

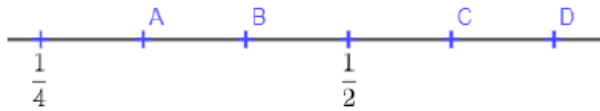
Partie 2. Nombres, raisonnement.

I. Rationnels et décimaux (sur 16 points)

I.1 L'exercice suivant a été posé lors de l'évaluation TIMSS 2019 en classe de quatrième.

Exercice 1

Quel point a pour abscisse $\frac{5}{12}$ sur cette droite graduée ? Entourez le point choisi.



I.1.a Donner une procédure juste permettant à un élève de quatrième de résoudre cet exercice.

Quels sont les savoirs et savoir-faire en jeu dans cette procédure ? **3 points**

Procédure juste : Le segment entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ est de longueur $\frac{1}{4}$. Une graduation correspond à un tiers de ce segment, donc à $\frac{1}{12}$. On a $\frac{5}{12} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{1}{4} + \frac{2}{12}$: c'est donc le point B qui convient.

Les savoirs et savoir-faire en jeu sont :

- l'écriture fractionnaire ;
- la lecture sur une droite graduée ;
- la soustraction de fractions simples (pour déterminer la longueur du segment entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$) ;
- la division d'une fraction simple par un entier ($\frac{1}{4}$ par 3) ;
- la décomposition additive d'une fraction ($\frac{5}{12}$) pour faire apparaître des fractions simples ($\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{12}$) ;
- la simplification de fractions ($\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$) ;
- la notion d'abscisse.

I.1.b Quelle raison peut conduire un élève à choisir le distracteur D ? Que peut-on dire à cet élève pour l'aider ? **2 points**

Le distracteur D correspond à 5 graduations. Comme la graduation mesure $\frac{1}{12}$, l'élève peut déduire que D a pour abscisse $\frac{5}{12}$ s'il ne tient pas compte que l'origine n'est pas 0 mais $\frac{1}{4}$.

Pour aider cet élève, on peut lui demander si à son avis, $\frac{5}{12}$ est plus grand ou plus petit que $\frac{1}{2}$.

I.1.c Lors de l'évaluation TIMSS 2019 cet exercice a recueilli 38,6% de bonnes réponses. Citer trois difficultés de l'exercice qui contribuent à expliquer ce score. **2 points**

L'exercice demande de passer du registre de la droite graduée à celui de l'écriture fractionnaire.

Le segment proposé ne comporte pas le zéro.

L'exercice mobilise des fractions qui ne font pas partie des « fractions simples », comme $\frac{5}{12}$.

Pour déterminer la valeur de la graduation, il faut savoir diviser $\frac{1}{4}$ par 3.

I.2 L'exercice suivant est issu de la fiche « Exemples d'exercices. Quatrième. Nombres et calculs » disponible sur Eduscol.

Exercice 2

Dans chaque cas, dire si la fraction est un nombre décimal. Cochez la réponse exacte ; si oui, donnez l'écriture décimale du nombre.

Fraction	Oui	Non	Ecriture décimale
$\frac{36}{20}$			
$\frac{5}{15}$			
$\frac{23}{25}$			

I.2.a Une professeure donne cet exercice à ses élèves de 4^e. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. Pour chacune des trois fractions, donner une procédure que des élèves de quatrième peuvent utiliser pour répondre « oui » ou « non », et pour produire le cas échéant son écriture décimale. **3 points**

Pour $\frac{36}{20}$, les élèves peuvent simplifier par 2 pour se ramener au dénominateur 10 : $36/20=18/10=1,8$.

Pour $5/15$, les élèves peuvent aussi simplifier. Ils obtiennent $1/3$. Ils peuvent poser la division, observer que $1/3=0,3333...$ et répondre non.

Pour $23/25$, les élèves peuvent multiplier en haut et en bas par 4. $23/25=92/100=0,92$.

I.2.b Suite à cet exercice, l'enseignante écrit pour ses élèves de quatrième un petit mémo, intitulé « Comment savoir si une fraction est un nombre décimal ? ». Proposez un contenu pour ce petit mémo. **3 points**

Si une fraction a comme dénominateur 10, 100 ou 1000 etc., on sait que c'est un nombre décimal, et on peut facilement trouver son écriture décimale. Par exemple : $18/100=0,18$.

Mais certaines fractions ne peuvent pas s'écrire avec une écriture à virgule « qui s'arrête » : par exemple $1/3=0,333333...$. Il y a une infinité de 3 après la virgule ! $1/3$ n'est pas un nombre décimal.

