Thème : Calcul intégral

A. Test initial de connaissances

On donne dans l'**Annexe** 2 cinq exercices de la rubrique *Réviser ses gammes* d'un manuel scolaire situés au début du chapitre sur le calcul intégral, et dans l'**Annexe** 3 la proposition d'un autre manuel scolaire pour l'évaluation de prérequis sur une séquence sur le même thème.

A.1. Cette question porte uniquement sur l'**Annexe** 2.

(a) Donnez les réponses correctes attendues pour l'exercice 1, en utilisant dans chacun des cas une formule que vous expliciterez.

(b) La consigne demande de « Calculer ». Sans cette contrainte, quelle autre procédure aurait été possible ?

(c) Rappelez brièvement comment, au début du collège, on peut justifier chacune des trois formules de calcul d'aire de polygones de référence que vous avez utilisées dans la première question.

(d) Les programmes rappelés en annexe 1 indiquent : « On s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège. » Rappelez en quelques phrases comment la notion d'aire est travaillée au cycle 3 avant que des formules de calcul d'aire ne soient mises en évidence (vous préciserez notamment la raison pour laquelle les programmes évoquent une notion "intuitive", et vous mentionnerez au moins un point de vigilance dans l'enseignement de la notion d'aire au début du collège).

(e) Expliquez en quoi chacun de ces exercices constitue une évaluation de prérequis pour la séquence à suivre.

A.2. On s'intéresse maintenant aux exercices de l'**Annexe** 3.

(a) Donnez les réponses correctes attendues pour l'exercice 1.

(b) Rédigez une solution de la question b) de l'exercice 2 telle qu'elle pourrait figurer comme référence dans un cahier d'élève de Terminale.

(c) Citez trois erreurs que les concepteurs de l'exercice 3 ont sans doute cherché à faire émerger quand ils ont choisi les distracteurs (réponses fausses) de cet exercice.

A.3. Donnez trois points communs et trois différences (du point de vue des connaissances testées) entre le test proposé par le manuel de l'annexe 2 et le test proposé par le manuel de l'annexe 3.

B. Activité d'introduction

L'**Annexe** 4 présente l'énoncé d'une activité d'introduction pour la séquence *Calcul d'aires – Intégration de fonctions*, suivie de deux productions d'élèves.

B.1. Analysez les solutions apportées par les deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles, en précisant pour chacun des élèves une piste que vous pourriez lui proposer pour l'aider à améliorer sa production.

B.2. On suppose que ces deux productions font l'objet d'une étude lors d'une mise en commun. Expliquer comment une définition de l'intégrale d'une fonction continue positive pourrait être introduite à l'issue de cette mise en commun (en énonçant précisément cette définition), et comment la suite de la séquence pourrait être annoncée oralement.

C. Méthode des rectangles

L'**Annexe** 5 présente l'énoncé d'une activité proposée par un manuel scolaire.

C.1. Présentez le déroulement de cette activité, en exposant le problème à résoudre, la stratégie de résolution adoptée, et en explicitant le rôle de chacune des phases pour la résolution du problème.

C.2. Donnez les réponses correctes attendues aux questions **1.c.**, **1.d.**, et **1.e.** de la partie **B.**.

C.3. Rédigez une correction des questions **2.b.** et **2.c.** de la partie **B.** telle qu'elle pourrait être proposée devant une classe, en intégrant la rédaction de la preuve par récurrence de la formule de la somme des carrés.

C.4. Citez un intérêt de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique dans la résolution de cet exercice.

D. Réinvestissement

L'**Annexe** 6 présente l'énoncé d'un problème, accompagné de deux productions d'élèves. On s'aidera pour cette partie de l'extrait des programmes officiels donné en **Annexe** 7.

D.1. Rappelez comment on peut définir en Terminale la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$.

D.2. Analysez les productions des deux élèves en mettant en évidence la pertinence de leurs démarches ainsi que leurs erreurs éventuelles. Vous préciserez l'accompagnement que vous pourriez leur proposer.

D.3. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale dans le cadre de l'option mathématiques complémentaires.

E. Annexes

Annexe 1. Extraits du programme d'enseignement optionnel de *mathématiques complémentaires* de terminale générale.

