

Raisonnement, logique, démonstration

M2 MEEF Maths et DU prépa concours

Plan

- 1) Raisonnement dans les programmes, cycle 4 et lycée**
- 2) Rappels logique et raisonnement**
- 3) L'initiation à la démonstration**
- 4) Le cas de la démonstration par récurrence**
- 5) Quelques difficultés des élèves**

Plan

- 1) **Raisonnement dans les programmes, cycle 4 et lycée**
- 2) **Rappels logique et raisonnement**
- 3) **L'initiation à la démonstration**
- 4) **Le cas de la démonstration par récurrence**
- 5) **Quelques difficultés des élèves**

La compétence raisonner au cycle 4

<https://eduscol.education.fr/document/17224/download>

La compétence « raisonner » inclut plusieurs aspects :

- *résoudre des problèmes impliquant des grandeurs variées (géométriques, physiques, économiques)*
- *mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui ;*
- *démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion ;*
- *fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.*

La compétence raisonner au cycle 4

Distinction raisonnement inductif/abductif, pour la formulation de conjectures

Le raisonnement inductif consiste à généraliser une propriété observée sur des cas particuliers. Il fonctionne selon le schéma suivant : constatant sur des exemples que, lorsque A est vraie, alors B est vraie, on émet la conjecture que (A implique B) est vraie.

Le raisonnement abductif consiste à présumer une cause plausible d'un résultat observé. Il fonctionne selon le schéma suivant : pour démontrer que B est vraie, sachant que (A implique B) est vraie, on va démontrer que A est vraie.

La compétence raisonner au cycle 4

Travailler la formulation de conjectures, leur invalidation ou leur validation.

Pour la validation, initier les élèves à la démonstration

Les raisonnements inductifs et abductifs, essentiellement mis en œuvre dans la phase de recherche, permettent d'aboutir à l'émission de conjectures qu'il s'agira ensuite de valider ou d'invalider. Si la production d'un contre-exemple suffit à invalider une conjecture, sa validation repose sur une démonstration, moyen mathématique d'accès à la vérité. On rappelle que « démontrer », c'est « donner à voir » les différentes étapes d'une preuve par la présentation, rédigée sous forme déductive, des liens logiques qui la sous-tendent.*

(* sous-entendu: conjecture portant sur une proposition universelle)

La compétence raisonner au cycle 4

Plusieurs types de raisonnements dans la phase de démonstration

Celle-ci fait appel au raisonnement déductif qui (entre autres) s'appuie sur :

- la **déduction** proprement dite (ou règle de détachement ou *modus ponens*), qui fonctionne selon le schéma suivant : sachant que $(A \text{ implique } B)$ est vraie et que A est vraie, on conclut que B est vraie. Le premier pas d'une déduction consiste à reconnaître une situation de référence A (une configuration géométrique, une situation de proportionnalité, une propriété de nombres, etc.) ; le second consiste à appliquer le théorème qui stipule que $(A \text{ implique } B)$;
- la **disjonction de cas**, qui fonctionne selon le schéma suivant : pour montrer que $(A \text{ implique } B)$, on sépare l'hypothèse A de départ en différents cas recouvrant toutes les possibilités et on montre que l'implication est vraie dans chacun des cas ;
- Le raisonnement par l'**absurde** (*reductio ad absurdum*) qui fonctionne selon le schéma suivant : pour montrer que A est vraie, on suppose qu'elle est fausse et par déduction on aboutit à une absurdité. [à revoir : structure du raisonnement par l'absurde avec propriété annexe]

Raisonnement et démonstration en seconde

Poursuite du travail sur la démonstration, exemples de démonstration à travailler dans les différents thèmes du programme.

Exemples :

Démonstrations

- Quels que soient les réels positifs a et b , on a : $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Démonstration

- En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

Démonstration

- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée.

Raisonnement et démonstration en seconde

Travail plus spécifique sur le « vocabulaire ensembliste et la logique »

Les élèves apprennent en situation à :

- *reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;*
- *lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;*
- *formuler la négation de propositions simples (sans implication ni quantificateurs)*
- *mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;*
- *formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;*
- *formuler la réciproque d'une implication ;*
- *lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles $\forall$ et $\exists$ sont hors programme).*

Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas et par l'absurde.

