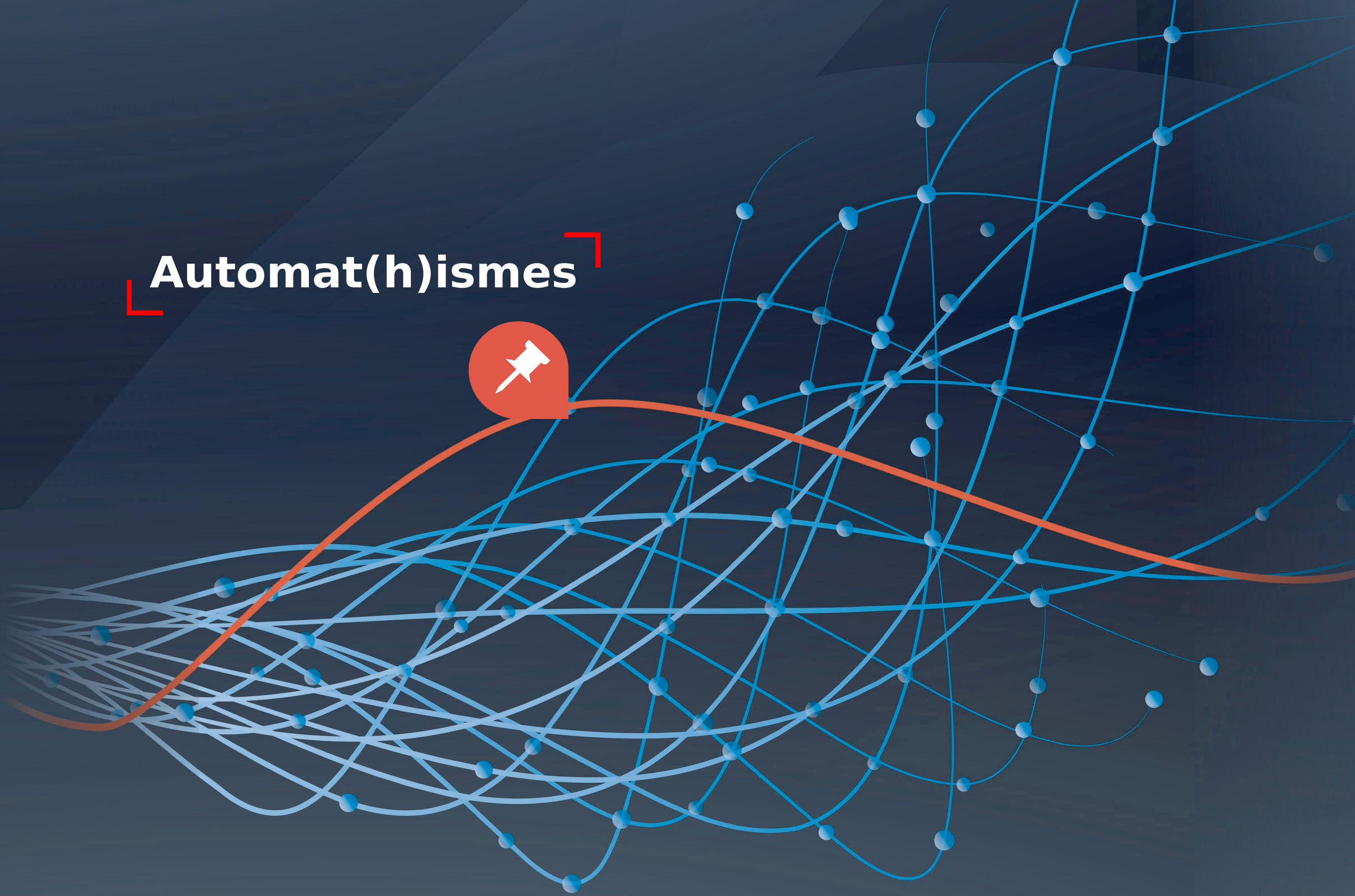
Le bulletin de l’APMEP - N° 552

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l’université

Avril, mai, juin 2024

Automat(h)ismes



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l’Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :

https://afdm.apmep.fr

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est joint le BGV n° 236

spécial « Journées Nationales »

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : *Claire PIOLTI-LAMORTHE*.

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Cécile KERBOUL*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTEVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON*.

Illustrateurs : *Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Olivier LONGUET*.

Équipe TeXnique : *Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Correspondant Publimath : *François PÉTIARD*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : juin 2024. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Croisements de points de vue sur la mesure

Les auteures montrent ici comment le croisement des points de vue entre didactique de la physique et didactique des mathématiques permet de porter un nouveau regard sur l'enseignement de la mesure et de la géométrie dans l'enseignement primaire et secondaire français [1].

Aurélie Chesnais & Valérie Munier

Certaines difficultés sont observées de façon récurrente dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques et ce, indépendamment des (nombreux) changements de programmes de ces dernières décennies.

Pourquoi est-il si difficile pour les élèves d'accepter que des longueurs de segments puissent valoir $\sqrt{2}$ ou $\frac{1}{3}$ [1, 2, 3] ?

Pourquoi tant d'élèves peinent-ils à comprendre, même encore à la fin du collège, qu'une conjecture sur un dessin nécessite une preuve et que la validation par une mesure obtenue avec un instrument ou un logiciel n'est pas suffisante ?

Pourquoi ont-ils des difficultés à manipuler des valeurs approchées et à gérer correctement leur rapport avec les valeurs exactes ?

Pourquoi est-il si difficile de travailler la modélisation mathématique de situations non mathématiques (issues d'un contexte « quotidien » ou d'une autre discipline, notamment la physique) de façon à ce que les élèves y voient un réel intérêt et en comprennent l'enjeu ?

Pourquoi, lorsque plusieurs élèves réalisent des mesures avec un instrument et ne trouvent pas exactement la même valeur, demandent-ils quelle est la « bonne » ?

Au-delà des objectifs d'apprentissages spécifiques liés à des programmes donnés, il nous semble que ces questions, qui mettent en jeu des mesures de grandeurs, sont essentielles de par le lien qu'elles entretiennent avec celle de la formation du citoyen : formation à la culture scientifique, à ses modes de pensée et ses pratiques, et particulièrement à la construction d'un esprit critique, nécessaire pour appréhender son environnement (matériel autant que virtuel et social) de façon raisonnée et maîtrisée, en appui sur ces savoirs et pratiques. En effet, elles nous semblent révélatrices de difficultés d'appréhension du rapport entre modèle (ou théorie) et réalité, et donc de difficultés liées à la modélisation de la réalité matérielle par les mathématiques et les sciences expérimentales qui est au cœur des pratiques scientifiques.

En physique, une part importante de l'activité consiste en effet à construire un dialogue entre champ empirique et champ théorique (les modèles pouvant être considérés comme des intermédiaires entre ces deux champs), et la mesure y joue un rôle crucial. Définie comme « processus consistant à obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur » [4], la mesure en physique est, par nature, associée à des incertitudes pouvant avoir diverses origines : l'observateur, l'instrument de mesure et la grandeur même qui fait l'objet du mesurage. En effet, quelle que soit la qualité du mesurage, la répétition de la mesure d'une grandeur ne donnera pas des valeurs toutes identiques. De ce fait, *« il ne suffit donc pas d'un nombre pour*

1. La bibliographie de l'article est consultable sur le site d'*Au fil des maths*.

exprimer la mesure, il en faut deux : l'estimation la plus probable de la grandeur et l'amplitude de l'intervalle à l'intérieur duquel elle a de grandes chances de se trouver, ce qu'on appelle un intervalle de confiance » [5]. Les mesures réalisées avec les instruments doivent ensuite être traitées pour donner des informations et/ou prendre des décisions sur le phénomène ou l'objet étudié, ce qui nécessite de prendre en compte les incertitudes de mesure. Par exemple, la mesure des valeurs d'intensité et de tension aux bornes d'un conducteur ohmique donnera des valeurs « presque » proportionnelles (des points « presque » alignés si on les représente graphiquement) et la prise en compte des incertitudes sera nécessaire pour savoir si on peut modéliser la relation entre ces grandeurs par une relation de proportionnalité (loi d'Ohm $U = RI$) ou pas et les limites de validité de ce modèle. L'élaboration de lois ou de modèles à partir de mesures nécessite ainsi d'établir des liens entre une forme de réalité (matérielle) et le modèle, entre l'empirique et le théorique, le mesurage matériel et le travail sur des objets « abstraits ».

