Partie I : Intégration, dérivation

A. Analyse d'erreurs d'élève

Le QCM de l'annexe 1 est proposé à des élèves de terminale spécialité mathématiques.

(**A**.**1**) Écrire les énoncés mathématiques sur le calcul intégral (définition, propriété) que doivent mobiliser les élèves pour répondre correctement.

(**A**.**2**) Dans un QCM, les réponses fausses proposées, appelées distracteurs, correspondent en général à des erreurs courantes. Indiquer la bonne réponse et analyser les distracteurs de l'annexe 7.

(**A**.**3**) Une majorité d'élèves a répondu **d.** à la question posée. Proposer un exercice qui pourrait permettre de remédier à l'erreur commise. Vous expliquerez pourquoi votre exercice est pertinent dans le cadre d'une remédiation.

B. Mobilisation de compétences mathématiques

Le problème « d'Archimède » (Annexe 2) est proposé à une classe de terminale spécialité mathématiques.

(**B**.**1**) Analyser la production de l'élève (Annexe 3) au regard des compétences Raisonner et Calculer.

(**B**.**2**) L'élève a choisi l'axe de symétrie de la parabole comme axe des ordonnées du repère. Quel autre repère aurait-il pu également choisir pour faciliter les calculs ? Rédiger une correction de l'exercice dans ce nouveau repère.

C. Algorithmique et programmation

(**C**.**1**) Pour utiliser la méthode de Monte-Carlo (Annexe 4) en classe terminale spécialité mathématiques, un enseignant hésite entre les deux situations de l'Annexe 5. Quelle situation paraît la plus pertinente à ce niveau ?

(**C**.**2**) Expliquer le résultat obtenu et analyser les erreurs commises par l'élève (Annexe 7) dans le programme qu'il produit en réponse à l'exercice d'application de la méthode de Monte Carlo donné en Annexe 6.

(**C**.**3**) Proposer une correction de ce programme.

(**C**.**4**) Que représente, dans un autre domaine des mathématiques, le résultat obtenu à l'exercice de l'Annexe 6 ?

D. Dérivation

On s'intéresse à l'exercice de l'Annexe 8.

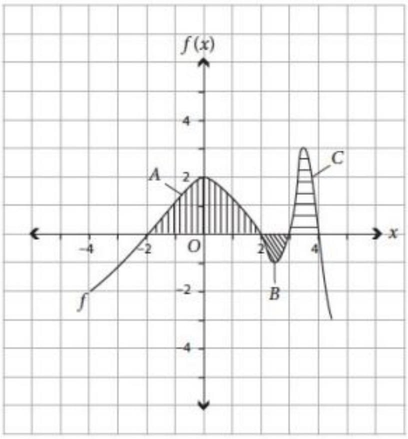
(**D**.**1**) Résoudre l'exercice.

(**D**.**2**) Proposer des éléments observables permettant d'apprécier la réussite d'un élève de terminale dans la résolution de cet exercice.

(**D**.**3**) Proposer un énoncé modifié de cet exercice incorporant des questions intermédiaires. Vous justifierez vos choix de questions intermédiaires.

E. Annexes

Annexe 1 : QCM



Pour les aires entre le graphe de f et l'axe des abscisses, l'aire de A est $4,8$ unités, l'aire de B est de $0,8$ unités et l'aire de C est de 2 unités. Quelle est la valeur de $\int_{-2}^{4} f(x)dx$?

a. 5, 6
b. 6
c. 6,8
d. 7,6

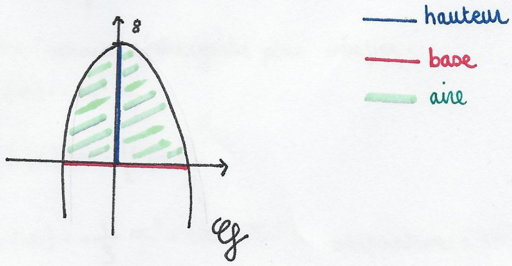
Annexe 2 : Le problème « d'Archimède »

Archimède affirmait que l'aire de la surface sous une arche parabolique est égale aux deux tiers de la base multipliée par la hauteur de l'arche. Qu'en pensez-vous ?

Annexe 3 : Production d'élève sur l'exercice précédent

• Afin de representer le problème d'Archimède, nous prenons une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est semblable à une arche parabolique.

