Corrigé épreuve 2 2024

Partie D : Analyser des productions d'élèves

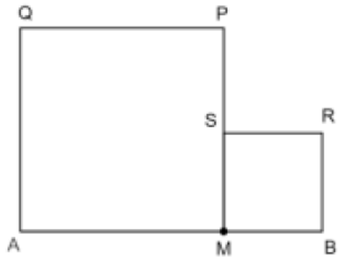
Raisonnement

Un enseignant propose l'exercice de l'annexe 10 à une classe de seconde.

[AB] est un segment de longueur 10.

On place le point M sur le segment [AB] et on construit les carrés AMPQ et BRSM comme sur la figure ci-contre.

Où faut-il placer le point M pour que l'aire du carré AMPQ soit le double de l'aire du carré BRSM ?



13. En se référant à l'annexe 11, préciser à quel type de tâche correspond cet exercice ?

14. Analyser les réussites et les erreurs des élèves dont les productions figurent en annexe 12.

Un enseignant donne la consigne suivante à des élèves d'une classe de seconde : *« Comparer un nombre réel positif à son carré ».*

15.Comment expliquer la conception du produit de deux nombres que semble avoir l'élève de l'annexe 13 ? Comment l'aider à percevoir son erreur de raisonnement ?

16.L'enseignant souhaite s'appuyer sur une conjecture avant de s'engager dans la démonstration. Comment peut-il procéder ?

17.Proposer une correction de cet exercice telle qu'elle pourrait être rédigée dans un cahier d'élève de seconde

Corrigé

13. Selon l'annexe 11, il convient de varier les types de tâches, et différents exemples sont cités :

« « questions flash » pour favoriser l'acquisition d'automatismes, exercices d'application et d'entraînement pour stabiliser et consolider les connaissances, exercices et problèmes favorisant les prises d'initiatives, mises au point collectives d'une solution, productions d'écrits individuels ou collectifs, etc. »

L'exercice de l'annexe 10 correspond à une tâche du type : « exercice favorisant les prises d'initiatives ». Plusieurs éléments soutiennent cette observation :

- Il s'agit d'une question ouverte « où faut-il placer le point M » ;
- Les élèves doivent effectuer une modélisation ;
- Il n'y a aucune indication de méthode.

On peut noter aussi que cet exercice se situe dans un contexte interne aux mathématiques.

14.

	Réussites	Erreurs et défauts
Elève 1	L'élève 1 a bien compris l'énoncé : on veut que l'aire de AMPQ soit le double de l'aire du carré BRSM. Il explique très clairement sa procédure. Il passe correctement de l'étape « AM doit être le double de BM » à la conclusion « AM=20/3 et BM=10/3 ».	L'erreur de l'élève 1 est une erreur classique sur les aires : il pense que pour doubler l'aire, il faut doubler le côté du carré. L'élève 1 n'introduit pas de variable, ce qui n'est pas une erreur mais cause une difficulté ici car penser au rapport racine de 2 n'est pas évident pour un élève de seconde.
Elève 2	L'élève 2 a bien introduit une inconnue x. Il traduit la condition sur les aires par une égalité qui est juste. En fin de calcul, il pense bien à dire que les termes sont positifs avant de passer à la racine carrée.	L'élève 2 ne donne aucune explication sur sa mise en équation. Il ne pense pas qu'il peut directement passer à la racine carrée. Il se lance dans un calcul dans lequel il commet une erreur, sans doute par manque de maîtrise des identités remarquables. Il affirme que x est positif, mais il ne le justifie pas puisqu'il ne fait jamais référence au contexte de l'exercice (x est positif parce que s est une longueur).
Elève 3	L'élève 3 rédige très bien sa solution. Comme l'élève 2, il introduit une inconnue x et obtient une équation traduisant l'égalité des aires qui est juste. Il utilise bien l'identité remarquable a^2-b^2=(a-b)(a+b). Il note bien qu'une longueur ne peut pas être négative.	Il commet une erreur de calcul en oubliant d'écrire 2 comme $\sqrt{2}^{\,2}$ avant de factoriser. Il trouve donc deux solutions numériques fausses. Son argument pour écarter la solution « 20 » est mal expliqué : on aurait en effet un côté de longueur -10, mais il ne le dit pas.