En mathématiques, la géométrie apparaît par essence comme un moyen de modélisation de l'espace sensible en lien avec la mesure de grandeurs (rappelons que « géo-métrie » signifie étymologiquement « mesure de la Terre »). Historiquement, elle a été progressivement « théorisée » avec le processus fondateur de l'axiomatisation.

Du point de vue historique, dans les travaux d'Euclide, la mesure n'est pas encore un nombre, mais un rapport entre deux grandeurs, l'une étant prise pour référence. Aujourd'hui, les concepts de grandeur et mesure peuvent être définis l'un par rapport à l'autre, dans un sens ou dans l'autre [6, 7]. Un point de vue est de définir une fonction mesure, puis une grandeur comme classe d'équivalence de cette fonction. À l'inverse, on peut définir la mesure comme quantification des grandeurs et résultat d'un processus de « mesurage » (appelé aussi « procédé de mesure », « opération pratique de mensuration » [8, p. 566] ou « mesure pratique » [9, p. 28]) : la mesure est alors le rapport entre la grandeur mesurée et la grandeur choisie comme étalon, ou encore le nombre de reports de l'étalon nécessaire pour « couvrir » la grandeur. Chevallard et Chambris [10] parlent ainsi de « nombrement ».

Notons que, même dans cette dernière définition, la mesure comme le mesurage restent « théoriques » : la question des aspects « pratiques » liés à l'utilisation d'un instrument de mesure dans le monde matériel ne relève pas des mathématiques et les aléas liés à ces aspects sont considérés comme un « bruit » [11], le plus souvent ignoré. Tout mesurage est donc considéré comme « tombant juste » (c'est-à-dire « en supposant [...] que l'opération se fait exactement », [10]), sans incertitude, ce qui suppose une infinie précision.

Les « mesures » de grandeurs que l'on manipule en mathématiques correspondent ainsi à celles d'objets « théoriques » (infinis, sans épaisseur, éventuellement à plus de 3 dimensions etc.). On les obtient en calculant, par exemple en appliquant le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle ou en calculant une aire sous une courbe avec une intégrale. Les valeurs obtenues sont des nombres réels, non atteignables par des instruments, que le mathématicien qualifie de « valeurs exactes », par opposition aux valeurs obtenues avec un instrument, qui ne seront toujours qu'« approchées ».

Mais si la question de l'utilisation des instruments de mesure et la gestion des incertitudes associées est l'apanage des sciences expérimentales et ne concerne pas le mathématicien-géomètre [2], elle est cependant au cœur des problématiques d'apprentissage et d'enseignement de la géométrie dans l'école française, du fait même que la rencontre avec la mesure est d'abord liée à l'utilisation d'instruments de mesure (au premier chef,

2. Mais elle peut intéresser un mathématicien-statisticien qui prendrait cette question comme objet, par exemple pour la construction de modèles mathématiques des incertitudes de mesure au service d'applications en sciences expérimentales ou autres.

la règle graduée, dès le CP, mais aussi le rapporteur en Sixième). Cela conduit certains élèves à une incompréhension, au début du secondaire quand, alors que ce qui s'appelait jusque-là « mesure » était la valeur que donnait l'instrument et était le plus souvent considérée comme « exacte » (pour peu que l'on se soit suffisamment appliqué), on décrète que « […] des mesures sur un dessin ne suffisent pas pour prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai » (proposition issue d'un manuel de Cinquième de 2001 et rapportée par Houdement, [12])[3]. Or les énoncés en question portent le plus fréquemment sur … des « mesures », mais cette fois-ci au sens du mathématicien, c'est-à-dire des valeurs exactes obtenues par l'application d'un théorème à partir des valeurs données dans un énoncé. Pour l'élève pour qui les objets géométriques sont avant tout des dessins[4] et pour qui une mesure est ce que donne un instrument, dire que les instruments ne donnent que des « valeurs approchées » ne peut avoir de sens : elles sont alors des « valeurs approchées qui ne sont approchées de rien », pour reprendre la formule de Lebesgue parlant des approximations des réels par les décimaux tant que les réels n'ont pas été introduits [9, p. 18].

Ces enjeux liés à l'articulation entre les aspects empiriques de la mesure et ses aspects théoriques constituent à la fois une nécessité et une grande difficulté dans l'enseignement des mathématiques. Brousseau [15] lui-même, dans son texte sur l'épistémologie du professeur, choisit d'ailleurs précisément cet exemple pour illustrer la nécessité pour les professeurs d'« assumer une épistémologie » et pour montrer l'importance et la difficulté de ce rôle. Il y explique notamment que les solutions « classiques » apportées par les enseignants aux difficultés posées dans les classes par l'écart entre « mesurage effectif » et « mesure théorique » mènent à des impasses problématiques. Il pointe par ailleurs que les incertitudes liées au mesurage matériel sont inévitables et doivent être prises en charge : « y renoncer complètement conduit à s'abstenir de traiter correctement aussi bien les problèmes pratiques que les notions théoriques » [16].

Compte tenu de ce que nous avons avancé ci-dessus, nous considérons que l'enseignement gagnerait à ne pas se limiter à une référence épistémologique issue des mathématiques, mais à assumer pleinement le fait que « [la géométrie de l'école élémentaire] ressemble fort à une approche physique des phénomènes » [12, p. 77]. Et si la théorie de la mesure, au sens mathématique du terme, doit constituer une référence épistémologique indispensable pour l'enseignement [17], elle ne peut suffire. Le point de vue de la physique sur la question de la mesure et de la modélisation nous semble ainsi pouvoir nourrir les réflexions didactiques sur l'enseignement de la géométrie élémentaire, comme le suggèrent également Tanguay et Geeraerts [18].

Distinction entre mesure empirique et mesure théorique

Croiser les perspectives didactiques et épistémologiques de physique et de mathématiques nous a ainsi amenées à proposer une distinction entre « mesure théorique » et « mesure empirique » que nous décrivons ci-dessous (pour plus de détails voir [3, 19]) et qui nous paraît susceptible d'alimenter nos réflexions didactiques. Nous appelons « mesure théorique » une mesure obtenue à partir de calculs, sur la base d'informations données (par exemple la détermination d'une longueur à l'aide du théorème de Pythagore ou d'une intensité

3. L'auteur pointe qu'il n'est qu'un exemple parmi d'autres du même type, fréquents dans les classes et les manuels, et qui constitue le moyen principal, mais nécessairement insuffisant, par lequel est pris en charge le changement de « paradigme géométrique » inhérent au passage de la géométrie de l'école (centrée sur le dessin et l'utilisation des instruments) à la géométrie du collège (appelée parfois géométrie de la démonstration, géométrie des figures, géométrie théorique ou géométrie abstraite) [13], qui vise le raisonnement déductif sur les propriétés des figures.
4. Pour reprendre l'opposition entre dessin comme représentation matérielle d'une figure qui, elle, est un objet abstrait [14].

en utilisant la loi d'Ohm), ou fournie comme donnée d'un problème. Le terme « mesure empirique » désigne une valeur résultant d'une action matérielle avec un instrument, par exemple lorsque l'on mesure une longueur à l'aide d'une règle ou une tension à l'aide d'un voltmètre.