Raisonnement et démonstration en première

Suite « vocabulaire ensembliste et la logique »

Les élèves apprennent en situation à :

- lire et écrire des propositions contenant les connecteurs logiques « et », « ou » ;*
- mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;*
- formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;*
- formuler la réciproque d'une implication ;*
- employer les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;*
- identifier le statut des égalités (identité, équation) et celui des lettres utilisées (variable, inconnue, paramètre) ;*
- utiliser les quantificateurs (les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas exigibles) et repérer les quantifications implicites dans certaines propositions, particulièrement dans les propositions conditionnelles ;*
- formuler la négation de propositions quantifiées.*

Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas, par l'absurde, par contraposée, et en découvrent la structure.

Raisonnement et démonstration en Terminale

Les élèves apprennent en situation à :

- reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;
- lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;
- formuler la négation de propositions simples, *pouvant contenir un ou deux quantificateurs* ;
- mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;
- formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- formuler la réciproque d'une implication, *ou sa contraposée* ;
- lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas exigibles) ;
- raisonner par disjonctions des cas, par l'absurde, par contraposée ;
- *raisonner par équivalence, utiliser une propriété caractéristique* ;
- *distinguer condition nécessaire et condition suffisante* ;
- *démontrer une propriété par récurrence.*

Plan

- 1) Raisonnement dans les programmes, cycle 4 et lycée
- 2) **Rappels logique et raisonnement**
- 3) L'initiation à la démonstration
- 4) Le cas de la démonstration par récurrence
- 5) Quelques difficultés des élèves

Proposition en logique

En logique une proposition (ou assertion) est une phrase à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité, à savoir vrai (V) ou faux (F).

Ex:

- « $1/3$ est un nombre entier » est une proposition (et est fausse).
- Une phrase qui n'est ni vraie ni fausse n'est pas une proposition. (P la proposition « P est fausse »)

Notations

Négation de P, notée non P ou $\neg P$.

Connecteur de conjonction , assertion $P \wedge Q$, P et Q

Connecteur de disjonction , assertion $P \vee Q$, P ou Q

Connecteur d'implication , assertion $P \Rightarrow Q$

Connecteur d'équivalence , assertion $P \Leftrightarrow Q$

Règles logiques

$(P \wedge \neg P)$ est fausse

Les assertions ci-dessous sont vraies

$(P \vee \neg P)$ tiers exclu

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ contraposition

$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ règle du modus ponens : si P est vraie et $P \Rightarrow Q$, alors Q est vraie.

Les types de raisonnements et leur structure

- **Raisonnement par contraposée**

Pour montrer $(P \Rightarrow Q)$, on montre $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$

- **Raisonnement par l'absurde**

Pour montrer P , on choisit une assertion annexe Q , et on montre que

$((\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q))$.

En effet $((\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)) \Leftrightarrow P$

- **Raisonnement par disjonction des cas**

Pour montrer qu'une assertion donnée P est vraie, on trouve une assertion annexe Q telle que $(Q \Rightarrow P)$ et $(\neg Q \Rightarrow P)$ soient vraies.

