Les nombres, leurs écritures, le calcul du collège au lycée
Partie 2

M2 MEEF Maths et DU prépa concours

université PARIS-SACLAY

Les nombres au cycle 4

REPÈRES ANNUELS DE PROGRESSION POUR LE CYCLE 4

NOMBRES ET CALCULS		
Nombres décimaux relatifs		
5e	4e	3e
Le travail mené au cycle 3 sur l'enchaînement des opérations, les comparaisons et le repérage sur une droite graduée de nombres décimaux positifs est poursuivi. Les nombres relatifs (d'abord entiers, puis décimaux) sont construits pour rendre possibles toutes les soustractions. La notion d'opposé est introduite, l'addition et la soustraction sont étendues aux nombres décimaux (positifs ou négatifs). Il est possible de mettre en évidence que soustraire un nombre revient à additionner son opposé, en s'appuyant sur des exemples à valeur générique du type : $3{,}1 - (-2) = 3{,}1 + 0 - (-2) = 3{,}1 + 2 + (-2) - (-2)$, donc $3{,}1 - (-2) = 3{,}1 + 2 + 0 = 3{,}1 + 2 = 5{,}1$	Le produit et le quotient de décimaux relatifs sont abordés.	Le travail est consolidé notamment lors des résolutions de problèmes.

Les nombres au cycle 4, suite

NOMBRES ET CALCULS (suite)		
Racine carrée		
	La racine carrée est introduite, en lien avec des situations géométriques (théorème de Pythagore, agrandissement des aires) et à l'appui de la connaissance des carrés parfaits de 1 à 144 et de l'utilisation de la calculatrice.	La racine carrée est utilisée dans le cadre de la résolution de problèmes. *Aucune connaissance n'est attendue sur les propriétés algébriques des racines carrées.*
Puissances		
	Les puissances de 10 sont d'abord introduites avec des exposants positifs, puis négatifs, afin de définir les préfixes de nano à giga et la notation scientifique. Celle-ci est utilisée pour comparer des nombres et déterminer des ordres de grandeurs, en lien d'autres disciplines. Les puissances de base quelconque d'exposants positifs sont introduites pour simplifier l'écriture de produits. *La connaissance des formules générales sur les produits ou quotients de puissances de 10 n'est pas un attendu du programme : la mise en œuvre des calculs sur les puissances découle de leur définition.*	Les puissances de base quelconque d'exposants négatifs sont introduites et utilisées pour simplifier des quotients. *La connaissance des formules générales sur les produits ou quotients de puissances n'est pas un attendu du programme : la mise en œuvre des calculs sur les puissances découle de leur définition.*
Divisibilité, nombres premiers		
Tout au long du cycle, les élèves sont amenés à modéliser et résoudre des problèmes mettant en jeu la divisibilité et les nombres premiers.		
Le travail sur les multiples et les diviseurs, déjà abordé au cycle 3, est poursuivi. Il est enrichi par l'introduction de la notion de nombre premier. Les élèves se familiarisent avec la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 30. Ceux-ci sont utilisés pour la décomposition e[illegible] facteurs premiers. Cette décomp[illegible] pour reconnaître et produire des [illegible]	Les élèves déterminent la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 100 et l'utilisent pour décomposer des nombres en facteurs premiers, reconnaître et produire des fractions égales, simplifier des fractions.	La notion de fraction irréductible est introduite. L'utilisation d'un tableur, d'un logiciel de programmation ou d'une calculatrice permet d'étendre la procédure de décomposition en facteurs premiers.