Les mesures empiriques sont par nature des nombres décimaux, soumis à incertitude et dispersion et qui doivent donc être assortis d'un intervalle de confiance ; tandis que les mesures théoriques sont des nombres réels et sont considérées comme des valeurs exactes. Dans certains cas, valeurs empiriques et théoriques sont égales mais, la plupart du temps, elles ne coïncident pas et les mesures empiriques sont des valeurs approchées des mesures théoriques. Cela entraîne une incompatibilité apparente entre la définition de la mesure en mathématiques comme une fonction réelle positive et celle de la mesure en physique qui résulte de l'utilisation d'un instrument. Bien sûr, cela ne constitue pas une contradiction pour l'expert qui sait comment gérer les relations entre ces deux objets (tout en utilisant le même terme pour les deux), et qui différencie les mesures, quand cela est nécessaire, en ajoutant « exacte » ou « approchée ». Cependant cela peut entraîner des difficultés pour les élèves qui doivent à la fois construire les différentes dimensions de la mesure et les articuler, alors même que l'enseignement de la mesure théorique s'appuie sur la pratique du mesurage empirique. Les difficultés des élèves mentionnées en introduction peuvent ainsi s'expliquer par des conflits, des difficultés d'identification, de hiérarchisation et d'articulation entre les dimensions empirique et théorique de la mesure.

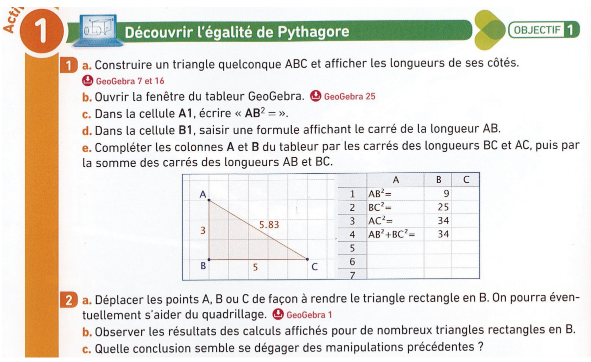
Pour préciser les conceptions que les élèves ont de la mesure au début du secondaire, nous avons mené des tests dans dix classes de Sixième (soit 229 élèves), dont cinq classes en éducation prioritaire (100 élèves) et cinq en contexte ordinaire (129 élèves), ainsi que quelques entretiens [20]. Lorsqu'on demande, par exemple, à des élèves de Sixième, la longueur d'un quart d'une bande de 9,3 cm, seul un tiers d'entre eux choisissent de répondre 2,325 cm [20]. Les justifications proposées par les élèves lorsqu'ils choisissent cette réponse montrent qu'ils ont une conception proche de la conception experte (il y a une « vraie » valeur et la règle en donne une valeur approchée), même si le langage qu'ils emploient est encore peu « orthodoxe », comme par exemple Amyad (élève en éducation prioritaire) : « La règle n'a pas de milli milli mètre alors que la calculatrice peut calculer vraiment ». En particulier, l'emploi de termes de la famille de « précis » ou « exact » est très rare. L'analyse des réponses des élèves qui ne choisissent pas la valeur exacte est révélatrice. En moyenne, 44 % des élèves ne considèrent pas autre chose que le mesurage à la règle voire, pour certains, le calcul est la procédure qui permet de trouver, en l'arrondissant, la valeur 2,3 : d'une certaine manière, pour ces élèves, c'est 2,325 qui est une valeur « approximative » de la « vraie valeur » qui ne peut être que celle que l'on trouve en utilisant la règle, le calcul ne fournissant qu'une manière plus économique (d'un certain point de vue du moins) de trouver cette valeur. Ainsi cet élève qui écrit : « J'ai fait $9{,}3 \div 4 = 2{,}325$. Je l'ai arrondi au dixième car sur une règle graduée il n'y a que les centimètres et les millimètres. » Nous dirions alors que pour cet élève, la mesure renvoie à la mesure empirique. L'idée d'une mesure de longueur théorique, non accessible par le mesurage, ne semble pas être encore concevable.

Par ailleurs, dans une autre étude, nous avons demandé à des élèves de CM2 et Sixième si, pour eux, 2,325 cm (respectivement 9,4 cm, 5,25 cm, $\frac{1}{3}$ cm et 9,48 cm) peuvent être des longueurs de segments : environ 90 % des élèves donnent une réponse positive pour 9,4 cm ; environ 80 % acceptent les valeurs 5,25 et 9,48 ; en revanche, à peine la moitié des élèves acceptent 2,325 et $\frac{1}{3}$. Les réponses positives sont légèrement plus fréquentes en Sixième, mais avec un écart faible.

Ces résultats montrent donc qu'une proportion non négligeable d'élèves au début du collège ont une conception de la mesure liée essentiellement, voire exclusivement, à la mesure empirique. Cette conception risque de se constituer pour ces élèves en véritable obstacle (qui résulte d'une combinaison de raisons épistémologiques et didactiques) à l'entrée dans la conception mathématique (experte) de la mesure, d'une manière similaire à l'idée de dessin faisant obstacle à l'idée de figure [14].

La pertinence de certains choix d'enseignement

Différentes études de manuels, en mathématiques et en physique, en élémentaire et au collège, nous ont permis de mettre en évidence les principales stratégies de prise en charge de l'enjeu de distinction et articulation des aspects empirique et théorique de la mesure. En particulier, nous avons analysé des « activités d'introduction » visant l'élaboration d'un théorème en mathématiques, qui présente des similitudes avec l'élaboration d'une loi en sciences expérimentales [3], ainsi que des exercices portant sur des situations « concrètes ».


Activité 1 — Découvrir l'égalité de Pythagore — OBJECTIF 1

1 a. Construire un triangle quelconque ABC et afficher les longueurs de ses côtés. GeoGebra 7 et 16
b. Ouvrir la fenêtre du tableur GeoGebra. GeoGebra 25
c. Dans la cellule **A1**, écrire « **AB**^{2} = ».
d. Dans la cellule **B1**, saisir une formule affichant le carré de la longueur AB.
e. Compléter les colonnes **A** et **B** du tableur par les carrés des longueurs BC et AC, puis par la somme des carrés des longueurs AB et BC.

	A	B	C
1	AB^2=	9	
2	BC^2=	25	
3	AC^2=	34	
4	AB^2+BC^2=	34	
5			
6			
7			

2 a. Déplacer les points A, B ou C de façon à rendre le triangle rectangle en B. On pourra éventuellement s'aider du quadrillage. GeoGebra 1
b. Observer les résultats des calculs affichés pour de nombreux triangles rectangles en B.
c. Quelle conclusion semble se dégager des manipulations précédentes ?

Figure 1. *Extrait d'un manuel* [5] *de Quatrième illustrant la stratégie de gommer les incertitudes de mesure.*

La première stratégie consiste à sélectionner soigneusement des situations dans lesquelles le modèle et la réalité « coïncident », en choisissant des valeurs qui « tombent juste ». Par exemple, on peut introduire le théorème de Pythagore en faisant « conjecturer » le théorème dans le cas de triangles dont les côtés mesurent par exemple 3, 4 et 5 cm et 6, 8 et 10 cm, ou encore en utilisant un logiciel avec lequel on réglera la précision des mesures de façon à ce que les incertitudes soient gommées par les arrondis (voir exemple en figure 1).

Cette stratégie, économique au premier abord car les élèves « trouvent » facilement le théorème, contient le risque de renforcer l'idée que des mesures sur un dessin sont suffisantes et qu'il n'est pas nécessaire de prouver quoi que ce soit autrement puisqu'on obtient la « bonne valeur » en mesurant. Sans même parler du fait que d'arrondir comme le fait l'exercice de la figure 1 les valeurs sans rien en dire peut renforcer la tendance de certains élèves à considérer que 5,83 est égal à racine de 34 amalgamant ainsi la valeur exacte et la valeur approchée.