Plan

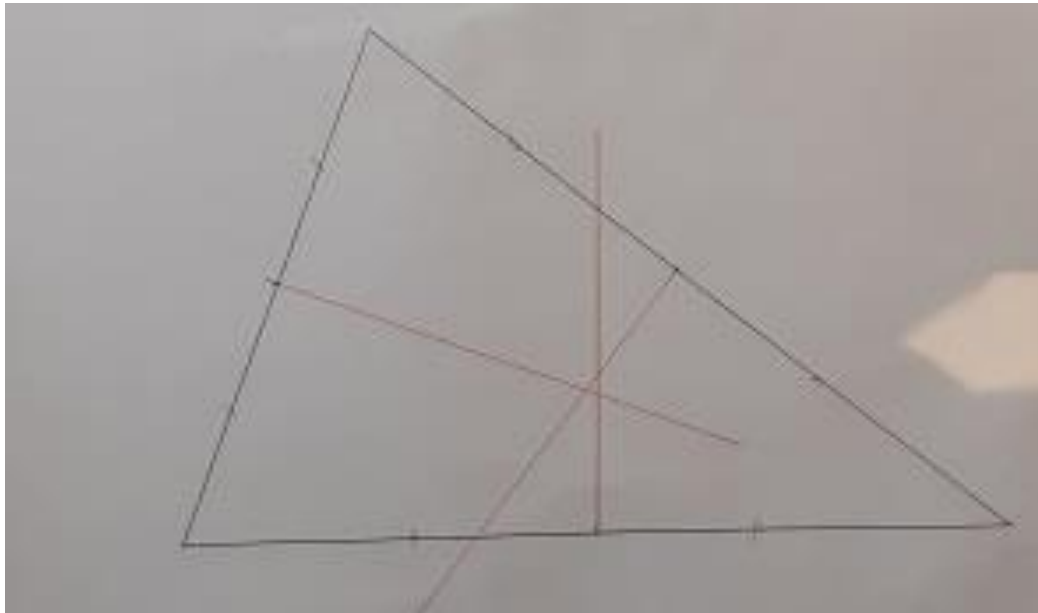
- 1) Raisonnement dans les programmes, cycle 4 et lycée
- 2) Rappels logique et raisonnement
- 3) **L'initiation à la démonstration**
- 4) Le cas de la démonstration par récurrence
- 5) Quelques difficultés des élèves

L'initiation à la démonstration

Convaincre les élèves de l'utilité des démonstrations !

Brousseau (1987)

Classe de sixième, construction des médiatrices d'un triangle. On obtient un « co-triangle », qu'est-ce qu'on peut en dire ? Débat...



L'initiation à la démonstration

Issu de Giorgiutti et al. (1998). *La démonstration. Ecrire des mathématiques au collège et au lycée*. Hachette.

En plus du raisonnement et de l'argumentation, produire des démonstrations consiste à composer des textes suivant une certaine structure.

-> L'apprentissage de la démonstration relève aussi du lien entre mathématiques et langage

L'initiation à la démonstration

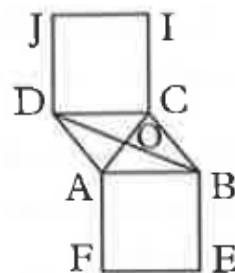
- Pratiquer les textes mathématiques dès la sixième
- Organiser des débats, travailler l'argumentation
- Travailler sur cause et conséquence, montrer les différences entre l'usage du français dans la vie courante et en mathématiques
- Commencer par des démonstrations portant sur des objets connus, mais avec plusieurs étapes, éviter de travailler sur ce que les élèves peuvent considérer comme « des évidences »
- Travailler sur des théorèmes : les élèves peuvent écrire des théorèmes
- Travailler sur une diversité de textes, varier les mots de liaison, pratiquer les démonstrations à trous

UNE DÉMONSTRATION À TROUS

► Voici un énoncé de problème

ABCD est un parallélogramme de centre O.
ABEF et DCJI sont des carrés situés à l'extérieur
du parallélogramme ABCD.

Démontrer que O est le milieu du segment [EJ].



► Compléter la démonstration suivante

O est le milieu de [BD] ABCD est un parallélogramme de centre O.
Pour montrer que c'est aussi le milieu de [EJ], il montrer que EBJD est
un parallélogramme. Cette propriété sera bien vérifiée $EB = DJ$ et
 $(EB) \parallel (DJ)$.

Montrons d'abord, par une suite d'égalités, que $EB = DJ$ dans le carré
ABEF, les côtés sont égaux et donc $EB = AB$. On démontrerait dans
le carré DCIJ, que $DC = DJ$. Enfin, dans le parallélogramme ABCD
 $AB = DC$. Donc

Montrons maintenant que $(EB) \parallel (DJ)$; pour cela que (AB) est parallèle à
(CD) ABCD est un parallélogramme. ABEF et DCIJ sont des
carrés, $(DJ) \perp (DC)$ et $(EB) \perp (AB)$ $(AB) \parallel (DC)$, $(DJ) \perp (AB)$
..... « si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est
perpendiculaire à l'autre ».

On en déduit bien que $(EB) \parallel (DJ)$ en le théorème : « si deux droites sont
perpendiculaires à une troisième droite, elles sont parallèles ».



