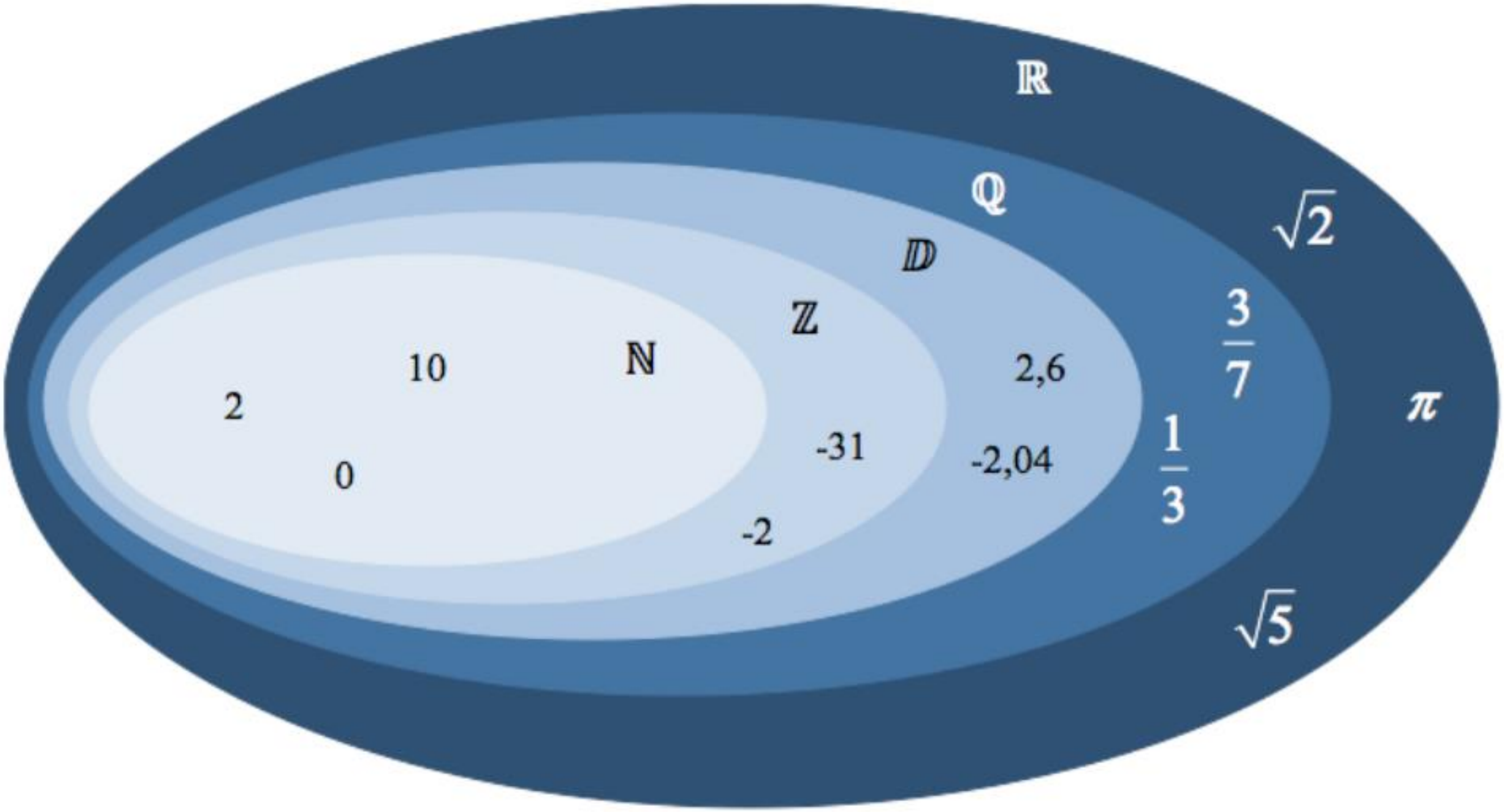
Les nombres, leurs écritures, le calcul du collège au lycée