Une girouette est un instrument qui mesure la direction du vent au sol.
Julie a installé dans son jardin une jolie girouette surmontant un piquet.
Comme elle n'est pas vraiment sure que le piquet soit bien perpendiculaire avec le sol, elle attache une corde, comme schématisé sur le dessin, et effectue des mesures de l'ensemble.
Le piquet surmonté de la girouette est-il perpendiculaire au sol ?

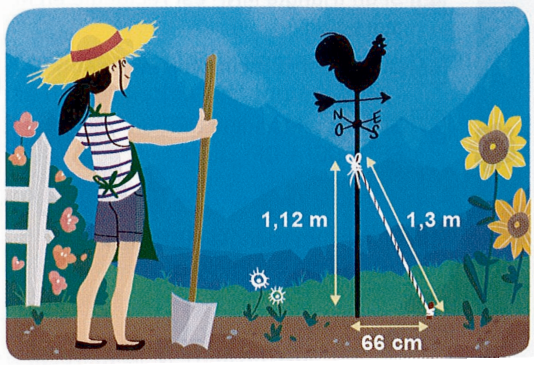


Figure 2. *Exercice tiré d'un manuel de Quatrième illustrant certains choix problématiques dans les exercices partant de « situations concrètes ».*

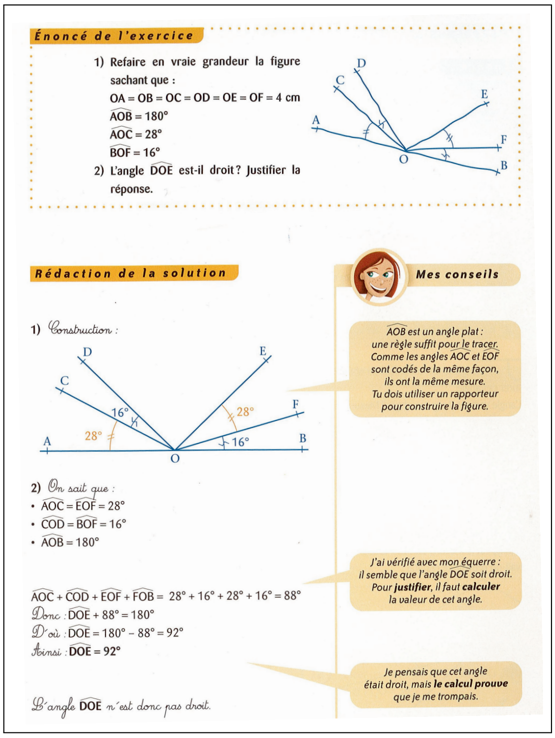
En figure 2, nous proposons un exemple d'exercice qui vise un travail à partir d'une « situation concrète ». Nous ne prétendons pas qu'il est représentatif de ce type d'exercices qu'on trouve dans

5. Nous choisissons de ne pas indiquer de référence précise car il ne s'agit pas de stigmatiser tel ou tel manuel, mais uniquement d'illustrer des stratégies largement répandues, autant dans les manuels que dans des ressources que l'on peut trouver sur l'internet.

les manuels, mais il permet d'illustrer de façon assez caricaturale certains choix que l'on retrouve dans un nombre non négligeable d'entre eux.

L'égalité $0{,}66^2 + 1{,}12^2 = 1{,}3^2$ est vraie, mais on peut questionner la nature des valeurs données à 1 cm près alors que le dessin lui-même suggère une imprécision importante sur les grandeurs mesurées (liées aux brins d'herbe ou encore à l'épaisseur du poteau). Cet exercice est par ailleurs discutable sur de nombreux autres aspects, comme la pertinence, dans la réalité quotidienne, de vérifier la verticalité d'un poteau par une telle méthode ou, et c'est encore plus problématique, en considérant la verticalité d'un axe par rapport à l'horizontale comme étant assurée par la perpendicularité dans un seul plan ! On peut ainsi douter que cet exercice permette de donner du sens à la géométrie comme outil de modélisation pour résoudre des problèmes hors des mathématiques.

À l'inverse, la deuxième stratégie consiste à opposer modèle et réalité pour motiver la géométrie de la démonstration, en s'appuyant sur l'affirmation qu'un dessin aux instruments n'est « pas suffisamment précis » ou sur le fait que cela permet une économie en évitant d'avoir à faire le mesurage, mais qui n'est pas motivée [12] et peut apparaître comme arbitraire (*via* l'usage de dessins à main levée ou l'interdiction d'utiliser les instruments). Cette stratégie, illustrée par l'exemple en figure 3, a le mérite d'assumer un écart entre modèle et réalité, mais d'une part elle repose essentiellement sur un « dressage » [21] plutôt qu'une motivation intrinsèque aux mathématiques ; d'autre part, elle ne permet pas pour autant de travailler le rapport qu'entretiennent réellement l'un et l'autre, puisqu'elle semble opposer validation instrumentée et par le raisonnement, ne permettant pas de construire l'idée que le dessin est un outil dans le raisonnement géométrique notamment pour établir des conjectures. Elle incite par ailleurs les élèves à remettre en cause ce qu'ils ont appris précédemment.


Énoncé de l'exercice

1) Refaire en vraie grandeur la figure sachant que :
$OA = OB = OC = OD = OE = OF = 4$ cm
$\widehat{AOB} = 180°$
$\widehat{AOC} = 28°$
$\widehat{BOF} = 16°$
2) L'angle $\widehat{DOE}$ est-il droit ? Justifier la réponse.

Rédaction de la solution

1) Construction :

2) On sait que :
- $\widehat{AOC} = \widehat{EOF} = 28°$
- $\widehat{COD} = \widehat{BOF} = 16°$
- $\widehat{AOB} = 180°$

$\widehat{AOC} + \widehat{COD} + \widehat{EOF} + \widehat{FOB} = 28° + 16° + 28° + 16° = 88°$
Donc : $\widehat{DOE} + 88° = 180°$
D'où : $\widehat{DOE} = 180° - 88° = 92°$
Ainsi : $\widehat{DOE} = 92°$

L'angle $\widehat{DOE}$ n'est donc pas droit.

Mes conseils

$\widehat{AOB}$ est un angle plat : une règle suffit pour le tracer. Comme les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{EOF}$ sont codés de la même façon, ils ont la même mesure. Tu dois utiliser un rapporteur pour construire la figure.

J'ai vérifié avec mon équerre : il semble que l'angle $\widehat{DOE}$ soit droit. Pour **justifier**, il faut **calculer** la valeur de cet angle.

Je pensais que cet angle était droit, mais **le calcul prouve** que je me trompais.

Figure 3. *Extrait de manuel illustrant l'opposition entre validation instrumentée et théorique.*

Ces stratégies consistent donc toutes pour l'essentiel à « mettre sous le tapis » (plus ou moins volontairement) la question des incertitudes liées à la mesure empirique et, plus globalement, du rapport entre modèle et réalité, amenant au « divorce entre les concepts mathématiques enseignés et les activités effectives des élèves » évoqué par Brousseau [15, p. 19] ou le fait que « le professeur doit sournoisement violer les rapports théorie/pratique que ses convictions pédagogiques lui font mission de professer » (*ibid*.).

Voici un dernier exemple illustrant la manière dont le fait de ne pas prendre en charge ces enjeux, et en particulier d'utiliser le mot « mesure » de façon indifférenciée, peut mener à proposer à des élèves des tâches dépourvues de sens.

1. Tracer un triangle STR isocèle en T tel que : $ST = 5$ cm et $\widehat{RTS} = 56°$.
2. Mesurer les angles $\widehat{TSR}$ et $\widehat{TRS}$.
3. Quelle conjecture faire concernant les mesures de ces angles ?

