M2 MEEF Mathématiques 2024-2025

Université Paris-Saclay

Concours blanc

17 octobre 2024 – 8h-13h

Ce sujet comporte 9 pages (on ne compte pas cette page de couverture), réparties de la manière suivante :

Sujet de la partie 1 : page 1

Annexes de la partie 1 : pages 2 à 5

Sujet de la partie 2 : pages 6 et 7

Annexes de la partie 2 : pages 8 et 9

Les deux parties seront rédigées sur des copies séparées.

Partie I : Intégration, dérivation

A. Analyse d'erreurs d'élève

Le QCM de l'annexe 1 est proposé à des élèves de terminale spécialité mathématiques.

(**A**.**1**) Écrire les énoncés mathématiques sur le calcul intégral (définition, propriété) que doivent mobiliser les élèves pour répondre correctement.

(**A**.**2**) Dans un QCM, les réponses fausses proposées, appelées distracteurs, correspondent en général à des erreurs courantes. Indiquer la bonne réponse et analyser les distracteurs de l'annexe 7.

(**A**.**3**) Une majorité d'élèves a répondu **d.** à la question posée. Proposer un exercice qui pourrait permettre de remédier à l'erreur commise. Vous expliquerez pourquoi votre exercice est pertinent dans le cadre d'une remédiation.

B. Mobilisation de compétences mathématiques

Le problème « d'Archimède » (Annexe 2) est proposé à une classe de terminale spécialité mathématiques.

(**B**.**1**) Analyser la production de l'élève (Annexe 3) au regard des compétences Raisonner et Calculer.

(**B**.**2**) L'élève a choisi l'axe de symétrie de la parabole comme axe des ordonnées du repère. Quel autre repère aurait-il pu également choisir pour faciliter les calculs ? Rédiger une correction de l'exercice dans ce nouveau repère.

C. Algorithmique et programmation

(**C**.**1**) Pour utiliser la méthode de Monte-Carlo (Annexe 4) en classe terminale spécialité mathématiques, un enseignant hésite entre les deux situations de l'Annexe 5. Quelle situation paraît la plus pertinente à ce niveau ?

(**C**.**2**) Expliquer le résultat obtenu et analyser les erreurs commises par l'élève (Annexe 7) dans le programme qu'il produit en réponse à l'exercice d'application de la méthode de Monte Carlo donné en Annexe 6.

(**C**.**3**) Proposer une correction de ce programme.

(**C**.**4**) Que représente, dans un autre domaine des mathématiques, le résultat obtenu à l'exercice de l'Annexe 6 ?

D. Dérivation

On s'intéresse à l'exercice de l'Annexe 8.

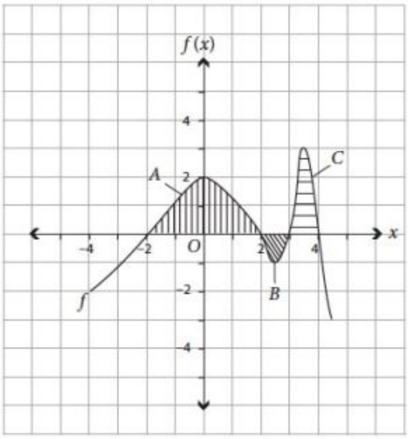
(**D**.**1**) Résoudre l'exercice.

(**D**.**2**) Proposer des éléments observables permettant d'apprécier la réussite d'un élève de terminale dans la résolution de cet exercice.

(**D**.**3**) Proposer un énoncé modifié de cet exercice incorporant des questions intermédiaires. Vous justifierez vos choix de questions intermédiaires.

E. Annexes

Annexe 1 : QCM



Pour les aires entre le graphe de f et l'axe des abscisses, l'aire de A est $4,8$ unités, l'aire de B est de $0,8$ unités et l'aire de C est de 2 unités. Quelle est la valeur de $\int_{-2}^{4} f(x)dx$?

a. 5, 6

b. 6

c. 6,8

d. 7,6

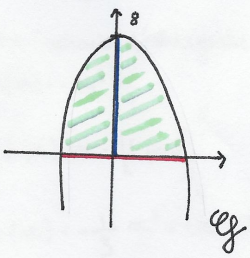
Annexe 2 : Le problème « d'Archimède »

Archimède affirmait que l'aire de la surface sous une arche parabolique est égale aux deux tiers de la base multipliée par la hauteur de l'arche. Qu'en pensez-vous ?