Partie 1 : entiers, rationnels, et décimaux positifs

M2 MEEF Maths et DU prépa concours

université PARIS-SACLAY

Les nombres et leurs écritures, 6^{e}-1ère

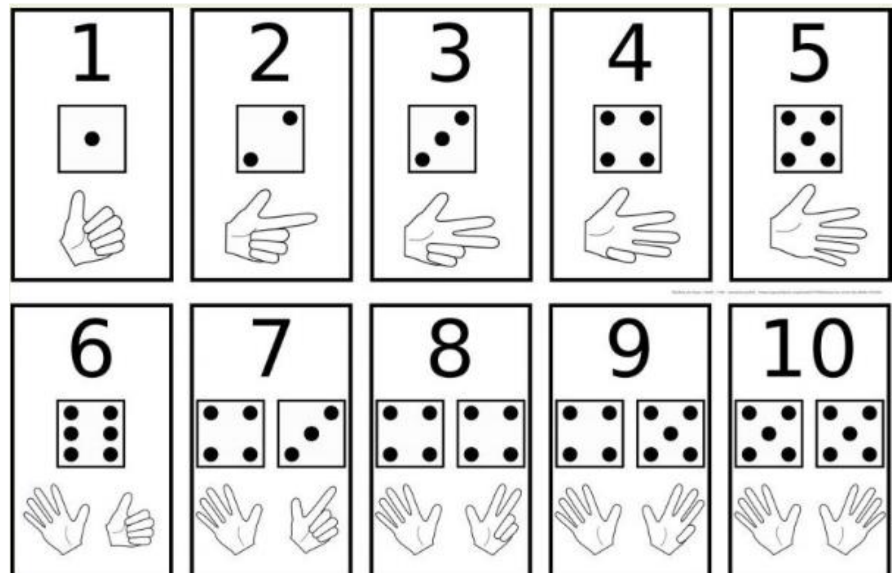


Les nombres et leurs écritures, progression

Au primaire

Seulement des nombres positifs

Découverte des nombres entiers et de leurs écritures en lettres (mots-nombres, désignation dite « orale ») et en chiffres (désignation « écrite »). Et d'autres représentations …



A partir du CM1 :

Les fractions simples sont introduites par l'idée de partage d'une unité. On passe ensuite aux fractions décimales, et aux nombres décimaux.

Ecriture fractionnaire, écriture à virgule

Les nombres dans les programmes, cycle 3

REPÈRES ANNUELS DE PROGRESSION POUR LE CYCLE 3

NOMBRES ET CALCULS		
Les nombres entiers		
CM1	**CM2**	**6^{e}**
Les élèves apprennent à utiliser et à représenter les grands nombres entiers jusqu'au million. Il s'agit d'abord de consolider les connaissances (écritures, représentations...).	Le répertoire est étendu jusqu'au milliard.	En **période 1,** dans un premier temps, les principes de la numération décimale de position sur les entiers sont repris jusqu'au million, puis au milliard comme en CM, et mobilisés sur les situations les plus variées possibles, notamment en relation avec d'autres disciplines.
La valeur positionnelle des chiffres doit constamment être mise en lien avec des activités de groupements et d'échanges.		
Fractions		
Dès la **période 1** les élèves utilisent d'abord les fractions simples (comme $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$) dans le cadre de partage de grandeurs. Ils travaillent des fractions inférieures et des fractions supérieures à 1. Dès la **période 2**, les fractions décimales sont régulièrement mobilisées : elles acquièrent le statut de nombre et sont positionnées sur une droite graduée. Les élèves comparent des fractions de même dénominateur. Ils ajoutent des fractions décimales de même dénominateur. Ils apprennent à écrire des fractions décimales sous forme de somme d'un nombre entier et d'une fraction décimale inférieure à 1.	Dès la **période 1,** dans la continuité du CM1, les élèves étendent le registre des fractions qu'ils manipulent (en particulier $\frac{1}{1000}$) ; ils apprennent à écrire des fractions sous forme de somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1.	En **période 1**, sont réactivées les fractions comme opérateurs de partage vues en CM, puis les fractions décimales en relation avec les nombres décimaux (par exemple à partir de mesures de longueurs) ; les élèves ajoutent des fractions décimales de même dénominateur. En **période 2** l'addition est étendue à des fractions de même dénominateur (inférieur ou égal à 5 et en privilégiant la vocalisation : deux cinquièmes plus un cinquième égale trois cinquièmes). En **période 3**, les élèves apprennent que $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a (définition du quotient de a par b).