Figure 4. *Exemple d'exercice illustrant les difficultés résultant d'une absence de gestion de la polysémie du mot mesure.*

Les élèves auront obtenu deux nombres à la question 2, et leur demander ensuite de conjecturer quelque chose sur ces deux mesures n'a de sens que si on considère que mesurer ne donne pas la mesure. Parce que si l'on considère les valeurs obtenues, il n'y a pas de conjecture à faire mais un constat : soit elles sont égales, soit elles sont différentes, soit éventuellement différentes mais proches, mais il s'agit alors d'un constat et non d'une conjecture. En revanche, les questions prennent davantage de sens (du point de vue mathématique [6]) si l'on remplace la question 2 par « détermine les mesures empiriques des deux angles » et la question c. par « quelle conjecture faire concernant les mesures théoriques de ces angles ? ». La question de l'accessibilité pour les élèves de cette tâche reste toutefois posée. Par ailleurs, notons que, s'il s'agit bien pour les auteurs, comme il nous semble raisonnable de le supposer, de travailler sur la propriété d'égalité des mesures des angles à la base d'un triangle isocèle, la question de la généralisation, au-delà d'un seul triangle, essentielle à l'élaboration d'une réelle conjecture, n'est pas prise en charge.

Quelles alternatives ?

La prise en charge minimale consiste à assumer les écarts entre mesures empiriques et théoriques. C'est ce que propose par exemple l'activité d'introduction ci-dessous (trouvée sur l'internet) dans une version partiellement corrigée par le professeur (voir notamment la dernière phrase).

Activité d'introduction

Trace un triangle BEL assez grand. Place un point U sur [BL] et trace la parallèle à (LE) passant par U, elle coupe [BE] en S.

Mesure le plus précisément possible :

BE = BL = LE =

BU = BS = US =

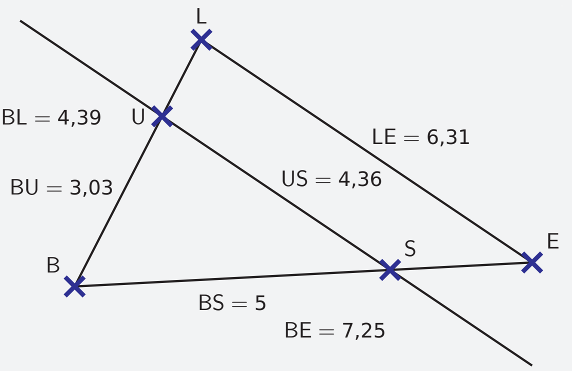
Effectue les calculs suivants :

$\frac{BU}{BL} = \frac{3{,}03}{4{,}39} \approx 0{,}690 \approx 0{,}69$;

$\frac{BS}{BE} = \frac{5}{7{,}25} \approx 0{,}689 \approx 0{,}69$;

$\frac{US}{LE} = \frac{4{,}36}{6{,}31} \approx 0{,}691 \approx 0{,}69$.

Qu'observe-t-on ?



On observe que l'on a $\frac{BU}{BL} = \frac{BS}{BE} = \frac{US}{LE}$ aux erreurs de mesure près.

Figure 5. *Activité de conjecture proposée sur l'internet.*

De même Brousseau G. et Brousseau N. [16] proposent dans leur ingénierie de prendre en charge explicitement la dispersion de mesures de la masse d'un verre d'eau.

Toutefois, dans ces propositions, la distinction entre mesures empiriques et théoriques et le rapport qu'elles entretiennent ne constitue pas un enjeu d'apprentissage en tant que tel. Or, si jusque-là et dans l'ensemble des autres exercices, la mesure empirique est considérée comme exacte, le traitement qui en est fait ne semble pas suffisant à assurer la construction du sens.

Il nous semble donc que l'on ne peut pas faire l'économie d'une réflexion sur la prise en charge de ces questions dans les classes. Garantir des apprentissages qui font sens et permettent de construire une épistémologie cohérente des disciplines et de l'activité scientifique consisterait au contraire à mettre sur le devant de la scène ces questions, à la fois en travaillant sur les incertitudes inhérentes aux mesures empiriques dans le cas de travaux mobilisant des instruments de mesure, et en prenant en charge la construction de la mesure théorique avec la question

6. Nous ne suggérons pas ici que c'est ce qu'il faut faire en classe. Voir plus loin l'étude que nous avons menée sur l'introduction dans les classes de la distinction entre les deux types de mesures.

de la distinction et de l'articulation entre les deux types de mesures. Il semble alors pertinent de penser l'enseignement de la mesure en s'appuyant sur l'épistémologie de celle-ci dans les deux disciplines.

Certaines propositions vont dans ce sens, comme par exemple Reynès [22] proposant de faire travailler les élèves sur l'aspect matériel du dessin, en lien avec l'aspect empirique de la mesure, ou les propositions de Houdement [12] visant à accorder davantage de légitimité aux procédures instrumentées dans le cas d'exercices portant sur des situations « concrètes », stratégie que l'on trouve également dans certaines ressources Éduscol récentes (voir le « document maître » sur l'enseignement de la géométrie au cycle 4).

Dans la partie qui suit nous présentons différentes pistes que nous avons explorées pour prendre en charge l'articulation entre dimensions empirique et théorique de la mesure. Nous présentons une étude sur les incertitudes de mesure à l'école élémentaire et une étude sur l'enseignement de la géométrie en Sixième.

Travailler sur les incertitudes de mesure en école élémentaire

Dans cette étude nous avons cherché à voir s'il était possible d'initier les élèves, dès l'école élémentaire, à une réflexion sur la mesure empirique, prenant en compte les incertitudes de mesure, comme cela est de nouveau [7] préconisé dans les programmes de sciences du cycle 3 en vigueur [23]. Un de nos objectifs était de déterminer de quelle façon l'école élémentaire pouvait contribuer à développer des connaissances et capacités concernant la mesure, les incertitudes de mesure et le traitement des données issues du mesurage. Comme Petrosino et al. [24], nous avons élaboré et expérimenté une séquence d'enseignement dans laquelle des élèves de CM1 et CM2 sont confrontés à N mesures de la même grandeur (voir Munier et al. [25] pour une description de la séquence). Nous avons montré que, lors de l'exploitation de ces séries de mesures, les élèves sont capables d'envisager les trois causes possibles d'incertitudes (la grandeur à mesurer, l'instrument et l'expérimentateur), mais que l'expérimentateur est toujours, quelle que soit la grandeur, la cause d'erreur la plus citée par les élèves. Suivant l'instrument de mesure utilisé, ceux-ci mettent en cause cet instrument ou non, certains instruments, comme la balance électronique notamment, leur paraissant « infaillibles ». Les élèves peuvent prendre conscience de la nécessité de répéter les mesures et certains d'entre eux sont capables de raisonner en termes d'intervalle de confiance, en mobilisant un raisonnement qualitatif correct. Bien sûr, l'utilisation que l'on va faire des résultats de mesure ne nécessite pas toujours de répéter de nombreuses fois ces mesures, et il n'est pas question de suggérer qu'un travail systématique de ce type pour chaque activité de mesurage pratiquée en classe serait nécessaire. D'une part ceci est totalement irréaliste au vu notamment des contraintes de temps, d'autre part cela n'est pas pertinent dans tous les cas. En revanche, une analyse statistique d'un grand nombre de mesures de la même grandeur est indispensable dès lors qu'il s'agit de prendre une décision (différencier deux matériaux de masse volumique proche à partir de mesures de masse et de volume ou décider si un triangle est équilatéral ou non en géométrie instrumentée) ou par exemple lorsqu'il s'agit de comparer les performances de deux instruments de mesure, de deux objets techniques ou la pertinence de deux méthodes de mesure. Il nous semble donc important, comme Journeaux et al. [26] l'évoquent pour le lycée, de confronter les élèves à des situations dans lesquelles la prise de décision n'est possible qu'avec un grand nombre de mesures. À l'école élémentaire et jusqu'au lycée, on ne dispose pas encore des nombreux outils statistiques permettant de traiter les résultats de mesure, et l'âge des

7. Les incertitudes de mesure figuraient dans les programmes de cycle 3 en 2002 et dans les « thèmes de convergence » associés aux programmes de collège de 2008. Cela n'apparaît plus dans les programmes de collège. Dans les programmes de physique du lycée, les incertitudes de mesure ont une place importante, en lien avec l'enseignement des probabilités.