Annexe 3 : Production d'élève sur l'exercice précédent

• Afin de representer le problème d'Archimède, nous prenons une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est semblable à une arche parabolique.

$f(x) = -x^2 + 8$



hauteur

base

aire

• On calcule Δ afin de trouver les racines :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= -4 \times (-1) \times 8$

$= 32$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-\sqrt{32}}{-2} = 2\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\sqrt{32}}{-2} = -2\sqrt{2}$

• La base est donc $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

• Selon archimède : aire $= \dfrac{2}{3}$ base $\times$ hauteur

donc $\dfrac{2}{3}$ base $\times$ hauteur $= \dfrac{2}{3} 4\sqrt{2} \times 8 = \dfrac{64\sqrt{2}}{3}$

• On calcul l'intégrale pour vérifier l'affirmation d'Archimède

$f(x) = -x^2 + 8$

$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} f(x)dx = \left[F(x)\right]_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}$

$F(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 8x + k$ vérification : $F'(x) = -\dfrac{3}{3}x^2 + 8 = -x^2 + 8 = f(x)$

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} f(x)\,dx = F(2\sqrt{2}) - F(-2\sqrt{2}) = -\frac{1}{3}(2\sqrt{2})^3 + 8(2\sqrt{2}) - \left(-\frac{1}{3}(-2\sqrt{2})^3 + 8(-2\sqrt{2})\right)$$
$$= \frac{64\sqrt{2}}{3}$$

Conclusion: nous retombons bien sur le même résultat, donc Archimede avait raison : l'aire de la surface d'une arche parabolique est égale au deux tiers de la base fois la hauteur.

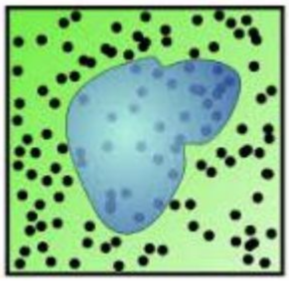
Annexe 4 : La méthode de Monte-Carlo

Une méthode originale

La méthode de Monte-Carlo est une méthode originale qui s'appuie sur le hasard pour estimer une aire.

Stanisław Ulam et John von Neumann l'appelèrent ainsi, en référence aux jeux de hasard dans les casinos, au cours du projet Manhattan qui produisit la première bombe atomique pendant la Seconde Guerre mondiale. Une surface inconnue peut être estimée de la façon suivante :

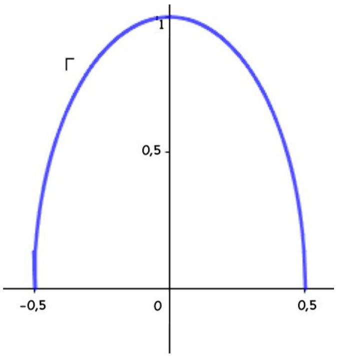
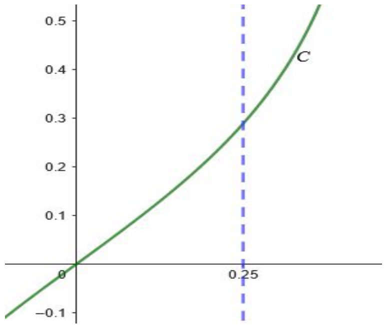
On l'englobe dans un domaine plus large dont l'aire est facile à calculer, un rectangle par exemple.



On génère des points au hasard dans ce rectangle.

On estime l'aire de la surface inconnue par la proportion de points à l'intérieur de la surface multipliée par l'aire du rectangle.

Annexe 5 : Calculs d'aire

Situation 1	Situation 2
 La courbe Γ représente la fonction f définie sur $[-1/2;1/2]$ par $f(x) = \sqrt{1-4x^2}$. Déterminer l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe Γ et l'axe des abscisses.	 La courbe C représente la fonction f définie sur $]-1/2;1/2[$ par $f(x) = x/\sqrt{1-4x^2}$. Déterminer l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1/4$.