15. L'élève de l'annexe 1 pense que « multiplier fait grandir ». C'est une conception fausse liée au fait que les élèves débutent l'apprentissage du calcul au primaire avec des nombres entiers positifs. Dans l'ensemble des nombres entiers positifs, on a en effet toujours x^2 qui est supérieur ou égal à x.

Pour l'alerter sur cette conception fausse, on peut lui proposer de calculer $(1/2)^2$ par exemple.

16. L'enseignant peut faire réaliser un tableau de valeurs avec un tableur, en demandant aux élèves de prendre des valeurs dans l'intervalle [-2, 2] par exemple. La consigne peut être plus ou moins explicite : par exemple, demander dès le départ de prendre des valeurs espacées de 0,25, ou laisser les élèves choisir les valeurs qu'ils veulent, puis les faire débattre.

17. On appelle x un nombre réel positif. On souhaite comparer x et x^2.

On peut calculer leur différence : x^2-x=x*x-x=x*(x-1). On fait un tableau pour connaître le signe de ce produit.

	[0 ; 1]	[1 ; + ∞ [
x	+	+
x-1	-	+
x*(x-1)	-	+

La différence est négative quand x est inférieur ou égal à 1, et positive quand x est supérieur ou égal à 1. Donc le carré de x est inférieur ou égal à x quand x est inférieur ou égal à 1, et supérieur ou égal à x quand x est supérieur ou égal à 1.

Suite du sujet

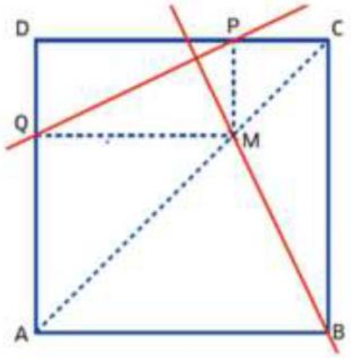
Un enseignant propose le problème en annexe 15 à une classe de première.

36 ABCD est un carré de côté égal à 4. M est un point de la diagonale [AC]. P et Q sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (CD) et sur (DA). On veut démontrer que les droites (PQ) et (BM) sont perpendiculaires. Pour cela, on se place dans le repère orthonormé d'origine A et tel que B et D ont respectivement pour coordonnées (4 ; 0) et (0 ; 4) ; il s'agit du repère $\left(A ; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$.

On note x l'abscisse de M.

1. Déterminer en fonction de x les coordonnées de tous les points de la figure.

2. Conclure.



18.En se référant à l'annexe 14, identifier deux compétences particulièrement mobilisées dans la dernière question de ce problème. Justifier succinctement.

19.L'enseignant modifie l'énoncé du problème (annexe 16). Quelle nouvelle compétence mathématique souhaite-t-il ainsi mobiliser ?

20. Analyser les réussites et les erreurs des deux réponses de l'annexe 17.

21.En s'appuyant sur les deux productions d'élèves, proposer une correction de l'exercice de l'annexe 16 telle qu'elle pourrait figurer dans un cahier d'élève de première.

18. La dernière question du problème se limite à un mot : « Conclure ». Mais dans la première question, on a seulement déterminé les coordonnées des points de la figure. Donc la démonstration doit se faire dans cette question 2. L'enseignant souhaite que les élèves mobilisent la compétence « raisonner » : en effet, il s'agit de produire la démonstration d'une propriété formulée dans l'énoncé. La deuxième compétence concernée par la question 2 est la compétence « communiquer ». En effet les élèves doivent rédiger une conclusion argumentée. Remarque : dans la question 1, les élèves doivent mobiliser la compétence « représenter » : en effet, il faut passer du registre de la figure à celui des coordonnées cartésiennes. Mais ce n'est plus le cas dans la question 2.