Les nombres dans les programmes, cycle 3

NOMBRES ET CALCULS (suite)		
Nombres décimaux		
Tout au long du cycle, les désignations orale et écrite des nombres décimaux basées sur les unités de numération contribuent à l'acquisition du sens des nombres décimaux (par exemple pour 3,12 : « trois unités et douze centièmes » ou « trois unités, un dixième et deux centièmes » ou « trois cent douze centièmes »).		
À partir de la **période 2**, les élèves apprennent à utiliser les nombres décimaux ayant au plus deux décimales en veillant à mettre en relation fractions décimales et écritures à virgule (ex : $3{,}12 = 3 + \frac{12}{100}$). Ils connaissent des écritures décimales de fractions simples ($\frac{1}{2} = 0{,}5 = \frac{5}{10}$; $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25$; la moitié d'un entier sur des petits nombres).	Dès la **période 1**, les élèves rencontrent et utilisent des nombres décimaux ayant une, deux ou trois décimales. Ils connaissent des écritures décimales de fractions simples ($\frac{1}{5} = 0{,}2 = \frac{2}{10}$; $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75$; la moitié d'un entier).	Dès la **période 1**, dans le prolongement des acquis du CM, on travaille sur les décimaux jusqu'à trois décimales. La quatrième décimale sera introduite en **période 2** au travers des diverses activités.

Introduction des fractions simples en CM1

1^er exemple

L'unité est définie comme étant la longueur de la réglette orange. On demande aux élèves de trouver la longueur des réglettes jaunes, rouges et blanches.

Pour trouver la longueur de la réglette rouge, l'élève regarde combien de réglettes rouges sont nécessaires pour reconstituer l'unité : il faut 5 réglettes rouges pour obtenir une unité ; l'unité est donc partagée en cinq parts égales, et une réglette rouge représente une de ces parts. Chaque réglette rouge vaut donc un cinquième de l'unité.

Introduction des fractions simples en CM1

3ème exemple

RAPPEL

« Afin de ne pas induire l'idée qu'une fraction est nécessairement inférieure à 1 et préparer la décomposition des fractions décimales menant à l'écriture à virgule, **il est souhaitable de côtoyer dès le début du cycle 3 des fractions supérieures à 1**. »

La réglette orange vaut deux unités, il s'agit de trouver la longueur des réglettes jaunes, blanches, marron et roses.

- Chaque réglette blanche correspond au cinquième de l'unité.
- La réglette marron vaut « une unité plus trois cinquièmes de l'unité » ou encore « huit cinquièmes de l'unité » ou « deux unités moins deux cinquièmes de l'unité ».
- La réglette rose vaut « quatre cinquièmes » ou « la moitié de huit cinquièmes » ou « une unité moins un cinquième ».

Fractions et nombres décimaux au cycle 3

Lorsqu'on fractionne l'unité, on définit implicitement une nouvelle « unité de comptage » des quantités. On définit une fraction en prenant un certain nombre de fois cette « unité de comptage ». Par exemple, pour prendre quatre tiers de l'unité, on partage l'unité en trois tiers : le tiers devient la nouvelle « unité de comptage ». Quatre tiers est donc défini par « quatre fois un tiers » ou « un tiers + un tiers + un tiers + un tiers » (on revient au sens de la multiplication, construite comme une itération d'additions) donc « une unité + un tiers ». Parmi les différentes décompositions de quatre tiers, « une unité + un tiers » est particulièrement adaptée pour encadrer quatre tiers entre deux entiers consécutifs.