Les nombres au cycle 4, suite

NOMBRES ET CALCULS (suite)		
Racine carrée		
	La racine carrée est introduite, en lien avec des situations géométriques (théorème de Pythagore, agrandissement des aires) et à l'appui de la connaissance des carrés parfaits de 1 à 144 et de l'utilisation de la calculatrice.	La racine carrée est utilisée dans le cadre de la résolution de problèmes. *Aucune connaissance n'est attendue sur les propriétés algébriques des racines carrées.*
Puissances		
	Les puissances de 10 sont d'abord introduites avec des exposants positifs, puis négatifs, afin de définir les préfixes de nano à giga et la notation scientifique. Celle-ci est utilisée pour comparer des nombres et déterminer des ordres de grandeurs, en lien d'autres disciplines. Les puissances de base quelconque d'exposants positifs sont introduites pour simplifier l'écriture de produits. *La connaissance des formules générales sur les produits ou quotients de puissances de 10 n'est pas un attendu du programme : la mise en œuvre des calculs sur les puissances découle de leur définition.*	Les puissances de base quelconque d'exposants négatifs sont introduites et utilisées pour simplifier des quotients. *La connaissance des formules générales sur les produits ou quotients de puissances n'est pas un attendu du programme : la mise en œuvre des calculs sur les puissances découle de leur définition.*
Divisibilité, nombres premiers		
Tout au long du cycle, les élèves sont amenés à modéliser et résoudre des problèmes mettant en jeu la divisibilité et les nombres premiers.		
Le travail sur les multiples et les diviseurs, déjà abordé au cycle 3, est poursuivi. Il est enrichi par l'introduction de la notion de nombre premier. Les élèves se familiarisent avec la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 30. Ceux-ci sont utilisés pour la décomposition e facteurs premiers. Cette décomp pour reconnaître et produire des	Les élèves déterminent la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 100 et l'utilisent pour décomposer des nombres en facteurs premiers, reconnaître et produire des fractions égales, simplifier des fractions.	La notion de fraction irréductible est introduite. L'utilisation d'un tableur, d'un logiciel de programmation ou d'une calculatrice permet d'étendre la procédure de décomposition en facteurs premiers.

Les nombres à partir de la seconde

- **Manipuler les nombres réels**

Au cycle 4, les élèves ont étudié les inégalités pour comparer des valeurs numériques. La notion d'intervalle, présentée comme ensemble de nombres vérifiant des inégalités, est nouvelle.

La notation de la valeur absolue est introduite pour exprimer la distance entre deux nombres réels et caractériser les intervalles de centre donné. Toute autre utilisation est hors programme.

Contenus

- Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, droite numérique.
- Intervalles de $\mathbb{R}$. Notations $+\infty$ et $-\infty$.
- Notation $|a|$. Distance entre deux nombres réels.
- Représentation de l'intervalle $[a - r , a + r]$ puis caractérisation par la condition $|x - a| \leqslant r$.
- Ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux. Encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près.
- Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, par exemple $\sqrt{2}$ et π.

Capacités attendues

– Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.

– Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.

– Donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.

– Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.

Démonstrations

– Le nombre rationnel 1/3 n'est pas décimal.

– Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exemple d'algorithme

– Déterminer par balayage un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-n}

Approfondissements possibles

– Développement décimal illimité d'un nombre réel.

– Observation, sur des exemples, de la périodicité du développement décimal de nombres rationnels, du fait qu'un développement décimal périodique correspond à un rationnel.

De nouveaux nombres : les négatifs

Une introduction délicate – comme toujours quand on rencontre de nouveaux nombres, pour lesquels certaines propriétés des nombres déjà connus ne sont plus valables. (IREM Bordeaux, 2008)

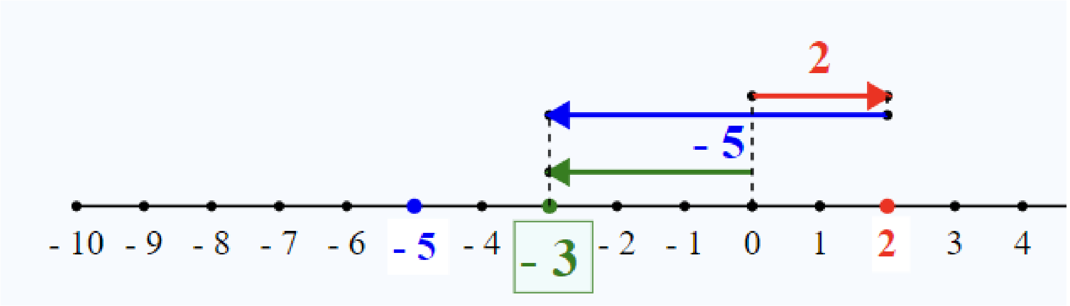
Une émergence historique longue, avec des obstacles :

- Sens des quantités négatives isolées
- Passer du zéro absolu au zéro relatif
- Vouloir donner un sens concret aux nombres négatifs
- Pas de modèle concret permettant de donner un sens à l'addition ET à la multiplication.