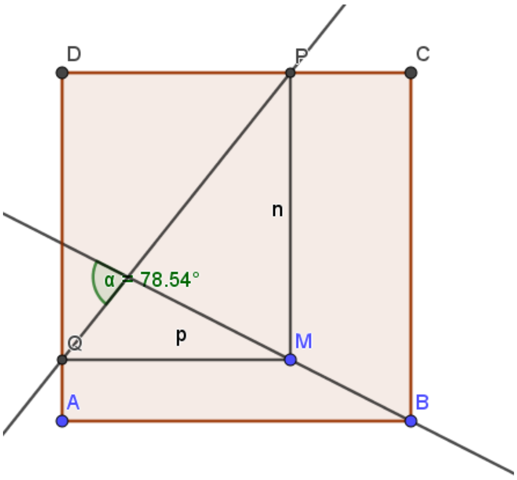
19. L'enseignant passe d'une question fermée à une question ouverte : on peut donc supposer qu'il souhaite faire travailler la compétence « chercher » : en effet, il s'agit de formuler une conjecture.

20.

	Réussites	Erreurs
Elève 1	Cet élève sait utiliser Geogebra. Plus précisément, il a construit une figure qui semble correcte : donc il sait construire un carré, placer des perpendiculaires, faire apparaître des points d'intersection, faire apparaître la mesure d'un angle,	L'élève a conjecturé seulement la diagonale (AC) comme lieu des points M ; il n'a pas vu que la diagonale (BD) fait aussi partie de ce lieu. Du point de vue logique, il confond « il faut » et « il suffit ».

	déplacer le point M. Il a formulé une conjecture. Les points qu'il propose conviennent. Il est resté à l'étape de la conjecture, et n'a pas fait de démonstration. Il formule clairement sa réponse.	
Elève 2	Cet élève a su choisir un repère adapté à la situation. Il semble avoir bien déterminé les coordonnées des points et celles des vecteurs. Il sait utiliser le produit scalaire pour traduire une orthogonalité. Il sait calculer le produit scalaire de deux vecteurs donnés par leurs coordonnées dans un repère orthonormé.	L'élève ne donne aucun détail de son calcul des coordonnées de points et de vecteurs. Il utilise le signe «implication » et équivalence à mauvais escient. Il n'a pas correctement résolu l'équation produit x(x-1) + y(1-y) : il n'a pas vu qu'on pouvait se ramener à (x-y)*(x+y-1), ce qui donne les deux droites solution, caractérisées par leurs équations dans le repère choisi.

21. On peut commencer avec les élèves par faire des essais sur GeoGebra (élève 1), jusqu'à conjecturer que lorsque les points sont sur l'une ou l'autre diagonale du carré, les droites sont perpendiculaires.



On peut conjecturer que « les droites sont perpendiculaires si et seulement si le point M se trouve sur une des diagonales du carré ».

On utilise le repère orthonormé (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$). On nomme x et y les coordonnées de M dans ce repère.

On calcule les coordonnées des différents points dans le repère :

- B(1,0)
- Q(0, y) car Q est sur l'axe des ordonnées, et projeté orthogonal de M donc de même ordonnées que M ;
- et P(x,1) car P est sur (DC) et de même abscisse que M car il est son projeté orthogonal.

On en déduit les coordonnées des vecteurs :$\overrightarrow{BM}$ (x-1 ; y) et $\overrightarrow{PQ}$ (-x, y-1).
La droite (BM) est perpendiculaire à la droite (PQ) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont orthogonaux. C'est équivalent à : $\overrightarrow{BM}$. $\overrightarrow{PQ}$ = 0.
On calcule : $\overrightarrow{BM}$. $\overrightarrow{PQ}$ = $-(x-1)x + y(y-1) = -x^2 + x + y^2 - y = (y-x)(y+x) - (y-x) = (y-x)(y+x-1)$.

Ce produit est nul si et seulement si l'un de ses deux termes est nul, c'est-à-dire si et seulement si : $y-x=0$ ou $y+x-1=0$; ce qui équivaut à $y=x$ ou $y=1-x$.
Donc l'ensemble des points M cherché est inclus dans la réunion de deux droites, d'équations respectives $y=x$ et $y=1-x$; comme par hypothèse M est à l'intérieur du carré, l'ensemble cherché est la réunion des deux diagonales du carré.