L'écriture fractionnaire

Le passage du mot à son écriture fractionnaire est une rupture, il doit être géré de manière très graduelle. Jusque-là, pour un élève, un nombre s'écrit avec des chiffres en utilisant le système de numération positionnelle, de gauche à droite. L'écriture d'un nombre sous forme d'une fraction est une nouvelle convention d'écriture dans laquelle les nombres de part et d'autre du trait de fraction ont une signification qu'il convient d'expliciter.

Fractions et nombres décimaux au cycle 3

L'écriture symbolique, par exemple $\frac{4}{3}$, nécessite un effort d'interprétation pour être pensée « 4 fois un tiers » et lue « quatre tiers », le nombre du dessus se lit directement 4 alors que le nombre du dessous ne se lit pas 3 mais s'interprète « tiers ». La lecture « quatre sur trois » n'a à ce stade pas de sens et est potentiellement source d'erreurs ; elle prendra sens en dernière année de cycle et deviendra plus tard la seule formulation possible lorsqu'il s'agira de quotients d'expressions littérales (exemple : $\frac{3x^2}{4x+1}$). La verbalisation « quatre tiers » joue donc un rôle essentiel dans la construction du concept de fraction, elle doit être préalable à l'introduction de la notation symbolique et vivre tout au long du cycle 3.

Fractions et nombres décimaux au cycle 3

La fraction pour exprimer un quotient
Cette partie concerne la dernière année du cycle 3.
La recherche du nombre qui, multiplié par 5, donne 13 unités (autrement dit la solution de la multiplication à trou 5 × … = 13) aboutit à la recherche du résultat de la division 13 ÷ 5. En calcul en ligne, l'élève a appris que « 13 divisé par 5 », c'est « 10 divisé par 5 plus 3 divisé par 5 », donc « 2 unités + 3 divisé par 5 ». « 3 divisé par 5 », c'est aussi « 30 dixièmes divisé par 5 », c'est-à-dire « 6 dixièmes ». On obtient ainsi que « 13 divisé par 5 est égal à 2 unités et 6 dixièmes, c'est-à-dire 2,6 ». Le nombre qui, multiplié par 5, donne 13 s'appelle le quotient de 13 par 5, et ce quotient est 2,6.
L'écriture $\frac{13}{5}$, dans la conception partage travaillée au cours moyen, représente « 13 cinquièmes de l'unité ». Or, un cinquième de l'unité, c'est l'unité partagée en 5 ; une unité est égale à dix dixièmes, un cinquième de l'unité est donc égal à 2 dixièmes de l'unité10 ; on montre ainsi que « 13 cinquièmes de l'unité » est égal à 13 fois 2 dixièmes de l'unité, soit 26 dixièmes, ou 2,6. Ce raisonnement permet de valider le fait que l'écriture $\frac{13}{5}$, sera aussi utilisée pour noter le quotient de 13 par 5 ; on parlera cette fois de la conception quotient de la fraction $\frac{13}{5}$.

Quelques difficultés liées aux fractions au cycle 3

Un même nombre peut s’écrire de multiples manières sous forme de fractions :

2/3=4/6=6/9 ….

Il faut aussi savoir manipuler les décompositions additives

7/5=1+2/5

Il ne faut pas confondre le vocabulaire : dizaine et dixième etc.

Puis : confusion possible entre l’écriture fractionnaire et l’écriture à virgule.

Article Houle et al. 2020

« L'écriture fractionnaire offre une entrée sur les nombres rationnels bien différente de l'écriture décimale. Elle nécessite de prendre en compte trois objets : le numérateur, le dénominateur et la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur.

L'écriture fractionnaire est particulière dans la mesure où le nombre qu'elle exprime correspond à la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur. Il y a, par conséquent, une infinité de fractions qui expriment un même nombre.