élèves impose un traitement simplifié de ces résultats.Toutefois,nous avons montré que dès l'école on peut développer chez les élèves des raisonnements statistiques complexes [8], même s'il ne s'agit que de raisonnements qualitatifs. Ce travail sur la dispersion des résultats de mesure peut permettre de dépasser la « résistance » et le « déni » de la variabilité du monde pointés par Chevallard et Wozniak [27, p. 22], en développant un « regard statistique sur le monde », essentiel à l'« émancipation citoyenne » (*ibid*. p. 24). Il permet de proposer une prise en charge cohérente de la dispersion des résultats de mesure qui de toute façon apparaît en classe dès lors qu'on confronte les mesures réalisées par les élèves, parce qu'elles sont inhérentes au processus de mesure empirique.

Introduire la distinction entre mesures empirique et théorique en Sixième : un levier pour l'entrée dans la géométrie théorique

L'une d'entre nous a par ailleurs travaillé avec un groupe d'enseignantes de mathématiques de collège sur des tentatives pour introduire explicitement en Sixième la distinction entre mesures empirique et théorique et s'en servir comme levier pour travailler le raisonnement sur les propriétés des figures, la distinction entre dessin et figure et l'entrée dans la géométrie de la démonstration. Le travail s'est déroulé au sein d'un dispositif [28, 29], inspiré des recherches collaboratives [30] qui a fonctionné pendant cinq ans, avec un groupe de trois enseignantes qui travaillaient déjà ensemble auparavant et préparaient toutes leurs séquences ensemble, à raison d'une séance de travail de trois heures par semaine (complétée par du travail individuel et des échanges par mail notamment). Conformément à un principe de fonctionnement « partant des pratiques » [31, 32, 29], le travail s'est appuyé sur ce que les enseignantes faisaient déjà, qui a été revisité par le collectif à la lumière de la problématique [9] du rapport entre les aspects empirique et théorique de la mesure.

La notion d'angle en Sixième est apparue au collectif comme une occasion critique pour ce travail, du fait que les programmes supposent de travailler à la fois des enjeux liés à la mesure empirique (l'utilisation du rapporteur) et à la mesure théorique (avec des raisonnements déductifs sur des mesures théoriques). Nous proposons d'illustrer les principales conclusions auxquelles est parvenu le groupe à travers l'exemple de l'évolution d'une des fiches d'exercices. On trouvera en figure 6 la fiche initiale (que les enseignantes avaient élaborée avant le début de la recherche collaborative) et en figure 7, sa version au bout de cinq ans de travail. On peut y noter quatre différences emblématiques des différents enjeux et leviers identifiés par le collectif.

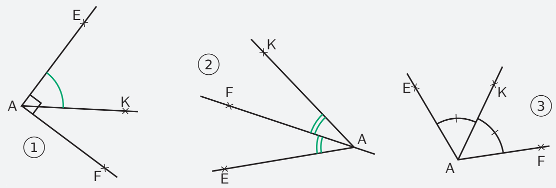
La première différence est que le titre de la fiche, initialement « calculer un angle », est devenu « raisonner sur les mesures d'angles », témoignant d'une part de la distinction plus explicite entre l'angle et sa mesure, d'autre part d'une prise de conscience des enjeux didactiques de ce type de tâche comme étant liés au raisonnement. Contrairement au début du processus où les enseignantes considéraient que les difficultés des élèves à réaliser ce type de tâche pouvaient se régler en clarifiant la distinction entre calculer et mesurer (« s'il est écrit calculer, il faut faire un calcul, alors que s'il est écrit mesurer, il faut utiliser le rapporteur »), les enjeux ont été identifiés comme relevant de l'entrée dans la démonstration et nécessitant d'être motivés par le sens.

8. Par exemple, des élèves de CM ont été capables de formuler que si l'on donne un intervalle plus large, la probabilité de se tromper est plus faible, mais on est moins précis.
9. Processus de problématisation conjointe.

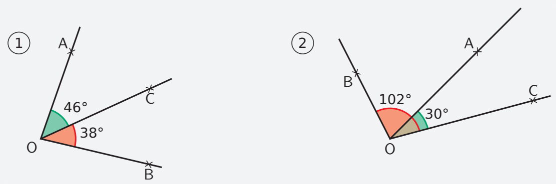
Fiche d'exercices : calculer un angle

Exercice 1

1. Pour chaque figure, l'angle $\widehat{EAK}$ mesure 56°. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{KAF}$ dans les trois figures.



2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ dans chaque figure.



Exercice 2 Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier.

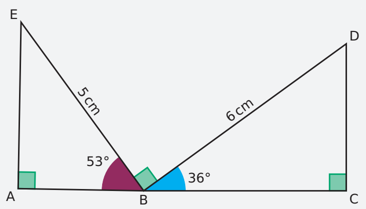
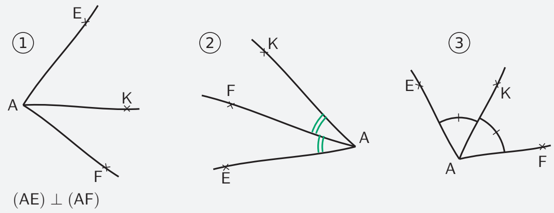


Figure 6. *Fiche d'exercices initiale* [10].

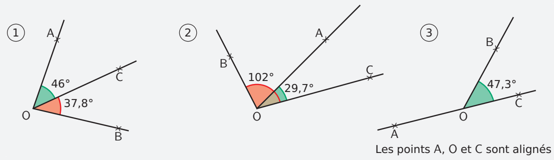
Fiche d'exercices : raisonner sur les mesures d'angle

Exercice 1

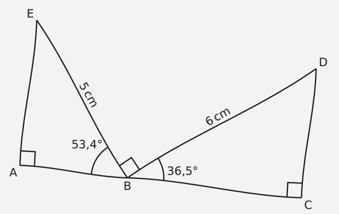
1. Pour les trois figures représentées sous forme de croquis, la valeur théorique de l'angle $\widehat{EAK}$ est 55°. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{KAF}$ dans chaque cas.



2. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ dans chaque figure.



Exercice 2 Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifiez en détaillant votre raisonnement.



Bilan individuel : ce que j'ai fait, ce que je retiens.

....

....

....

Bilan de la classe :

....

....

....

Figure 7. *Fiche d'exercices après cinq années* [10].

10. NDLR : pour des raisons techniques, nous n'avons pas pu reproduire à l'identique les fiches distribuées aux élèves. La différence la plus notable est que, sur les documents originels, les dessins « à main levée » ont été réellement réalisés à la main par les enseignantes et non pas avec un logiciel. Ces documents sont disponibles sur notre site.

Une deuxième modification est le fait de réaliser certains des dessins à main levée et non pas *via* un logiciel ou avec des instruments de géométrie : ce choix permet pour les enseignantes de questionner le statut du dessin avec les élèves. L'une des enseignantes a par exemple introduit dans sa classe l'idée de « figure théorique, idéale et parfaite » [20] pour mieux faire comprendre aux élèves l'idée qu'un dessin (n')est (qu')une représentation. Cela a permis par exemple, à l'occasion de l'exercice 2, de reformuler la consigne pour clarifier le fait que la question porte sur la figure théorique et non pas sur le dessin. Cet élément est lié à une refonte complète de la progression en géométrie sur l'année de Sixième qui est apparue comme nécessaire à l'issue de la première année de fonctionnement du groupe. Un travail a notamment été mené dès le début de l'année sur le dessin à main levée comme « schéma » d'une figure – qui, elle, est théorique, idéale, imaginaire.

