent et seront abordés au lycée.

Retour sur la « tâche-objectif »

Les trois activités présentées précédemment ont pour objectif « d'équiper » les élèves de différents outils pouvant être mobilisés dans leur recherche. Ainsi, les entrées dans la « tâche-objectif » sont multiples et sont surtout évolutives : les élèves qui commencent par des essais-erreurs à la main et peuvent rapidement ajuster leurs essais en fonction des résultats trouvés (comme dans l'activité sur le volume de la boite). On peut de plus espérer qu'ils mobilisent des outils numériques pour gagner en efficacité (essais-erreurs automatisés avec tableur ou avec GeoGebra, étude de l'intersection de deux courbes, ...) et expliciter le statut de conjecture du résultat ainsi obtenu.

Bien entendu, la preuve par une mise en équation et sa résolution est également attendue, mais cela relève davantage de la compétence « Raisonner ».

Cerise sur le gâteau : cette « tâche-objectif » pourra être réutilisée lors de la séquence sur les fonctions affines. Rien ne se perd !

Conclusion

L'accompagnement des élèves dans le développement de la compétence « Chercher » est loin d'être une tâche aisée pour l'enseignant. Cela nécessite une importante anticipation afin de construire un parcours d'apprentissage évolutif et cohérent autour de cette compétence. Pour que ce parcours soit pertinent, il doit s'auto-alimenter : il est indispensable que les stratégies de recherche développées lors de tâches puissent servir lors des tâches suivantes afin que les élèves puissent les mémoriser et se les approprier en les mobilisant lors de situations nouvelles. Si une stratégie n'est utilisée qu'une et une seule fois, il est fort à parier qu'elle tombera rapidement dans les oubliettes. Cela implique une identification claire et explicite d'objectifs autour de la compétence « Chercher » ainsi qu'une banque de tâches au service de ces objectifs. Ces objectifs peuvent être évolutifs tout au long du cycle 4.

Comme nous l'avons vu dans les activités présentées, il n'est pas rare que le travail et l'observation de la compétence « Chercher » soient parasités par des questions de modélisation. En effet, on aurait pu objecter, à de multiples reprises, que, par exemple, le passage du discret au continu relève davantage de la compétence « Modéliser » que de la compétence « Chercher » *stricto sensu*, ce qui est tout à fait vrai. Sur ce point, j'ai tendance à penser qu'il n'est pas nécessaire d'être dogmatique. Les ensembles de savoirs, savoir-faire et savoir-être associés à chaque compétence ne sont pas deux à deux disjoints donc, il me semble inutile de chercher l'unicité dans l'étiquetage de certains éléments constitutifs de l'activité mathématique. L'important est que les élèves fassent des mathématiques, développent de façon progressive chacune des six compétences et que leurs enseignants les accompagnent dans cette acquisition.

Morgan Gilot est professeur de mathématiques au collège Pablo Neruda de Saint-Pierre-des-Corps (37).
morgan.gilot@ac-orleans-tours.fr