Plan

- 1) Raisonnement dans les programmes, cycle 4 et lycée
- 2) Rappels logique et raisonnement
- 3) L'initiation à la démonstration
- 4) **Le cas de la démonstration par récurrence**
- 5) Quelques difficultés des élèves

La démonstration par récurrence

Issu de Gardes et al. (2016). Etat des connaissances des élèves de Terminale S sur le raisonnement par récurrence. *Petit x 100*, 67-98.

On considère une propriété P dépendant d'un entier n quelconque, notée $P(n)$.

Le principe de récurrence, énoncé formalisé

SI [il existe un entier n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie ET pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie] ALORS [pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie].

La démonstration par récurrence devrait en conséquence commencer par l'explicitation de la propriété $P(n)$, puis comporter **trois** étapes

- 1) Démontrer [il existe un entier n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie]
- 2) Démontrer que [pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie]
- 3) En déduire que [pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie].

La démonstration par récurrence

L'analyse des manuels de Terminale (cours et exercices corrigés) met au jour des défauts importants concernant la démonstration par récurrence.

- Parfois la propriété $P(n)$ n'est pas explicitée.

Énoncé

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 4$, on a $2^n \geq 4n$.

Solution

① Initialisation

Montrons que la propriété est vraie quand $n = 4$.

Lorsque $n = 4$, $2^n = 2^4 = 16$ et $4n = 4 \times 4 = 16$.

Donc l'inégalité $2^n \geq 4n$ est vérifiée pour $n = 4$.

- Dans la majorité des cas l'étape (1) d'initialisation n'est pas présentée comme une preuve d'existence. On commence sans discussion avec le rang 0 ou le rang 1 ; ou si c'est un autre rang, il est donné.

La démonstration par récurrence

- L'étape (2) d'hérédité n'est pas présentée comme la démonstration d'une propriété universelle

« pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie »

Certaines rédactions dans les manuels peuvent induire des confusions pour les élèves :

« Supposons $P(n)$ vraie, montrons alors que $P(n+1)$ est vraie ».

(le fait que l'entier n est un entier quelconque supérieur ou égal à n_0 reste totalement implicite)

- Dans un grand nombre de cas la troisième étape de conclusion est oubliée.

Plan

- 1) **Raisonnement dans les programmes, cycle 4 et lycée**
- 2) **Rappels logique et raisonnement**
- 3) **L'initiation à la démonstration**
- 4) **Le cas de la démonstration par récurrence**
- 5) **Quelques difficultés des élèves**

Difficultés avec l'implication

Des difficultés en lien avec le langage

L'emploi du « si ... alors » en mathématiques, différent du langage courant

« Si vous réussissez cet exercice, demain j'apporterai un gâteau ».

Les élèves échouent, l'enseignante apporte un gâteau le lendemain. « Madame, vous ne deviez pas apporter de gâteau !!! »

Difficulté pour les élèves à interpréter « $A \Rightarrow B$ » lorsque A est fausse.

Difficultés avec l'implication

La tâche de Wason (1968)

On dispose des quatre cartes ci-dessous, portant sur un côté une lettre et sur l'autre un chiffre.



On veut savoir si ces cartes respectent la règle suivante :
« Toute carte portant un D d'un côté porte un 3 de l'autre côté », en retournant le moins possible de cartes. Quelles cartes faut-il retourner ?

Difficultés avec l'implication

Résultats d'un test tâche de Wason (Inglis & Simpson, 2004)

	Maths Students		Maths Staff		History Students	
D	92	35%	5	24%	27	22%
DK	1	0%	0	0%	0	0%
D3	15	6%	1	5%	41	33%
D7	76	29%	9	43%	10	8%
DK3	0	0%	1	5%	2	2%
DK7	34	13%	3	14%	1	1%
D37	8	3%	2	10%	8	7%
DK37	21	8%	0	0%	23	19%
non-D	13	5%	0	0%	11	9%
<i>n</i>	260		21		123	

Difficultés avec la récurrence

On veut démontrer que pour tout réel strictement positif a et tout entier naturel t on a $(1 + a)^t \geq 1 + ta$.

La propriété est vraie au rang initial
en a avec $a = 1$ et $t = 0$

$$(1+a)^0 = 1 \text{ et } 1+0 = 1$$

$$\text{donc } 1 = 1 \text{ donc } (1+a)^t \geq 1+ta$$