Annexe 6 : Application de la méthode de Monte-Carlo

Écrire un algorithme qui renvoie une approximation de l'aire de la portion du plan comprise entre :

- La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- L'axe des ordonnées ;
- L'axe des abscisses ;
- La droite d'équation $x = 1$.

Annexe 7 : Production d'un élève

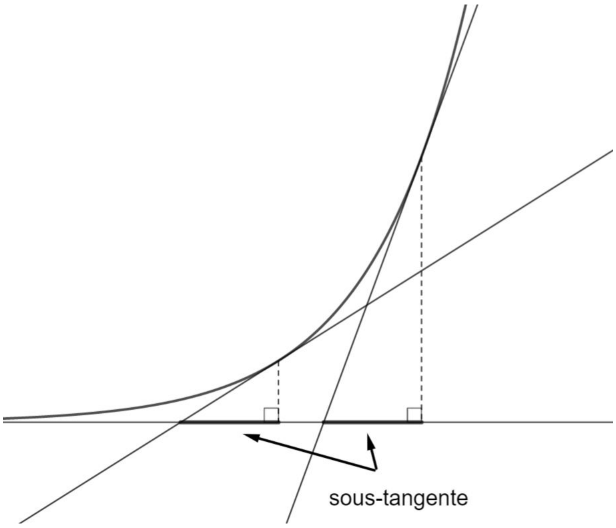
```
from math import*
from random import*

def f(x):
        y=exp(-x*x/2)/sqrt(2*pi)
        return y

def aire(n):
        compteur=0
        for k in range(n):
                x=random()
                y=random()
        if y<f(x):
                compteur=compteur+1
        return compteur
```

On obtient

```
> aire(1000000)
1
```

Annexe 8 : Le problème de Florimond de Beaune

Déterminer une fonction f dont la représentation graphique a toutes ses sous-tangentes égales.



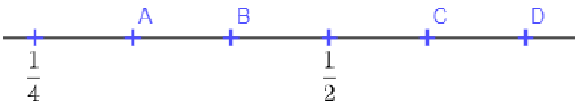
Partie 2. Nombres, raisonnement.

I. Rationnels et décimaux

I.1 L'exercice suivant a été posé lors de l'évaluation TIMSS 2019 en classe de quatrième.

Exercice 1

uel point a pour abscisse $\frac{5}{12}$ sur cette droite aduée ? Entourez le point choisi.



I.1.a Donner une procédure juste permettant à un élève de quatrième de résoudre cet exercice. Quels sont les savoirs et savoir-faire en jeu dans cette procédure ?

I.1.b Quelle raison peut conduire un élève à choisir le distracteur D ? Que peut-on dire à cet élève pour l'aider ?

I.1.c Lors de l'évaluation TIMSS 2019 cet exercice a recueilli 38,6% de bonnes réponses. Citer trois difficultés de l'exercice qui contribuent à expliquer ce score.

I.2 L'exercice suivant est issu de la fiche « Exemples d'exercices. Quatrième. Nombres et calculs » disponible sur Eduscol.

Exercice 2

Dans chaque cas, dire si la fraction est un nombre décimal. Cochez la réponse exacte ; si oui, donnez l'écriture décimale du nombre.

Fraction	Oui	Non	Ecriture décimale
$\frac{36}{20}$			
$\frac{5}{15}$			
$\frac{23}{25}$			

I.2.a Une professeure donne cet exercice à ses élèves de 4^e. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. Pour chacune des trois fractions, donner une procédure que ces élèves de quatrième peuvent utiliser pour répondre « oui » ou « non », et pour produire le cas échéant son écriture décimale.

I.2.b Suite à cet exercice, l'enseignante écrit pour ses élèves de quatrième un petit mémo, intitulé « Comment savoir si une fraction est un nombre décimal ? ». Proposez un contenu pour ce petit mémo.

I.2.c Un enseignant donne le même exercice à ses élèves de seconde, en complétant la consigne par « si non, démontrer que le nombre n'est pas décimal ». Donnez une démonstration juste que les élèves de seconde peuvent proposer, pour prouver que $\frac{5}{15}$ n'est pas décimal. Vous décrirez les savoir-faire relevant de la compétence « raisonner » présents dans cette démonstration.