La relation d'équivalence entre les fractions est constitutive de la définition d'un nombre rationnel, qui consiste en un ensemble de couples ordonnés équivalents (a, a') de nombres entiers, avec $a' \neq 0$, dont l'équivalence est déterminée par la relation R suivante : $(a \div a')\ R\ (b \div b')$ si et seulement si $a \times b' = a' \times b$. Le couple (a, a') peut être symbolisé par l'expression a/a' et la relation entre deux éléments de la même classe d'équivalence par l'expression $a/a' = b/b'$ si et seulement si $a \times b' = a' \times b$. »

Introduction des fractions décimales

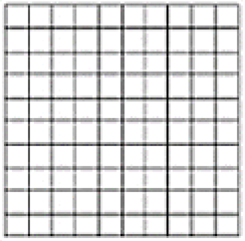
Où on retrouve le partage de l'unité, par 10, 100…

- Longueurs

Une unité partagée en dix

- Aires

Une unité partagée en 100



Introduction des écritures à virgule et des nombres décimaux

Dans le cadre des programmes actuels, cette introduction se fait à partir des fractions décimales :

« On peut prolonger la numération positionnelle, en utilisant une virgule pour indiquer le rang des unités.

1/10=0,1

Certaines fractions peuvent s’écrire comme un entier divisé par 10, 100, 1000. On peut aussi les écrire sous forme d’une écriture à virgule, avec un nombre fini de chiffres après la virgule. »

Prolongement des tableaux de numération

centaines de mille	dizaines de mille	unités de mille	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes	dix-millièmes
100 000	10 000	1 000	100	10	1	$\frac{1}{10}$ ou 0,1	$\frac{1}{100}$ ou 0,01	$\frac{1}{1\,000}$ ou 0,001	$\frac{1}{10\,000}$ ou 0,0001
			3	2	7 ,	6	5		

partie entière

Place de la virgule

partie décimale

Les nombres au cycle 4

REPÈRES ANNUELS DE PROGRESSION POUR LE CYCLE 4

NOMBRES ET CALCULS		
Nombres décimaux relatifs		
5^e	**4^e**	**3^e**
Le travail mené au cycle 3 sur l'enchaînement des opérations, les comparaisons et le repérage sur une droite graduée de nombres décimaux positifs est poursuivi. Les nombres relatifs (d'abord entiers, puis décimaux) sont construits pour rendre possibles toutes les soustractions. La notion d'opposé est introduite, l'addition et la soustraction sont étendues aux nombres décimaux (positifs ou négatifs). Il est possible de mettre en évidence que soustraire un nombre revient à additionner son opposé, en s'appuyant sur des exemples à valeur générique du type : $3{,}1 - (-2) = 3{,}1 + 0 - (-2) = 3{,}1 + 2 + (-2) - (-2)$, donc $3{,}1 - (-2) = 3{,}1 + 2 + 0 = 3{,}1 + 2 = 5{,}1$	Le produit et le quotient de décimaux relatifs sont abordés.	Le travail est consolidé notamment lors des résolutions de problèmes.
Fractions, nombres rationnels		
La conception d'une fraction en tant que nombre, déjà abordée en sixième, est consolidée. Les élèves sont amenés à reconnaître et à produire des fractions égales (sans privilégier de méthode en particulier), à comparer, additionner et soustraire des fractions dont les dénominateurs sont égaux ou multiples l'un de l'autre.	Un nombre rationnel est défini comme quotient d'un entier relatif par un entier relatif non nul, ce qui renvoie à la notion de fraction. Le quotient de deux nombres décimaux peut ne pas être un nombre décimal. La notion d'inverse est introduite, les opérations entre fractions sont étendues à la multiplication et la division. Les élèves sont conduits à comparer des nombres rationnels, à en utiliser différentes représentations et à passer de l'une à l'autre.	La notion de fraction irréductible est abordée, en lien avec celles de multiple et de diviseur qui sont travaillées tout au long du cycle.