Importance d'introduire simultanément les nombres et les opérations avec ces nombres.

Contextes d’introduction et significations

	Concret	Repérage
Etat	-3°C	Position
Variation	Descendre de 3 étages	Déplacement



Dans tous les cas des obstacles : « Etat », pas d’opération possible ; « Concret », pas de sens pour le produit de deux négatifs…

Le contexte mathématique

- Pas de support concret, pas de représentation pour soutenir la construction du sens
- Mais des règles liées aux opérations, aux équations.

-1,2 est la solution de 1,2 + ? = 0

1,2 + (-1,2) = 0

1,2*3 + (-1,2)*3 = (1,2 + (-1,2))*3=0*3=0

Donc (-1,2)*3 est la solution de 1,2*3+?=0

(-1,2)* 3= - (1,2*3)

Plusieurs sens du symbole « - » : signe d'un nombre, opposé pour l'addition, opération. Deux sens pour le symbole « + », si on note +3 par exemple (voir si cette notation aide ou non les élèves).

La racine carrée

Introduction du symbole√ dans un contexte géométrique, en lien avec le théorème de Pythagore.

Définition

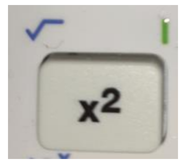
« *a* désigne un nombre positif. La racine carrée de *a* est le nombre positif dont le carré est *a*. Ce nombre est noté √ *a*. » (Transmaths 4e)

Beaucoup de nouveautés, beaucoup d'implicites :

- Domaine de validité : que se passe-t-il si *a* n'est pas positif ?
- La racine carrée de *a* est LE nombre : sous-entendu unicité et existence
- Est-ce qu'il existe des racines pas carrées ?
- Nouvelle notation pour désigner un nombre.

Racines carrées, calcul

- Importance de la calculatrice : touches « 2de » puis « carré », association entre racine carrée et carré.



- Mais le carré et la racine carrée comme fonctions n'arrivent qu'en seconde
- Les calculs algébriques sur les racines carrées n'arrivent aussi qu'en Seconde
- Beaucoup de règles de contrat didactique, à expliciter :
    - On évite d'utiliser une écriture comme $1/\sqrt{2}$, on note plutôt $\sqrt{2}/2$
    - On simplifie autant que possible en utilisant des carrés parfaits : $\sqrt{27}=\sqrt{(3*3^{2})}=3\sqrt{3}$
    - Quand il y a une différence de deux racines, on utilise l'identité remarquable $(\sqrt{a}-\sqrt{b})*(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$

Racines carrées, algorithmes et nature des nombres

Les racines carrées fournissent l'occasion de rencontre des nombres irrationnels.

- Travail sur le raisonnement : preuve(s) de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.
- Travail sur l'approximation et les algorithmes : algorithme de dichotomie pour résoudre x^2-a=0, algorithme de Héron…

L'idée d'approximation par des décimaux permet une approche de l'idée d'écriture décimale illimitée pour les nombres réels.

La définition des nombres réels reste intuitive, comme abscisse d'un nombre sur un axe orienté muni d'une origine.

Les puissances

En commençant en 4e par les puissances de 10, positives, puis négatives, en lien avec les grandeurs et mesures (changement d'unités).

Des causes de difficultés lors de l'introduction des puissances :

- Une notation nouvelle 10^n , confusions possibles avec $10*n$;
- Une introduction rapide des puissances négatives : 10^{-n}, pas toujours en lien avec un sens concret ;
- La convention : $10^0=1$
- La calculatrice : notation scientifique, touches spécifiques

Des causes de difficultés ensuite (seconde) liées aux calculs sur les puissances : $10^a * 10^b = 10^{a+b}$ *souvent remplacé par* 10^{a*b}