II. Produit de nombres relatifs

Dans cette partie nous nous appuyons sur les annexes A.1 : extrait d'une ressource Eduscol, A.2 et A.3 : extraits du manuel Sésamath cycle 4.

II.1 Pourquoi la multiplication de nombres relatifs peut poser problème à des élèves de quatrième qui la découvrent ? Donnez deux raisons différentes.

II.2 Cette question concerne l'annexe A.1, extrait d'une ressource Eduscol. Expliquez ce que le document nomme « le principe de permanence », et ce que l'étape 2 ajoute à l'étape 1.

II.3 Cette question concerne l'annexe A.2, extrait du manuel Sésamath Cycle 4. Dans quelle mesure cette activité d'introduction à la multiplication de relatifs suit (ou s'écarte de) la démarche recommandée par l'extrait de ressource Eduscol ? Vous prendrez soin de considérer chacune des questions de l'activité.

II.4 Vous trouverez en annexe A.3 deux énoncés d'exercices sur la multiplication de nombres relatifs. Quels objectifs précis peuvent conduire un enseignant à choisir pour ses élèves l'un ou l'autre de ces exercices ?

III Raisonner et chercher

III.1 Le problème des « nombres trapézoïdaux » (groupe Dreamaths, IREM de Lyon) peut être posé du collège au lycée. Voici un de ses énoncés possibles :

Trouver tous les nombres entiers strictement positifs qui sont la somme d'au moins deux nombres entiers naturels consécutifs. On les appelle les nombres trapézoïdaux.

Vous proposez ce problème à vos élèves de seconde, sous forme de travail en groupe. Dans une première phase de 10 minutes, ils sont invités à chercher et formuler des conjectures. Les élèves ont des ordinateurs portables et ont le droit d'utiliser le tableur. Ensuite une deuxième phase de mise en commun (10-15 minutes) permet de partager et de discuter ces conjectures. Vous avez préparé pour la fin de la mise en commun un fichier tableur dont un extrait est donné en annexe B1 (indication : regarder cette annexe B1 avant de répondre aux questions).

III.1.a Lors de la mise en commun, le groupe A propose la conjecture : « les nombres trapézoïdaux sont les nombres impairs ». D'où peut provenir cette conjecture fausse ? Quels arguments attendez-vous d'autres élèves pour invalider la conjecture ?

III.1.b Le groupe B propose la conjecture : « les nombres impairs et les multiples de 3 sont des nombres trapézoïdaux ». Un élève du groupe C dit « c'est faux, parce que 14 est trapézoïdal et il n'est ni impair ni multiple de 3 ». Comment allez-vous orienter la suite de l'échange ?

III.1.c Dans une troisième phase, vous demandez aux élèves de démontrer la conjecture du groupe B. Ecrivez une démonstration que les élèves de seconde peuvent produire.

III.1.d Citer quatre savoir-faire de logique et de raisonnement qui ont été travaillés pendant cette séance, en justifiant à chaque fois la présence de ce savoir-faire.

III.2 L'exercice suivant a été proposé à des élèves suivant l'option Maths expertes en terminale.

Exercice 3

Soit n un entier naturel. Démontrer que, dans l'écriture en base dix, les entiers n et n^5 ont le même chiffre des unités.

Vous trouverez en annexe les productions de deux élèves concernant cet exercice.

III.2.a Pour chacun des deux élèves, décrire les points positifs et les points négatifs de sa production. Vous détaillerez particulièrement ce qui concerne le raisonnement par récurrence.

III.2.b Donner une solution de cet exercice qui n'utilise pas de raisonnement par récurrence. Vous rédigerez cette solution comme pour des élèves de terminale option Maths expertes.

III.2.c Détailler les différents savoir-faire relevant de la compétence « raisonner » dans la solution que vous proposez.

Annexes

Annexes A, partie II.

Annexe A.1 Extrait de la ressource Eduscol « Nombres relatifs ».