Les nombres au cycle 4, suite

NOMBRES ET CALCULS (suite)		
Fractions, nombres rationnels (suite)		
Au moins une des propriétés suivantes est démontrée, à partir de la définition d'un quotient : • $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$ • $a\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$ • $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ • $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ Il est possible, à ce niveau, de se limiter à des exemples à valeur générique. Cependant, le professeur veille à spécifier que la vérification d'une propriété, même sur plusieurs exemples, n'en constitue pas une démonstration.	Une ou plusieurs démonstrations de calculs fractionnaires sont présentées. Le recours au calcul littéral vient compléter pour tout ou partie des élèves l'utilisation d'exemples à valeurs génériques.	

Les rationnels et les décimaux

Le terme « nombre rationnel » est introduit en quatrième.

Les élèves voient que certains nombres rationnels ne sont pas des décimaux, mais :

- Le terme « idécimal » n'existe pas
- Le concept d'écriture décimale illimitée n'est pas au programme du secondaire – et c'est un concept difficile
- La calculatrice affiche toujours un nombre fini de chiffres après la virgule

Important de bien souligner que certains rationnels ne sont pas décimaux, traiter des exemples d'écriture décimale illimitée et de passage à une écriture fractionnaire.

Ex. Ecrire $4,\overline{571}$ sous forme de fraction

Fractions au cycle 4

Au cycle 4, on s'intéresse au quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres a et b, $b \neq 0$, quelconques, défini comme le nombre dont le produit par b vaut a. Le professeur prendra conscience que cette définition n’est pas d’accès facile, et pourra proposer aux élèves de chercher comment la reformuler.

La « vision-partage » de la fraction continue à être mobilisée. Le terme « vision-partage » est à comprendre au sens où, par exemple, la fraction $\frac{7}{4}$ évoque ce qui est obtenu en partageant l’unité en 4 parts égales et en reportant 7 de ces parts, ce qui correspond d'ailleurs à la lecture sept quarts ($\frac{7}{4}$ c’est 7 fois le quart de l’unité).

Le terme « vision-nombre » est donc à comprendre au sens où, par exemple, le quotient $\frac{7}{4}$ est le nombre dont le produit par 4 vaut 7 et peut être mobilisé, par exemple, pour prouver que $\frac{7}{4} = 7 \times \frac{1}{4}$.

Différentes écritures, des difficultés

Savoir associer différentes écritures du même nombre, passer d'une écriture à une autre

$$2,35 = 2 + \frac{35}{100} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100}$$

Ne pas confondre l'écriture à virgule et l'écriture fractionnaire (2,3 différent de $\frac{2}{3}$)

Maîtriser le vocabulaire : dixième, centième … à ne pas confondre avec dizaine, centaine.

Comprendre l'importance du 0, selon son placement: 5,30=5,3 mais 5,03 différent de 5,3

Comparer des nombres décimaux

L’ordre dans les décimaux, différent de l’ordre dans les entiers.

- Des règles de comparaison qui ne fonctionnent plus : le nombre qui a le plus de chiffres n’est pas forcément le plus grand