Calculs d'aires

Descriptif

Des calculs d'aires menés selon différentes méthodes permettent d'aboutir à l'introduction de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ en montrant alors la puissance de calcul qu'apporte dans ce domaine la détermination des primitives. Différentes approches sont possibles : méthodes historiques d'approximation des aires, méthode des rectangles et des trapèzes pour l'aire sous une courbe, méthodes probabilistes et bien sûr le calcul intégral.

Ce thème est l'occasion de revoir les aires des figures planes usuelles : triangles, trapèzes, rectangles, carrés et disques, ainsi que l'utilisation de propriétés classiques : additivité, invariance par symétrie et translation.

Les calculs d'aires par approximations successives se prêtent tout particulièrement à la mise en œuvre d'algorithmes notamment dans le cas d'aires sous des courbes de fonctions dont on ne sait pas déterminer de primitives. Leur histoire et les différentes méthodes peuvent aussi être sources d'exposés réalisés par les élèves.

Ce thème peut s'étendre à des calculs de volumes notamment pour des solides de révolution (cylindre, cône, sphère, paraboloïde de révolution ...).

- **Intégration**

On s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège et sur les propriétés d'additivité et d'invariance par translation et symétrie. On met en relation les écritures $\int_a^b f(x)dx$ et $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$.

Contenus

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a,b]$ comme aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x)dx$. Relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a,b]$. Approche graphique et numérique. La valeur moyenne est comprise entre les bornes de la fonction.
- Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles.
- Présentation de l'intégrale des fonctions continues de signe quelconque.
- Théorème : si f est continue sur $[a,b]$, la fonction F définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a,b]$ et a pour dérivée f.
- Calcul d'intégrales à l'aide de primitives : si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Capacités attendues

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer l'aire sous une courbe ou entre deux courbes.
- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

Démonstration possible

- Dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ lorsque f est une fonction continue positive croissante.

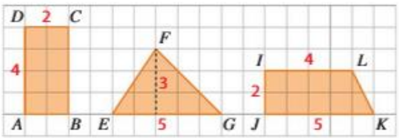
Exemples d'algorithme

- Méthode des rectangles, des trapèzes.
- Méthode de Monte-Carlo pour un calcul d'aire.

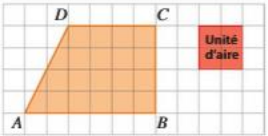
Annexe 2. Collection *Barbazo*, Hachette, 2020.
Terminale option Maths complémentaires

1 Calculs d'aires

Calculer les aires des figures suivantes



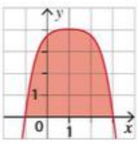
2 Unité d'aire



Quelle est, en unités d'aire, l'aire du polygone $ABCD$?

3 Encadrement d'une aire

En utilisant les aires de deux rectangles, donner un encadrement par deux nombres entiers de l'aire de la surface colorée ci-dessous en unités d'aire du graphique.



4 Courbes et calcul d'aire

Dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, calculer en cm² l'aire de la surface délimitée par les droites d'équations $y = 0$, $y = \frac{1}{2}x + 1$ et $y = -\frac{1}{4}x + 4$.

5 Primitives

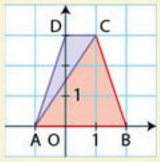
Déterminer une primitive des fonctions suivantes définies sur I.

1. $f : x \mapsto x^2 + 3x - 2$, sur $I = \mathbb{R}$
2. $g : x \mapsto \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0\,;+\infty[$
3. $h : x \mapsto e^{-2x}$ sur $I = \mathbb{R}$
4. $j : x \mapsto \frac{4}{x}$ sur $I =]0\,;+\infty[$

Annexe 3. Collection *Hyperbole*, Nathan, 2020.
Terminale option Maths complémentaires

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 Voici un repère orthonormé (*unité* : 0,5 cm).



a) L'aire du triangle ADC est égale à :
(1) 1,5 cm² (2) 0,75 cm²
(3) 0,375 cm²

b) L'aire du trapèze ABCD est égale à :
(1) 1,5 cm² (2) 6 cm² (3) 3 cm²

2 $(u_n), (v_n), (w_n)$ sont des suites telles que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