Un troisième élément a joué un rôle crucial : l'introduction dès le début de la séquence (et de façon relativement systématique) de mesures d'angles non entières, donc non atteignables par le mesurage empirique. Cela est apparu comme un levier pour questionner et clarifier le statut des mesures et, dans ce cas, clarifier le fait qu'il s'agit de mesures théoriques, permettant ainsi d'identifier les limites de la procédure de mesurage. Nous pensions en effet que proposer aux élèves de raisonner ou calculer sur des valeurs qui auraient pu, de fait, être obtenues par mesurage ne permet pas de légitimer le recours au raisonnement ou au calcul. Cela encouragerait par ailleurs la confusion entre les mesures empirique et théorique, laissant penser aux élèves que le mesurage peut donner des valeurs exactes (le mesurage ne donne toujours qu'une valeur décimale ou au mieux rationnelle, alors que les mesures théoriques sont des nombres réels). Dès le début de la séquence, pour des fiches d'entraînement à l'utilisation du rapporteur, les angles ont été dessinés grâce un logiciel [11] en utilisant des mesures non entières qui ont été affichées lors de la correction, afin de montrer aux élèves l'impossibilité de les atteindre avec le rapporteur, mais la nécessité d'en être « suffisamment proches ». Cela légitime aussi le fait que tous n'obtiennent pas la même valeur compte tenu des incertitudes inhérentes à la mesure empirique et l'idée que les valeurs acceptables se situent dans un intervalle autour de la valeur théorique [12]. Dès la deuxième année, des valeurs non atteignables par le mesurage ont été introduites à d'autres occasions, notamment en choisissant des mesures de longueurs (en cm) avec au moins 2 décimales, et ce dès le début de la Sixième.

Les exercices de cette fiche (en particulier l'exercice 2), visent alors à travailler sur le fait que le raisonnement sur des mesures théoriques permet un contrôle du dessin et réciproquement. Il s'agit alors de construire un point de vue qui permette de dépasser à la fois le point de vue qui amalgame les deux (stratégie 1 évoquée précédemment) et le point de vue qui les met en contradiction (stratégie 2).

Enfin, on peut noter l'introduction d'un espace en bas de la fiche réservé à une production écrite par les élèves, d'abord individuellement, puis pour noter la production de la classe (prévue comme devant résulter de la mise en commun et de la discussion des productions individuelles). Cet élément est lié à une prise de conscience de la nécessité de travailler sur le langage, à la fois par une réflexion sur la manière de dire les choses (les enseignantes ont par exemple choisi de parler de « valeur mesurée » et « valeur théorique », [33]) mais aussi de la nécessité de faire produire du langage (notamment à l'écrit mais aussi à l'oral) aux élèves, y compris avec leurs propres formulations, pour favoriser le processus d'apprentissage. Cela

11. Cela reste des valeurs décimales, empiriques, mais avec une précision plus grande que ce que permet le rapporteur. Le caractère empirique de ces mesures et les limites du logiciel ont été discutés avec les élèves à un moment de la séquence.

12. Il s'agissait de dépasser la simple mention « le rapporteur est précis à un degré près » qui est souvent la manière dont cette dispersion est gérée dans les classes. Toutefois, la question de l'amplitude de l'intervalle reste posée : choisir une amplitude de 2 degrés favorise l'idée que la valeur centrale est la « bonne » valeur ; choisir une amplitude de 1 degré rend beaucoup de réponses des élèves inacceptables, alors même que les rapporteurs du commerce sont en moyenne assez mal calibrés.

a débouché sur une place plus importante accordée aux enjeux langagiers dans la classe, tout au long de l'année, autant à l'oral qu'à l'écrit.

Ce travail a par ailleurs nourri les pratiques de ces enseignantes dans d'autres domaines que la géométrie et à d'autres niveaux que la Sixième [28, 29].

S'il ne s'agit aucunement de pratiques modèles et si nous n'avons pas la prétention d'avoir abouti à une efficacité optimale, il semblerait toutefois que ces choix ont permis d'améliorer la compréhension que les élèves ont des enjeux liés à la mesure et d'initier un autre rapport au dessin et au raisonnement déductif susceptible, selon nous, de faciliter l'entrée dans la démonstration [20]. Le processus a semble-t-il ainsi permis de réduire quelque peu les phénomènes de « divorce » et de « viol » évoqués par Brousseau (cf. *supra*).

Conclusion

Les questions liées à cette double dimension empirique et théorique font de la mesure un objet problématique pour l'enseignement des mathématiques et des sciences expérimentales. Ces problématiques sont rendues d'autant plus vives par le fait que, d'une part la mesure est un objet culturel du quotidien qui fait même parler Brousseau G. et Brousseau N. d'« obstacle culturel presque infranchissable pour une construction du concept de mesure selon les usages de la scolarité obligatoire » (*ibid*.) D'autre part, le statut et le rôle, en tant que concept scientifique, des aspects empirique et théorique de la mesure ainsi que de leur articulation, sont différents en mathématiques et en sciences expérimentales, ne serait-ce que parce que les modes d'élaboration et de validation des connaissances sont différents. En mathématiques, la validation se fait par la démonstration, la mesure ne pouvant permettre que d'établir des conjectures ; en physique, la validation se fait *via* la répétition des mesures empiriques et leur traitement.

Cela peut générer pour les élèves des difficultés à comprendre les attentes des différentes disciplines, d'autant plus que l'introduction des « grandeurs physiques » (en particulier masse et volume) et de la mesure est partagée par les mathématiques et les sciences (avec des évolutions au cours de l'histoire, cf. par exemple Brousseau [34] ou encore Favrat et Munier [35]. Cela en fait un enjeu et un levier pour un travail visant des objectifs d'ordre épistémologiques. Ces objectifs concernent à la fois chacune des disciplines et doivent nourrir une vision interdisciplinaire des sciences, en permettant de préciser les différences et les rapports qu'entretiennent les sciences expérimentales et les mathématiques entre elles (en ce qui concerne la distinction entre modèle et réalité, les modes de validation des connaissances etc. — pour davantage de précisions, voir [3]). Ce travail doit être mené dans chaque discipline et constitue aussi de notre point de vue un enjeu privilégié pour un travail interdisciplinaire.

La distinction entre « mesure empirique » et « mesure théorique » que nous avons introduite, sur la base d'une réflexion interdidactique entre mathématiques et physique et articulant des considérations épistémologiques sur la mesure issues des deux disciplines, nous paraît un bon outil pour une réflexion didactique à ce sujet. Nous avons notamment montré qu'elle permet de revisiter et d'unifier des problématiques d'apprentissage et d'enseignement qui apparaissent distinctes au premier abord (liées aux nombres d'une part, à la géométrie d'autre part), mais qui sont en fait intimement liées [3]. Elle permet ainsi d'interpréter certaines difficultés d'élèves et d'analyser des ressources.

Nous avons fait par ailleurs de premières tentatives d'opérationnalisation dans les classes de cette distinction, mais cela reste un vaste chantier. En particulier, la question des enjeux langagiers est délicate car il n'est évidemment pas envisageable d'introduire telles quelles les expressions « mesure empirique » et « mesure théorique » et parce que cela nécessite d'inventer de « nouveaux discours » pour prendre en charge ces distinctions et leur articulation.

Compte tenu de la place qu'occupent les grandeurs et la mesure, à la fois dans les sciences et dans la vie quotidienne, il nous semble que les questions didactiques associées sont d'une importance cruciale au regard du rôle de l'école dans la construction du citoyen. De ce fait, elles constituent aussi des enjeux pour la formation des enseignants, qui gagneraient à être travaillés d'un point de vue interdisciplinaire.

Références

[1] I. Jacquier. « Quelles conceptions des nombres chez des élèves de Troisième ? » In : *Petit x* Nº 41 (1995), p. 27-50.