Comparer 2,301 et 2, 4 : ~~2,4 < 2,301~~

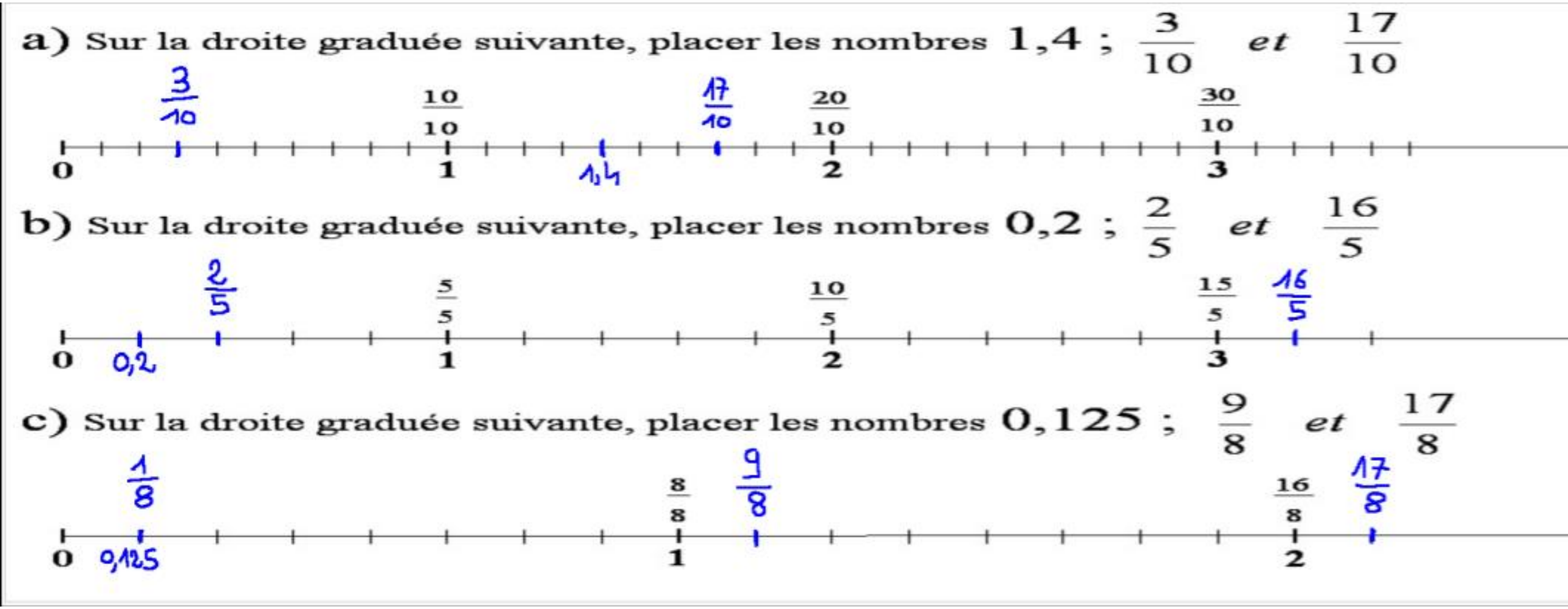
2,301 < 2,4

- Entre deux nombres décimaux, il y a toujours un autre nombre décimal

Donner un nombre décimal entre 2,3 et 2, 4 : ~~Impossible~~ !

2,3 < 2,35 <2,4

La demi-droite graduée



Ici un exercice en 6^{e}

La demi-droite graduée permet de comparer les nombres en écriture fractionnaire ou à virgule.

Calcul avec les nombres décimaux

Calcul mental aussi avec les décimaux, exemples :

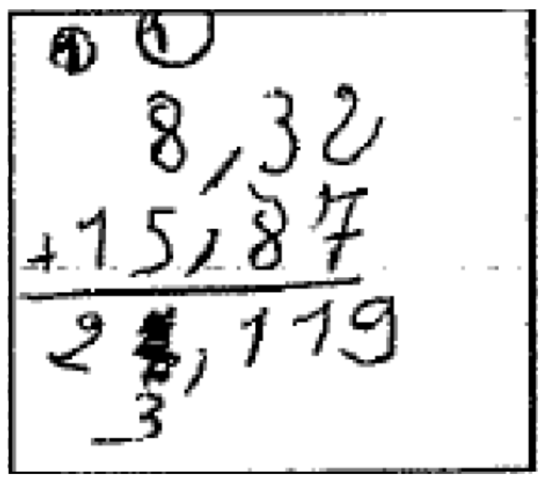
- les compléments à 1 :

0,2 pour aller a 1 ? 1 – 0,82 ? 0,75 + ? = 1

- les compléments à la dizaine suivante :

9,8 pour aller a 10 ? 20 – 19,2 ? 39,65 + ? = 40

Erreurs classiques, calculs de décimaux en écriture à virgule



Difficulté classique avec les décimaux : Considérer la virgule comme un « mur », et le nombre décimal comme deux entiers juxtaposés.