- $3 - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \frac{1}{n}$
- $\frac{n}{n+1} \leqslant v_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}$
- $v_n \leqslant w_n \leqslant u_n - 2$

a) La suite (u_n) a pour limite :
(1) $+\infty$ (2) 2 (3) 3

b) La suite (v_n) a pour limite :
(1) $+\infty$ (2) 0 (3) 1

c) La suite (w_n) a pour limite :
(1) $+\infty$ (2) 0 (3) 1

3 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} - e^x.$$

a) Une primitive F de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$ est définie par :
(1) $F(x) = 6x - \frac{2}{x^2} - e^x$
(2) $F(x) = 3x^3 + 2\ln(x) - e^x$
(3) $F(x) = x^3 + 2\ln(x) - e^x$

b) La primitive G de f sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1 est définie par :
(1) $G(x) = x^3 + 2\ln(x) - e^x + e - 1$
(2) $G(x) = x^3 + 2\ln(x) - e^x$
(3) $G(x) = x^3 + 2\ln(x) - 5e^x + 1$

4 F et G sont les fonctions définies sur $]0,5\,;+\infty[$ par $F(x) = \frac{3}{2x-1}$ et $G(x) = \frac{9-6x}{4x-2}$.

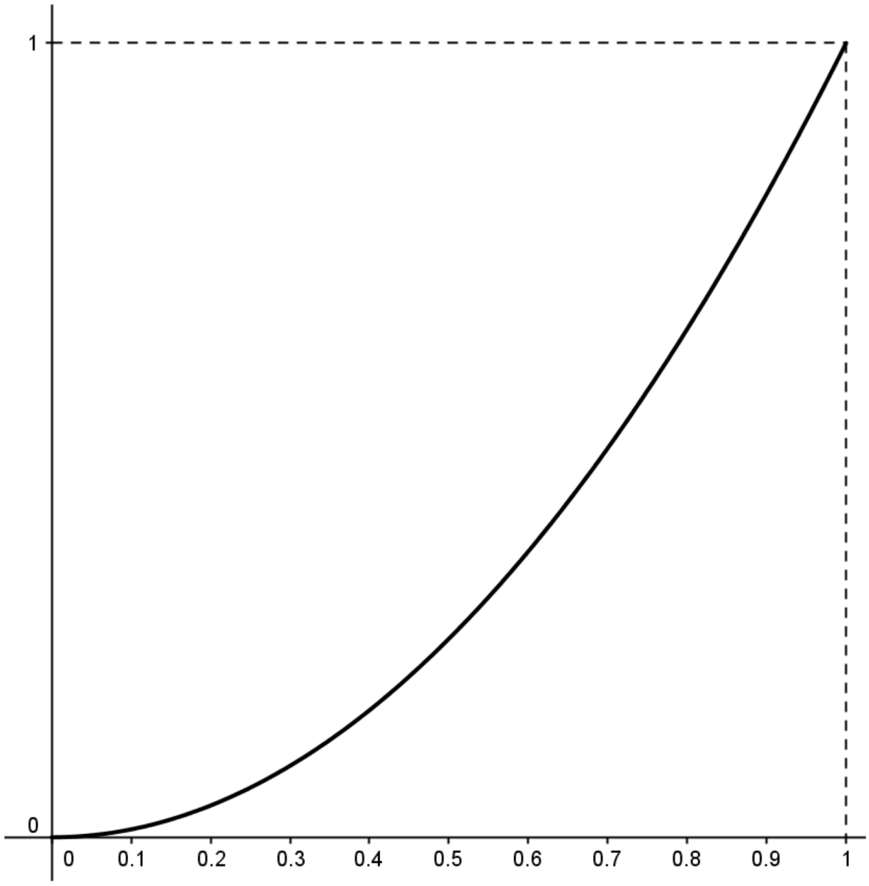
L'affirmation exacte est :
(1) Pour tout réel $x > 0,5$, $G(x) = F(x) - \frac{3}{2}$.
(2) F et G sont deux primitives d'une même fonction sur $]0,5\,;+\infty[$.
(3) Pour tout réel $x > 0,5$, $F(x) - G(x) = 1$.

