

Séance 1 – Raisonnement -démonstration

Exercice 1

Extrait du programme de Première spécialité mathématiques (BO spécial n° 1 du 22 janvier 2019).

Les élèves apprennent en situation à :

- lire et écrire des propositions contenant les connecteurs logiques « et », « ou » ;
- mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;
- formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- formuler la réciproque d'une implication ;
- employer les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- identifier le statut des égalités (identité, équation) et celui des lettres utilisées (variable, inconnue, paramètre) ;
- utiliser les quantificateurs (les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas exigibles) et repérer les quantifications implicites dans certaines propositions, particulièrement dans les propositions conditionnelles ;
- formuler la négation de propositions quantifiées.

Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas, par l'absurde, par contraposée, et en découvrent la structure.

Une professeure donne l'exercice suivant à une classe de Première spécialité mathématiques.

A tout réel m , on associe la droite $\mathcal{D}_m$ d'équation : $(2m-1)x+(5-m)y-4m-7=0$

- 1) Montrer qu'il existe un point K appartenant à toutes les droites $\mathcal{D}_m$.
- 2) a) Déterminer m pour que $\mathcal{D}_m$ passe par le point $A(1 ; 1)$.
b) Si l'on se donne un point P du plan, existe-t-il toujours un nombre réel m tel que $\mathcal{D}_m$ passe par le point P ?

Vous trouverez ci-après les réponses de deux élèves.

Élève 1

Avec un logiciel de géométrie, j'ai construit la figure avec un curseur pour le paramètre m . En faisant varier m , je vois que :

1. Toutes les droites $\mathcal{D}_m$ passent par le point $K(3;2)$.
2. (a) Avec $m = -1$, $\mathcal{D}_m$ passe par le point A .
(b) Quand m varie, la droite $\mathcal{D}_m$ balaie tout le plan donc on peut atteindre tous les points du plan.

Élève 2

1. Si $m = 0$, la droite $\mathcal{D}_0$ a pour équation $-x + 5y - 7 = 0$.

Si $m = 5$, la droite $\mathcal{D}_5$ a pour équation $9x - 27 = 0$.

Les coordonnées du point d'intersection des deux droites vérifient le système

$$\begin{cases} -x + 5y - 7 = 0 \\ 9x - 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Donc toutes les droites $\mathcal{D}_m$ passent par le point $K(3;2)$.

2. (a) On remplace les coordonnées de A dans l'équation $\mathcal{D}_m$ et on obtient $m = -1$.
(b) Si on fait comme dans la question précédente, on obtient une valeur de m donc il existe toujours un nombre m tel que $\mathcal{D}_m$ passe par le point P .

Question 1. Quels éléments de l'extrait de programme ci-dessus le professeur souhaite-t-il travailler avec sa classe en donnant cet exercice ?

Question 2. Identifier trois difficultés de l'exercice liées à ces éléments.

Question 3. Analyser les productions des deux élèves (points positifs et points négatifs).

Exercice 2

L'exercice suivant est donné à une classe de Seconde.

On se propose de démontrer que : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

On suppose le contraire, c'est-à-dire que $\sqrt{2}$ est un rationnel. Cela revient à dire qu'il existe a et b entiers ($b \neq 0$) tels que : $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

On peut supposer que $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible (c'est-à-dire qu'on ne peut plus simplifier). En élevant au carré les deux membres de l'égalité, il vient $2 = \frac{a^2}{b^2}$ soit encore $a^2 = 2b^2$.

Cherchons à mettre en évidence une absurdité à partir de cette égalité.

1) a) Compléter le tableau suivant :

le dernier chiffre de a peut être :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
le dernier chiffre de a^2 est alors :										

b) De façon analogue, compléter le tableau suivant :

le dernier chiffre de b peut être										
le dernier chiffre de b^2 est alors :										
le dernier chiffre de $2b^2$ est alors :										

c) Entourer en rouge les chiffres qui conviennent et barrer ceux qui ne conviennent pas :

le dernier chiffre de a^2 peut être : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

le dernier chiffre de $2b^2$ peut être : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

2) Sachant que $a^2 = 2b^2$, par quel chiffre se terminent a^2 et $2b^2$?

BILAN : a ne peut se terminer que par

b ne peut se terminer que ou par

Quelle contradiction met-on en évidence ?

En déduire que $\sqrt{2}$ ne peut pas être rationnel.

Question 1. Quelles difficultés peuvent rencontrer des élèves de Seconde avec cet exercice ?

Question 2. Analyser la structure du raisonnement mené dans cet exercice.