Erreurs classiques, calculs avec rationnels en écriture fractionnaire

Avec les rationnels : ajouter les numérateurs et dénominateurs terme à terme.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{7}$$

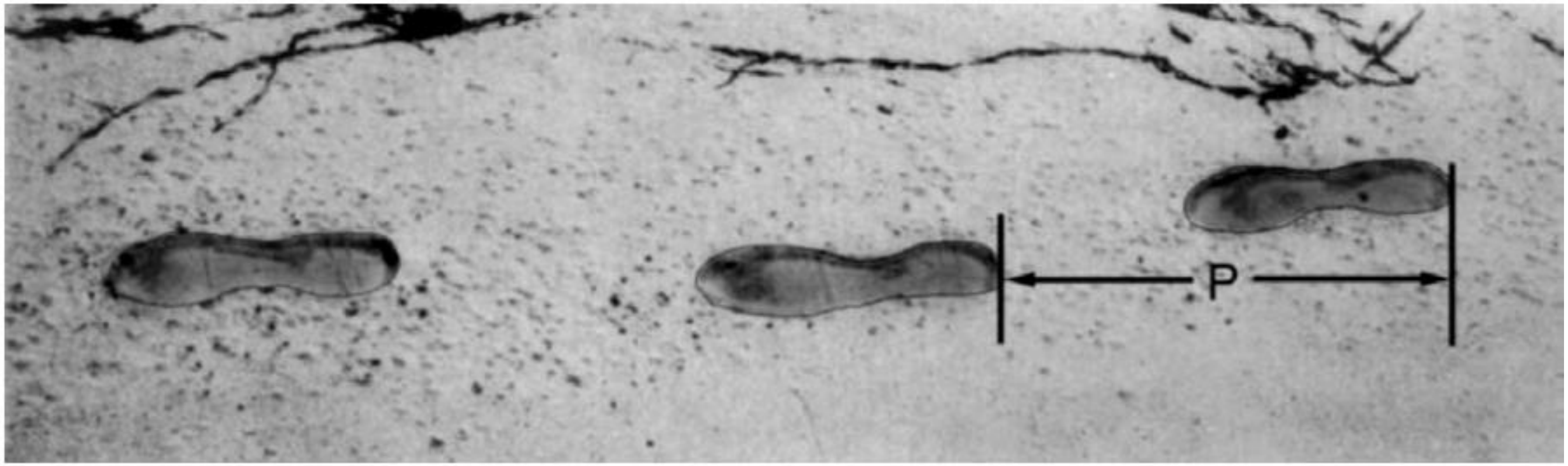
Multiplier une fraction par un entier : multiplication du numérateur et du dénominateur

$$3 * \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

Et une conception fausse très résistante : « multiplier fait grandir »

Des difficultés encore présentes chez les adultes …

Fractions (et modélisation) dans PISA



L'image montre les traces de pas d'un homme en train de marcher. La longueur de pas P est la distance entre l'arrière de deux traces de pas consécutives.

Pour les hommes, la formule : $\frac{n}{P}$=140 donne un rapport approximatif entre *n* et *P*, où :

n = nombre de pas par minute,

P = longueur de pas en mètres.

1) Si la formule s'applique à la façon de marcher d'Henri et qu'Henri fait 70 pas par minute, quelle est la longueur de pas d'Henri ? Montrez vos calculs.

(Réussite en France 42,3% en 2003)

2) Bernard sait que la longueur de son pas est de 0,80 mètre. La formule s'applique à sa façon de marcher. Calculez la vitesse à laquelle marche Bernard en mètres par minute et en kilomètres par heure. Montrez vos calculs.

(Réussite en France 24% en 2003)