La multiplication

La multiplication des décimaux relatifs pourra être approchée en plusieurs étapes, conduites par le professeur, sur des exemples génériques simples, une fois que la compréhension et l'utilisation de l'addition et de la soustraction aura été stabilisée :

1. la multiplication d'un entier naturel par un entier négatif sollicite le sens premier de la multiplication comme addition itérée : $2 \times (-3) = (-3) + (-3) = (-6)$ (verbalisée en « deux fois (-3) ») ;
2. le principe de permanence permet d'étendre aux nombres relatifs une égalité du type $2 \times 3 = 3 \times 2$ et de définir $(-3) \times 2$ comme étant égal à $2 \times (-3)$;
3. la justification de l'égalité $(-2) \times (-3) = 6$ repose sur le fait que $(-2) \times (-3) + 2 \times (-3) = \big((-2)+2\big) \times (-3) = 0 \times (-3) = 0$, à condition d'admettre l'extension aux nombres relatifs de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, connue chez les décimaux positifs, et le résultat de la multiplication par 0.

La règle permettant de calculer le produit de deux nombres relatifs pourra alors être institutionnalisée, notamment au niveau du signe du produit.

Annexe A.2 Extrait du manuel Sésamaths cycle 4 2016.

Activité 5 Produit de nombres relatifs

1. Presque comme avant !

a. Quelle est la valeur de B = (– 2) + (– 2) + (– 2) + (– 2)?
Conjecture la manière dont on calcule le produit d'un nombre négatif par un nombre positif.

b. On considère l'expression Z = 3,5 × 1,2 + (– 3,5) × 1,2.

- Factorise Z puis calcule sa valeur.
- Que peut-on en déduire pour les nombres 3,5× 1,2 et (– 3,5) × 1,2 ?
  Déduis-en la valeur de (– 3,5) × 1,2.

2. Négatif fois négatif ...

a. Effectue les calculs donnés dans le cadre ci-contre.
Quelle pourrait être la valeur de (– 7) × (– 5) ?

b. On considère l'expression
N = (– 1,5) × 0,8 + (– 1,5) × (– 0,8).
Retrouve la valeur de (– 1,5) × (– 0,8).

(– 7) × 4 = ...

(– 7) × 3 = ...

(– 7) × 2 = ...

(– 7) × 1 = ...

(– 7) × 0 = ...

Annexe A.3

Exercice A3.1 Soient deux nombres relatifs non nuls *r* et *t* dont le produit est positif et la somme négative. Que peut-on dire sur le signe de *r* et le signe de *t* ?

Exercice A3.2 Trouver deux nombres relatifs non nuls *u* et *v* dont le produit et la somme sont négatifs.

Annexes B , partie III

Annexe B.1. Extrait de tableur, problème des nombres trapézoïdaux, partie III.1

	A	B	C	D
1	**Entiers**	**Sommes de deux entiers consécutifs**	**Sommes de trois entiers consécutifs**	**Sommes de quatre entiers consécutifs**
2	0	1	3	6
3	1	3	6	10
4	2	5	9	14
5	3	7	12	18
6	4	9	15	22
7	5	11	18	26
8	6	13	21	30
9	7	15	24	34
10	8	17	27	38
11	9	19	30	42
12	10	21	33	46
13	11	23	36	50
14	12	25	39	54

Annexe B.2. Travaux d'élèves, partie III.2

Elève 1

Avec le tableur, j'ai regardé tous les cas possibles de congruences modulo 10.
On obtient bien toujours le même nombre, les entiers n et n^5 ont le même chiffre des unités.

	A	B
1	0	0
2	1	1
3	2	32
4	3	243
5	4	1024
6	5	3125
7	6	7776
8	7	16807
9	8	32768
10	9	59049

Elève 2

Je vais montrer par récurrence que $n^5 - n$ est multiple de 10. C'est vrai pour $n=0$.

Je suppose que $n^5 - n$ est multiple de 10 et alors je dois montrer que $(n + 1)^5 - (n + 1)$ est aussi multiple de 10.

$(n + 1)^5 - (n + 1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1= (n^5 - n) + 10(n^3 + n^2) + 5(n^4 + n)$

On sait que $n^5 - n$ et $10(n^3 + n^2)$ sont des multiples de 10. Mais $5(n^4 + n)$ est aussi multiple de 10, parce que il est multiple de 5 et $n^4 + n$ est pair.

Donc la propriété est démontrée.