[2] M. Vergnac et V. Durand-Guerrier. « Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université : un objet problématique ». In : *Petit x* Nº 96 (2014). hal-02070144, p. 7-29.

[3] A. Chesnais et V. Munier. « Mesure, mesurage et incertitudes : une problématique inter-didactique mathématiques / physique ». In : *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques, 2014–2015*. Sous la dir. d'A.-C. Mathé et E Mounié. 2016.

[4] Bureau International des Poids et Mesures. *JCGM-VIM [International vocabulary of metrology—basic and general concepts and associated terms]*. . 2008.

[5] J. Perdijon. *La mesure, histoire, sciences et technique*. Paris : Vuibert, 2012.

[6] Y. Chevallard et M. Bosch. « Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations ». In : *Petit x* Nº 59 (2002), p. 43-76.

[7] D. Perrin. *Mathématiques d'école. Nombres, mesures et géométrie*. Cassini, 2011. 402 p.

[8] J. Rogalski. « Quantités physiques et structures numériques. Mesures et quantifications. Les cardinaux finis, les longueurs, surfaces et volumes ». In : *Bulletin de l'APMEP* Nº 320 (1979), p. 563-586.

[9] H. Lebesgue. *La mesure des grandeurs*. Albert Blanchard, 1975. 184 p.

[10] Y. Chevallard et C. Chambris. *Grandeurs et nombres : quelques remarques pour un programme*. Accessible sur le site de la CFEM . 2015.

[11] C. Houdement et A. Kuzniak. « Approximations géométriques ». In : *L'Ouvert*. Nº 105. IREM de Strasbourg, 2002, p. 19-28.

[12] C. Houdement. « À la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège ». In : *Repères IREM* Nº 67 (2007), p. 69-84.

[13] C. Houdement et J.-P. Rouquès. *Deux géométries en jeu dans la géométrie plane : une qu'on appellera « dessinée » et une qu'on appellera « abstraite »*. hal-03214099v2. 2016.

[14] C. Laborde et B. Capponi. « Cabri-géomètre, constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique ». In : *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14.Nº 1/2 (1994), p. 165-209.

[15] G. Brousseau. « Les différents rôles du maître ». In : *Bulletin de l'A.M.Q. Montréal* (1988), p. 14-24.

[16] G. Brousseau et N. Brousseau. « Le poids d'un récipient, étude des problèmes de mesurage en CM ». In : *Grand $\mathbb{N}$* Nº 50 (1991), p. 65-87.

[17] M. Rogalski. *Carrefours entre analyse, algèbre et géométrie*. Collection CAPES agrégation. Ellipses, 15 mars 2001.

[18] D. Tanguay et L. Geeraerts. « D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant ». In : *Petit x* Nº 88 (2012), p. 5-24.

[19] V. Munier et A. Chesnais. « Différencier aspects empiriques et théoriques de la mesure : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage en physique et en mathématiques ? » In : *11es rencontres scientifiques de l'ARDIST*. Bruxelles, 31 mars-3 avril 2020.

[20] A. Chesnais. « Comment un ancrage didactique en théorie de l'activité amène à repenser le point de vue de l'élève ». In : *Nouvelles perspectives en didactique : le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure*. Sous la dir. de H. Chaachoua et al. Grenoble : La Pensée Sauvage, 2021.

[21] M.-H. Salin. « Du CM2 à la Sixième, quelques pistes pour une transition plus efficace (2e partie) ». In : *APMEP Plot* Nº 14 (2003), p. 2-9.

[22] F. Reynès. « La notion de mesure exacte. De l'impossibilité physique à la nécessité mathématique, les conditions d'une rupture inévitable ». In : *Petit x* Nº 53 (2000), p. 69-79.

[23] Ministère de l'Éducation nationale et de la jeunesse. « Programme de sciences et technologie du cycle 3 ». In : *Bulletin officiel* Nº 25 (22 juin 2023).

[24] A.-J. Petrosino, R. Lehrer et L. Schauble. « Structuring error and experimental variation as distribution in the fourth grade ». In : *Mathematical Thinking and Learning* Nº 5 (2&3) (2003), p. 131-156.

[25] V. Munier, H. Merle et D. Brehelin. « Teaching Scientific Measurement and Uncertainty in Elementary School ». In : *International Journal of Science Education* Nº 35 (2013), p. 2752-2783.

[26] R. Journeaux, M.-G. Séré et J. Winther. « La mesure en Terminale scientifique ». In : *Bulletin de l'Union des Physiciens* Nº 779 (1) (1995), p. 1925-1945.

[27] Y. Chevallard et F. Wozniak. « Enseigner la statistique au secondaire. Entre genre prochain et différence spécifique. Cours donné à la XIIe école d'été de didactique des mathématiques à Corps, 20-29 août 2003 ». In : *Balises pour la didactique des mathématiques*. Sous la dir. d'A. Mercier et C. Margolinas. Grenoble : La Pensée Sauvage, 2003, p. 195-218.

[28] A. Chesnais, S. Leblanc et C. Constantin. « Étudier le développement professionnel d'enseignant·e·s accompagné·e·s par des didacticiennes au sein de dispositifs collaboratifs : regards croisés en didactique en analyse de l'activité ». 2024. À paraître dans la revue *Questions vives* dans le cadre d'un numéro thématique sur l'accompagnement.

[29] A. Chesnais. « Penser l'accompagnement du développement professionnel des enseignants de mathématiques à partir de la recherche en didactique des mathématiques : le cas des dispositifs collaboratifs entre chercheur·e·s et enseignant·e·s ». 2024. À paraître dans les Actes du XXVIIIe colloque de la CORFEM.

[30] S. Desgagné et al. « L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation ». In : *Revue des sciences de l'éducation* No 27(1) (2001). , p. 33-64.

[31] J.-F. Chesné, M. Paries et A. Robert. « « À partir des pratiques » en formation professionnelle des enseignants de mathématiques des lycées et collèges ». In : *Petit x* No 80 (2009), p. 25-46.

[32] M. Abboud, A. Robert et J. Rogalski. « Interroger les pratiques de formation des professeurs de mathématiques : orientations de recherche et perspectives (un agenda) ». In : *Les Annales thématiques* No 1 (2022), p. 261-285.

[33] A. Chesnais. « Enhancing classroom discourse about measure to foster a conceptual understanding of geometrical practices ». In : *ZDM Mathematics Education*. No 53. . 2021, p. 337-357.

[34] G. Brousseau. « Les grandeurs dans la scolarité obligatoire ». In : *Actes de la XIe École d'été de didactique des mathématiques à Corps (Isère) du 21 au 30 août 2001*. Sous la dir. de J.-L. Dorier et al. Grenoble : La Pensée Sauvage, 2002.

[35] J.-F. Favrat et V. Munier. « Les grandeurs à l'école élémentaire dans les manuels de mathématiques et de physique depuis 1945 ». In : *Repères IREM* No 68 (2007), p. 51-75.

Aurélie Chesnais est enseignante-chercheuse en didactique des mathématiques au Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique, Éducation et Formation (LIRDEF) et formatrice à la faculté d'éducation de l'université de Montpellier.

Valérie Munier est enseignante-chercheuse en didactique de la physique au LIRDEF et formatrice à la faculté d'éducation de l'université de Montpellier.

aurelie.chesnais@umontpellier.fr
valerie.munier@umontpellier.fr

APMEP

19-22 oct
2024

Le Havre - Journées Nationales

LA NORMANDIE, UN HAVRE DE MATHÉMATIQUES

Illustration : OL - Couleur : Claire Dumas

Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public
« De la maternelle à l'université »

APMEP

UNIVERSITÉ LE HAVRE NORMANDIE

Sommaire du nº 552

Automat(h)ismes

CultureMATH

APMEP

www.apmep.fr