$f(x) = -x^2 + 8$



• On calcule Δ afin de trouver les racines :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= -4 \times (-1) \times 8$

$= 32$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{32}}{-2} = 2\sqrt{2}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{32}}{-2} = -2\sqrt{2}$

• La base est donc $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

• Selon archimède : aire $= \frac{2}{3}$ base $\times$ hauteur

donc $\frac{2}{3}$ base $\times$ hauteur $= \frac{2}{3} 4\sqrt{2} \times 8 = \frac{64\sqrt{2}}{3}$

• On calcul l'intégrale pour vérifier l'affirmation d'Archimède

$f(x) = -x^2 + 8$

$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} f(x)dx = \left[F(x)\right]_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}$

$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 8x + k$ vérification : $F'(x) = -\frac{3}{3}x^2 + 8 = -x^2 + 8 = f(x)$

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} f(x)\,dx = F(2\sqrt{2}) - F(-2\sqrt{2}) = -\frac{1}{3}(2\sqrt{2})^3 + 8(2\sqrt{2}) - \left(-\frac{1}{3}(-2\sqrt{2})^3 + 8(-2\sqrt{2})\right)$$
$$= \frac{64\sqrt{2}}{3}$$

Conclusion: nous retombons bien sur le même résultat, donc Archimede avait raison : l'aire de la surface d'une arche parabolique est égale au deux tiers de la base fois la hauteur.

Annexe 4 : La méthode de Monte-Carlo

Une méthode originale

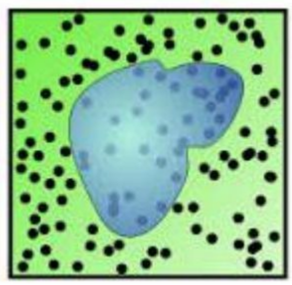
La méthode de Monte-Carlo est une méthode originale qui s'appuie sur le hasard pour estimer une aire.

Stanisław Ulam et John von Neumann l'appelèrent ainsi, en référence aux jeux de hasard dans les casinos, au cours du projet Manhattan qui produisit la première bombe atomique pendant la Seconde Guerre mondiale. Une surface inconnue peut être estimée de la façon suivante :

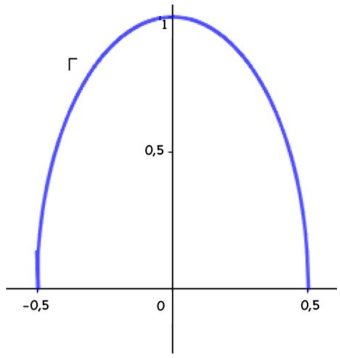
On l'englobe dans un domaine plus large dont l'aire est facile à calculer, un rectangle par exemple.

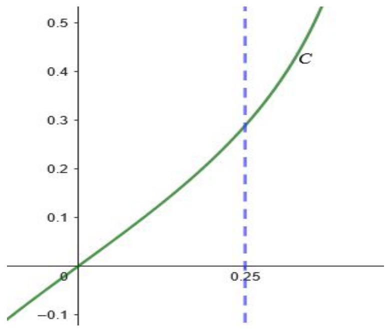
On génère des points au hasard dans ce rectangle.

On estime l'aire de la surface inconnue par la proportion de points à l'intérieur de la surface multipliée par l'aire du rectangle.



Annexe 5 : Calculs d'aire

<table>
<tr><td>Situation 1</td><td>Situation 2</td></tr>
<tr><td>

La courbe Γ représente la fonction f définie sur $[-1/2; 1/2]$ par $f(x) = \sqrt{1-4x^2}$. Déterminer l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe Γ et l'axe des abscisses.</td><td>

La courbe C représente la fonction f définie sur $]-1/2; 1/2[$ par $f(x) = x/\sqrt{1-4x^2}$. Déterminer l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1/4$.</td></tr>
</table>

Annexe 6 : Application de la méthode de Monte-Carlo

Écrire un algorithme qui renvoie une approximation de l'aire de la portion du plan comprise entre :

- La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- L'axe des ordonnées ;
- L'axe des abscisses ;
- La droite d'équation $x = 1$.

Annexe 7 : Production d'un élève

```
from math import*
from random import*

def f(x):
        y=exp(-x*x/2)/sqrt(2*pi)
        return y

def aire(n):
        compteur=0
        for k in range(n):
                x=random()
                y=random()
        if y<f(x):
                compteur=compteur+1
        return compteur
```

On obtient

```
> aire(1000000)
1
```

Annexe 8 : Le problème de Florimond de Beaune

Déterminer une fonction f dont la représentation graphique a toutes ses sous-tangentes égales.