Pour savoir si une fraction est un nombre décimal, on peut essayer en multipliant ou en divisant le numérateur et le dénominateur par le même nombre de trouver une fraction égale avec comme dénominateur 10, 100, 1000.... Par exemple : $23/25=23*4/25*4=92/100=0,92$.

I.2.c Un enseignant donne le même exercice à ses élèves de seconde, en complétant la consigne par « si non, démontrer que le nombre n'est pas décimal ». Donnez une démonstration juste que les élèves de seconde peuvent proposer, pour prouver que $\frac{5}{15}$ n'est pas décimal. Vous décrierez les savoir-faire relevant de la compétence « raisonner » présents dans cette démonstration. **3 points**

Démonstration juste :

On écrit tout d'abord que $5/15=1/3$, et on va démontrer que $1/3$ n'est pas décimal.

Supposons que $1/3$ soit décimal. Alors il existe a et k entiers positifs tels que $1/3 = a/(10^k)$.

On a donc $3a = 10^k$. Ceci implique que 3 est un diviseur de 10^k , ce qui n'est pas possible. On arrive donc à une contradiction, et on conclut que $1/3 = 5/15$ n'est pas décimal.

Savoir-faire liés à la compétence « raisonner » :

Il s'agit ici de mener un raisonnement par l'absurde. Il faut donc savoir utiliser l'implication ; reconnaître une proposition fausse (contradiction), et conclure.

II. Produit de nombres relatifs 12 points

Dans cette partie nous nous appuyons sur les annexes A.1 : extrait d'une ressource Eduscol, A.2 et A.3 : extraits du manuel Sésamath cycle 4.

II.1 Pourquoi la multiplication de nombre relatifs peut poser problème à des élèves de quatrième qui la découvrent ? Donnez deux raisons différentes. **2 points**

Les difficultés liées à la multiplication de nombres relatifs concernent le signe du produit.

Les élèves peuvent retenir que le signe est tantôt (-) et tantôt (+), sans comprendre dans quel cas il s'agit de mettre (-) ou (+).

Les élèves peuvent avoir des difficultés à attribuer un sens au produit de deux nombres négatifs, en l'absence d'une représentation concrète du sens d'un tel produit.

II.2 Cette question concerne l'annexe A.1, extrait d'une ressource Eduscol. Expliquez ce que le document nomme « le principe de permanence », et ce que l'étape 2 ajoute à l'étape 1. **2 points**

Le « principe de permanence » signifie que les propriétés de la multiplication de nombres positifs, ici la commutativité, s'étendent à la multiplication de nombres relatifs.

Si on ne peut pas s'appuyer sur la commutativité, alors il est possible de donner un sens à $2 * (-3)$ par l'addition itérée ; mais on ne peut pas donner de sens à $(-3) * 2$.

II.3 Cette question concerne l'annexe A.2, extrait du manuel Sésamath Cycle 4. Dans quelle mesure cette activité d'introduction à la multiplication de relatifs suit (ou s'écarte de) la démarche recommandée par l'extrait de ressource Eduscol ? Vous prendrez soin de considérer chacune des questions de l'activité. **4 points**

La question 1.a. correspond bien à l'étape 1 de l'annexe A.1 : on a une addition itérée, qui est égale à $4 * (-2)$. On infère une généralisation : le produit d'un nombre négatif par un nombre (entier !) k positif est le résultat de l'addition itérée k fois de ce nombre négatif.

La question 1.b. ne s'appuie pas sur le principe de permanence assurant la commutativité de la multiplication de nombres relatifs. Elle utilise bien (implicitement) le principe de permanence, mais pour la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Celle-ci permet d'écrire :

$Z = 3,5 * (1,2) + (-3,5) * 1,2 = (3,5 - 3,5) * 1,2 = 0 * 1,2 = 0$. On en déduit que $(-3,5) * 1,2 = - (3,5 * 1,2)$. On note aussi ici l'emploi de décimaux non entiers, contrairement à ce qui est fait dans l'annexe A.1.

La question 2.a. conduit les élèves à conjecturer la valeur du produit de deux entiers négatifs. Cette conjecture se fait sur la base d'une table de multiplications à remplir, sans utiliser l'associativité.

La question 2.b. utilise à nouveau l'associativité ; elle est proche de l'étape 3 de l'annexe A.1, mais ici aussi on note l'utilisation de décimaux non entiers – ce qui est plus intéressant que les exemples de l'annexe A.1.

II.4 Vous trouverez en annexe A.3 deux énoncés d'exercices sur la multiplication de nombres relatifs. Quels objectifs précis peuvent conduire un enseignant à choisir pour ses élèves l'un ou l'autre de ces exercices ? **4 points**

Rappel des énoncés des deux exercices :

Exercice A3.1 Soient deux nombres relatifs non nuls r et t dont le produit est positif et la somme négative. Que peut-on dire sur le signe de r et le signe de t ?