Annexe 4. Exercice d'introduction

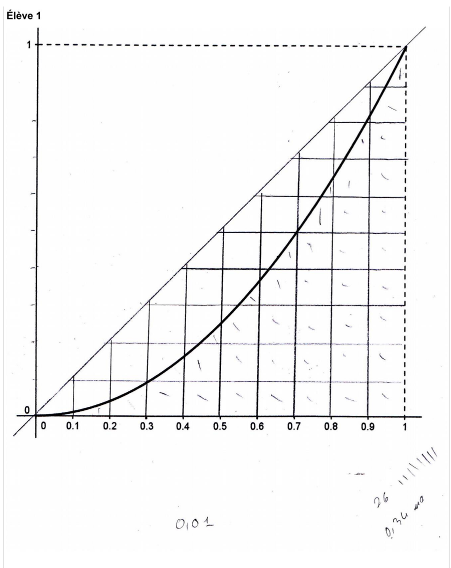
Énoncé : Un calcul d'aire

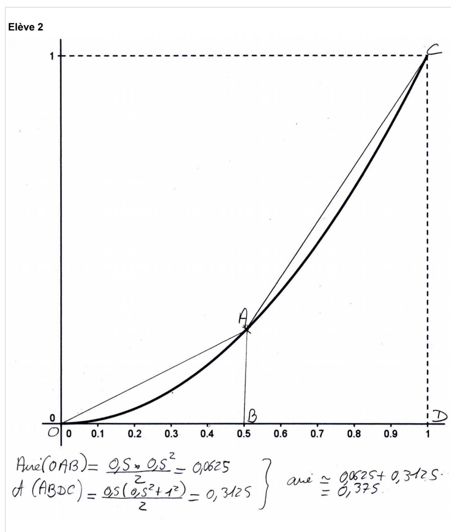
Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = x^2$ et B sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Objectif : Déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine délimité par la courbe B représentée ci-dessous, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.



Productions d'élèves sur l'exercice précédent :





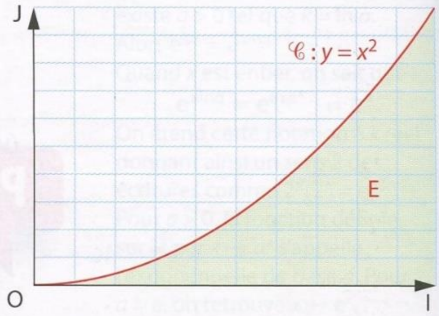
Annexe 5. Méthode des rectangles

1 Aire sous la parabole

@ TICE

La courbe $\mathscr{C}$ représente dans un repère orthogonal (O ; I, J) la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = x^2$. On cherche à évaluer l'aire de la partie E du plan colorée en vert dite « aire sous la courbe $\mathscr{C}$ ».

A. Unité d'aire



1. Donner un encadrement de l'aire par des nombres entiers de petits carreaux.

2. En déduire un encadrement de aire(E) exprimé en unité d'aire (1 unité d'aire est l'aire du rectangle de longueur [OI] et de largeur [OJ]).

3. Si les unités graphiques sont 6 cm pour OI et 5 cm pour OJ, donner un encadrement de aire(E) exprimé en cm^2.

B. Méthode des rectangles

Pour $n \geqslant 2$, on subdivise l'intervalle [0 ; 1] en n intervalles de même longueur. On construit des rectangles ayant pour base ces n intervalles et dont un sommet appartient à la courbe représentative de f.

1. Construction sur GeoGebra

a. Dans le menu *Options*, choisir *Arrondi* puis *3 décimales*.
Créer la fonction f en entrant **f(x) = x²** dans la zone de saisie.
Créer la droite d'équation $x = 1$.
Créer un curseur n de 1 à 100 avec un pas de 1. Le régler à $n = 4$.

b. Entrer dans la zone de saisie **a=SommeInférieure[f,0,1,n]**.
Combien de rectangles sont tracés ? Indiquer les dimensions de chacun.
Calculer leur aire totale a_4 et la comparer avec la valeur de a donnée par le logiciel.

c. Entrer **b=SommeSupérieure[f,0,1,n]**. Calculer l'aire totale b_4 des rectangles ainsi tracés et comparer avec la valeur de b affichée par le logiciel.

d. Quel encadrement de aire(E) peut-on conjecturer ?

e. Que se passe-t-il sur le logiciel quand n devient grand ?