Question 3. Donner une autre démonstration du fait que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel et analyser la structure de cette démonstration.

Exercice 3

Cet exercice se réfère à l'annexe qui présente deux extraits du manuel Indice, Bordas, Terminale spécialité mathématique, édition 2020.

- 1) Identifier deux éléments essentiels d'un raisonnement par récurrence qui ne sont pas mis en évidence dans la partie de cours. Vous donnerez une rédaction précise de ces deux éléments manquants.
- 2) Soit n un entier naturel, on appelle $P(n)$ la propriété « $2^n \geq (n+1)^2$ ».
 - a. Pour quelles valeurs de n la propriété $P(n)$ est-elle vraie ? Vous justifierez soigneusement votre réponse.
 - b. Expliquez pourquoi un élève qui se conformerait au cours du manuel Indice risquerait de penser qu'il peut prouver par récurrence que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .
- 3) Cette question concerne l'exercice 50, p. 28 du même manuel.
 - a. Cet exercice est étiqueté « Logique ». Quelles connaissances de logique sont en jeu dans cet exercice ?
 - b. Un élève a répondu à la question 3 : « L'étape d'initialisation est nécessaire parce que comme on sait que $P(0)$ est fausse on conclut par récurrence que $P(n)$ est fausse pour tout n ». Que dites-vous à cet élève ?
 - c. Rédigez un petit texte présentant comme pour des élèves de Terminale ce que vous souhaiteriez qu'ils retiennent après avoir traité cet exercice.

ANNEXE

Extraits du Manuel Indice, Bordas, Terminale enseignement de spécialité.

COURS

1. Raisonnement par récurrence

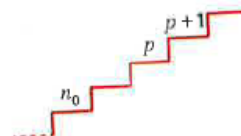
Principe de récurrence

En mathématiques, certaines propriétés dépendent d'un entier naturel n :

Soit par exemple un réel a strictement positif. Alors l'inégalité de Bernoulli affirme que pour tout entier naturel n , $(1+a)^n \geq 1+na$. On pourrait vérifier l'exactitude de cette propriété pour $n=0$: $(1+a)^0 = 1$, donc $(1+a)^0 \geq 1+0 \times a$; pour $n=1$: $(1+a)^1 = 1+a$, donc $(1+a)^1 \geq 1+1 \times a$; pour $n=2$: $(1+a)^2 = 1+2a+a^2$, donc $(1+a)^2 \geq 1+2a$; etc.

Même si on la vérifie pour tous les entiers n entre 0 et 100, cela ne démontre pas qu'elle est vraie pour tout entier naturel n .

Pour démontrer cette propriété, on utilise le principe de récurrence, qu'on peut illustrer à l'aide d'un escalier. Si on peut accéder à une marche n_0 de l'escalier (initialisation) et si l'on sait passer d'une marche à la suivante (hérédité) ; alors on peut accéder à toute marche au-dessus de la marche n_0 .



Point Histoire



C'est à Giuseppe Peano (1858-1932) et à



Henri Poincaré (1854-1912) que l'on doit le principe de récurrence.

PROPRIÉTÉ Principe de récurrence

Si une propriété est vraie pour un entier naturel n_0 et s'il est prouvé que lorsqu'elle est vraie pour un entier naturel p supérieur ou égal à n_0 , elle est vraie aussi pour l'entier naturel $p+1$, alors elle est vraie pour tous les entiers naturels supérieurs ou égaux à n_0 .

Une démonstration utilisant ce principe comporte donc deux étapes.

On note $P(n)$, une propriété qui dépend de l'entier naturel n et n_0 un entier naturel. Pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 , on procède comme ci-dessous.

- **Première étape : l'initialisation de la récurrence.** On vérifie que $P(n_0)$ est vraie, c'est-à-dire que la propriété est vraie pour le premier entier (en général $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$).
- **Deuxième étape : l'hérédité.** On considère un entier naturel p tel que $P(p)$ est vraie. C'est l'hypothèse de récurrence. On démontre alors que $P(p+1)$ est vraie.

Vocabulaire

Une propriété est dite héréditaire si, lorsqu'elle est vraie pour un entier p , elle est alors vraie pour l'entier $p+1$.

Exercice 50, p. 28 du même manuel

50 LOGIQUE Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 12$. Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$ la propriété suivante : « $u_n = 6$ ».

1. Vérifier que $P(0)$ et $P(1)$ sont fausses.
2. Montrer que $P(n)$ est héréditaire.
3. Justifier la nécessité de l'étape d'initialisation dans un raisonnement par récurrence.