Exercice A3.2 Trouver deux nombres relatifs non nuls u et v dont le produit et la somme sont négatifs.

Ces exercices peuvent être donnés une fois que la « règle des signes » est bien acquise par les élèves, ayant pratiqué sur des calculs le produit de nombres relatifs.

Dans l'exercice A3.1, on sait que le produit est positif. On peut en déduire que les deux nombres sont de même signe : soit tous les deux positifs, soit tous les deux négatifs. Comme la somme est négative, c'est que tous les deux sont négatifs. L'objectif du professeur, en donnant cet exercice, peut être que les élèves réalisent qu'on peut déduire des informations sur le signe des nombres, en connaissant le signe de leur produit et celui de leur somme et même si on ne connaît pas ces deux nombres. Le professeur peut souhaiter aussi travailler sur le raisonnement, en pratiquant la disjonction de cas : soit les deux nombres sont positifs, soit ils sont négatifs.

Dans l'exercice A3.2, les élèves sont invités à chercher des exemples. Les élèves peuvent commencer par chercher au hasard, puis se rendre compte qu'il faut que les deux nombres soient de signes contraires, et ensuite ajuster les valeurs pour que la somme soit négative. L'objectif du professeur peut être de conduire les élèves à faire des essais, expérimenter sur des nombres, en contrôlant progressivement leur choix de nombres par l'utilisation de propriétés qu'ils connaissent.

III Raisonner et chercher (22 pts)

III.1 Le problème des « nombres trapézoïdaux » (groupe Dreamaths, IREM de Lyon) peut être posé du collège au lycée. Voici un de ses énoncés possibles :

Trouver tous les nombres entiers strictement positifs qui sont la somme d'au moins deux nombres entiers naturels consécutifs. On les appelle les nombres trapézoïdaux.

Vous proposez ce problème à vos élèves de seconde, sous forme de travail en groupe. Dans une première phase de 10 minutes, ils sont invités à chercher et formuler des conjectures. Les élèves ont des ordinateurs portables et ont le droit d'utiliser le tableur. Ensuite une deuxième phase de mise en commun (10-15 minutes) permet de partager et de discuter ces conjectures. Vous avez préparé pour la fin de la mise en commun un fichier tableur dont un extrait est donné en annexe B1 (indication : regarder cette annexe B1 avant de répondre aux questions).

III.1.a Lors de la mise en commun, le groupe A propose la conjecture : « les nombres trapézoïdaux sont les nombres impairs ». D'où peut provenir cette conjecture fautive ? Quels arguments attendez-vous d'autres élèves pour invalider la conjecture ? **2 points**

Les élèves du groupe A ont très probablement regardé seulement les sommes de 2 nombres consécutifs (ils ont négligé le « au moins »). Dans ce cas, en effet, ils obtiennent les nombres qui s'écrivent $k+(k+1)$ avec k entier ; ce sont bien les nombres impairs.

On attend que d'autres élèves, qui sont allés plus loin, leur donnent un contre-exemple. Ces contre-exemples seront fondés sur la somme d'au moins trois entiers consécutifs, le plus petit étant $6 = 1+2+3$.

III.1.b Le groupe B propose la conjecture : « les nombres impairs et les multiples de 3 sont des nombres trapézoïdaux ». Un élève du groupe C dit « c'est faux, parce que 14 est trapézoïdal et il n'est ni impair ni multiple de 3 ». Comment allez-vous orienter la suite de l'échange ? **2 points**

Pour cette séance de recherche, il ne s'agit surtout pas que le professeur lui-même dise à l'élève du groupe C qu'il se trompe. Il faut s'appuyer sur sa remarque pour lancer le débat. Très probablement, un élève du groupe B ou un autre élève de la classe relèvera le problème de logique ici : le groupe B a parlé d'une implication. Si un nombre est impair, ou si il est multiple de 3, alors il est trapézoïdal. Mais le groupe B n'a pas parlé d'une équivalence : un nombre peut être trapézoïdal et ne pas être impair ni multiple de 3, comme 14.

III.1.c Dans une troisième phase, vous demandez aux élèves de démontrer la conjecture du groupe B. Ecrivez une démonstration que les élèves de seconde peuvent produire. **2pts**

Montrons que les nombres impairs et les multiples de trois sont des nombres trapézoïdaux.

Un nombre impair N s'écrit $N=2k+1$, avec k un entier. Donc on a $N=k+(k+1)$, ce sont deux nombres consécutifs, N est bien trapézoïdal.

Un multiple de 3 strictement positif s'écrit $N=3k$, avec k supérieur ou égal à 1. On a donc $N=(k-1) + k + (k+1)$. N est la somme de trois entiers consécutifs.

III.1.d Citer quatre savoir-faire de logique et de raisonnement qui ont été travaillés pendant cette séance, en justifiant à chaque fois la présence de ce savoir-faire. **4pts**

Les élèves ont d'abord expérimenté à la main ou au tableur pour formuler des conjectures, dans la première phase de recherche (voir les exemples des groupes A et B).

Ils ont ensuite réfléchi à la validité des conjectures d'autres élèves, en utilisant le cas échéant des contre-exemples, comme pour invalider la conjecture

Ils ont été confrontés à la différence entre implication et équivalence, comme dans l'échange qui a suivi la conjecture du groupe B.

Ils ont pratiqué la démonstration au cours de la troisième phase. Lors de cette démonstration et pour interpréter la conjecture du groupe B, ils ont de plus mobilisé le sens du « ou » mathématique.

III.2 L'exercice suivant a été proposé à des élèves suivant l'option Maths expertes en terminale.

Exercice 3

Soit n un entier naturel. Démontrer que, dans l'écriture en base dix, les entiers n et n^5 ont le même chiffre des unités.

Vous trouverez en annexe les productions de deux élèves concernant cet exercice.

III.2.a Pour chacun des deux élèves, décrire les points positifs et les points négatifs de sa production. **6 points** (dont 2 pts élève E1 et 4 pts élève E2).

	Points positifs	Points négatifs
E1	L'élève a pensé à utiliser des congruences modulo 10. Il fait le lien entre chiffre des unités et congruence modulo 10. Il sait qu'en parcourant les nombres de 0 à 9, il a tous les cas de congruence modulo 10. Il a bien utilisé le tableur.	Il y a un déficit de rédaction dans sa production. Il n'a pas explicité le lien entre chiffre des unités et congruence modulo 10. Il aurait dû mettre des intitulés aux colonnes de son tableur.
E2	Cet élève traduit « même chiffre des unités » en « chiffres des unités de la différence est 0 », puis en « multiple de 10 ». Il semble connaître le principe de la démonstration par récurrence. Il observe bien que la propriété est vraie pour le rang 0. Il utilise bien l'hypothèse de récurrence, dans sa tentative de prouver l'hérédité. Les calculs qu'il mène sont justes. Il fait un effort de présentation de son raisonnement.	L'élève n'explique pas le passage par « le chiffre des unités de la différence est 0 », il ne dit pas pourquoi il veut montrer que $n^5 - n$ est multiple de 10. La récurrence a de nombreux défauts de rédaction. L'idée qu'on veut prouver une propriété P_n pour tout n n'est pas bien explicitée. Pour l'étape d'hérédité, il ne dit pas à partir de quel rang il se place. Il dit que $n^4 + n$ est pair mais il ne le démontre pas. Il ne conclut pas en écrivant la propriété démontrée.

III.2.b Donner une solution de cet exercice qui n'utilise pas de raisonnement par récurrence. Vous rédigerez cette solution comme pour des élèves de terminale option Maths expertes. **4 points**

Il y a de nombreuses démonstrations possibles, par exemple celle qui suit.

Soit n un entier naturel quelconque. On veut prouver que n^5 et n ont le même chiffre des unités.

Dire que n^5 et n ont le même chiffre des unités est équivalent à dire que le chiffre des unités de $n^5 - n$ est zéro. Ceci est équivalent à dire que $n^5 - n$ est divisible par 10. On calcule :

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$$

Première étape : on montre que $n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ est divisible par 2.

On sait que $n(n-1)$ est divisible par 2, car soit n est pair, soit $n-1$ est pair. Donc $n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ est divisible par 2.

Deuxième étape : on montre que $n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ est divisible par 5.

On va distinguer des cas, en utilisant les congruences modulo 5.

Soit n est congru à 0 modulo 5 : c'est réglé.

Soit n est congru à 1 modulo 5, alors $n-1$ congru à 0 modulo 5, c'est réglé.

$$\text{Soit } n \equiv 2 \pmod{5}, \text{ alors } n^2 \equiv 4 \pmod{5} \text{ et } n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\text{Soit } n \equiv 3 \pmod{5}, \text{ alors on a aussi } n^2 \equiv 9 \equiv 4 \pmod{5} \text{ et } n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

Soit finalement $n \equiv 4 \pmod{5}$. Dans ce cas, c'est $n+1$ qui est congru à 0 modulo 5.

Dans tous les cas, un des termes du produit est divisible par 5. Donc le produit est divisible par 5.

Comme il est divisible par 5 et par 2, il est divisible par 10. On a donc démontré que quelque soit l'entier n , n^5 et n ont le même chiffre des unités.

III.2.c Détailler les différents savoir-faire relevant de la compétence « raisonner » dans la solution que vous proposez. **2 points**

De manière générale, il s'agit que les élèves sachent conduire une démonstration.

Dans le cas de cette démonstration, ceci met en jeu les savoir-faire suivants :

- Les élèves doivent savoir transformer la propriété en utilisant des propriétés équivalentes.
- Ils doivent connaître le sens du « ET » mathématique, et savoir montrer qu'on a la propriété R (divisibilité par 2) et la propriété S (divisibilité par 5).
- Ils doivent savoir distinguer différents cas, selon la valeur de n , et penser à bien parcourir tous les cas possibles.

Annexes

Annexes A, partie II.

Annexe A.1 Extrait de la ressource Eduscol « Nombres relatifs ».

La multiplication

La multiplication des décimaux relatifs pourra être approchée en plusieurs étapes, conduites par le professeur, sur des exemples génériques simples, une fois que la compréhension et l'utilisation de l'addition et de la soustraction aura été stabilisée :

1. la multiplication d'un entier naturel par un entier négatif sollicite le sens premier de la multiplication comme addition itérée : $2 \times (-3) = (-3) + (-3) = (-6)$ (verbalisée en « deux fois (-3) ») ;
2. le principe de permanence permet d'étendre aux nombres relatifs une égalité du type $2 \times 3 = 3 \times 2$ et de définir $(-3) \times 2$ comme étant égal à $2 \times (-3)$;
3. la justification de l'égalité $(-2) \times (-3) = 6$ repose sur le fait que $(-2) \times (-3) + 2 \times (-3) = ((-2) + 2) \times (-3) = 0 \times (-3) = 0$, à condition d'admettre l'extension aux nombres relatifs de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, connue chez les décimaux positifs, et le résultat de la multiplication par 0.

La règle permettant de calculer le produit de deux nombres relatifs pourra alors être institutionnalisée, notamment au niveau du signe du produit.

Annexe A.2 Extrait du manuel Sésamaths cycle 4 2016.

Activité 5 Produit de nombres relatifs

1. Presque comme avant !

- a. Quelle est la valeur de $B = (-2) + (-2) + (-2) + (-2)$?
Conjecture la manière dont on calcule le produit d'un nombre négatif par un nombre positif.
- b. On considère l'expression $Z = 3,5 \times 1,2 + (-3,5) \times 1,2$.
- Factorise Z puis calcule sa valeur.
 - Que peut-on en déduire pour les nombres $3,5 \times 1,2$ et $(-3,5) \times 1,2$?
Déduis-en la valeur de $(-3,5) \times 1,2$.

2. Négatif fois négatif ...

- a. Effectue les calculs donnés dans le cadre ci-contre.
Quelle pourrait être la valeur de $(-7) \times (-5)$?
- b. On considère l'expression
 $N = (-1,5) \times 0,8 + (-1,5) \times (-0,8)$.
Retrouve la valeur de $(-1,5) \times (-0,8)$.

$$(-7) \times 4 = \dots$$

$$(-7) \times 3 = \dots$$

$$(-7) \times 2 = \dots$$

$$(-7) \times 1 = \dots$$

$$(-7) \times 0 = \dots$$

Annexe B Travaux d'élèves, partie III.

Elève 1

Avec le tableur, j'ai regardé tous les cas possibles de congruences modulo 10. On obtient bien toujours le même nombre, les entiers n et n^5 ont le même chiffre des unités.		A	B
	1	0	0
	2	1	1
	3	2	32
	4	3	243
	5	4	1024
	6	5	3125
	7	6	7776
	8	7	16807
	9	8	32768
	10	9	59049

Elève 2

Je vais montrer par récurrence que $n^5 - n$ est multiple de 10.

C'est vrai pour $n=0$.

Je suppose que $n^5 - n$ est multiple de 10 et alors je dois montrer que $(n+1)^5 - (n+1)$ est aussi multiple de 10.

$$(n+1)^5 - (n+1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 = (n^5 - n) + 10(n^3 + n^2) + 5(n^4 + n)$$

On sait que $n^5 - n$ et $10(n^3 + n^2)$ sont des multiples de 10. Mais $5(n^4 + n)$ est aussi multiple de 10, parce que il est multiple de 5 et $n^4 + n$ est pair.

Donc la propriété est démontrée.