2. Cas général

Pour $n \geqslant 2$, on note a_n la somme des aires des rectangles contenus dans E et b_n la somme des aires des rectangles « contenant » E.

a. Régler n à 7. Exprimer a_7 et b_7 en fonction de $f(0), f\left(\frac{1}{7}\right), f\left(\frac{2}{7}\right), \ldots, f\left(\frac{7}{7}\right)$.

b. De même, pour $n \geqslant 2$, exprimer a_n et b_n en fonction des $f\left(\frac{k}{n}\right), 0 \leqslant k \leqslant n$.

c. On a montré par récurrence (page 25) que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

En déduire a_n et b_n en fonction de n et montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ. Que peut-on proposer pour aire(E) ?

Annexe 6. Exercice avec productions d'élèves

L'exercice

Mathieu et Jeanne ont inventé un jeu avec leur calculatrice. Chaque joueur obtient un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0;1]$ à l'aide de la calculatrice. Si le produit des deux nombres est inférieur ou égal à $0,5$ alors Jeanne gagne, sinon c'est Mathieu qui gagne. Après quelques parties, ils s'aperçoivent que Jeanne gagne très souvent et Mathieu propose alors de remplacer la valeur $0,5$ par un autre nombre pour rendre le jeu plus équitable.
La version initiale du jeu avantage-t-elle Jeanne? Mathieu peut-il rendre ce jeu équitable?

Les productions de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

J'ai commencé par réaliser le programme ci-contre pour vérifier que Jeanne gagne très souvent.
J'ai simulé 10000 parties et Jeanne a gagné 8450 fois donc ce jeu avantage effectivement Jeanne.

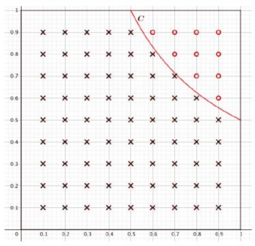
```
from random import*
def jouer():
    x=uniform(0,1)
    y=uniform(0,1)
    if x*y<=0.5:
        return "Jeanne"
    else:
        return "Mathieu"
```

J'ai remplacé la valeur 0,5 par des valeurs plus petites et à nouveau j'ai simulé 10000 parties.
Avec la valeur 0,19, le jeu semble plus équitable.

Valeurs k qui remplacent 0,5	*0,3*	*0,2*	*0,15*	*0,17*	*0,18*	*0,19*
Victoires de Jeanne sur 10000 parties	*6603*	*5217*	*4405*	*4730*	*4937*	*5023*

Élève 2

Dans ce jeu, c'est comme si dans mon repère ci-contre, on choisissait un point au hasard dans le carré de côté 1.
Les points marqués d'une croix font gagner Jeanne et les autres font gagner Mathieu.
Mais il y a plein d'autres points et les points qui font gagner Jeanne sont placés sous la courbe C d'équation $y = \dfrac{0,5}{x}$.
L'aire de Jeanne est égale à : $0,5 + 0,5\ln(2) \approx 0,8466$.



Pour rendre ce jeu plus équitable, il faut trouver k pour que l'aire sous la courbe d'équation $y = \dfrac{k}{x}$ *soit égale à 0,5. On a donc l'équation à résoudre :* $\displaystyle\int_0^1 \frac{k}{x}\mathrm{d}x = 0,5$.
On obtient $k\ln(1) - k\ln(0) = 0,5$ *mais il y a un problème car* $\ln(0)$ *n'existe pas.*

Annexe 7. Extrait des programmes officiels

- **Lois à densité**

Contenus

- Notion de loi à densité à partir d'exemples. Représentation d'une probabilité comme une aire. Fonction de répartition $x \mapsto P(X \leqslant x)$
- Espérance et variance d'une loi à densité, expressions sous forme d'intégrales.
- Loi uniforme sur $[0,1]$ puis sur $[a,b]$. Fonction de densité, fonction de répartition. Espérance et variance.
- Loi exponentielle. Fonction densité, fonction de répartition. Espérance, propriété d'absence de mémoire.

Capacités attendues

- Déterminer si une fonction est une densité de probabilité. Calculer des probabilités.
- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire à densité.

Exemples d'algorithme

- Simulation d'une variable de Bernoulli ou d'un lancer de dé (ou d'une variable uniforme sur un ensemble fini) à partir d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.
- Simulation du comportement de la somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi.