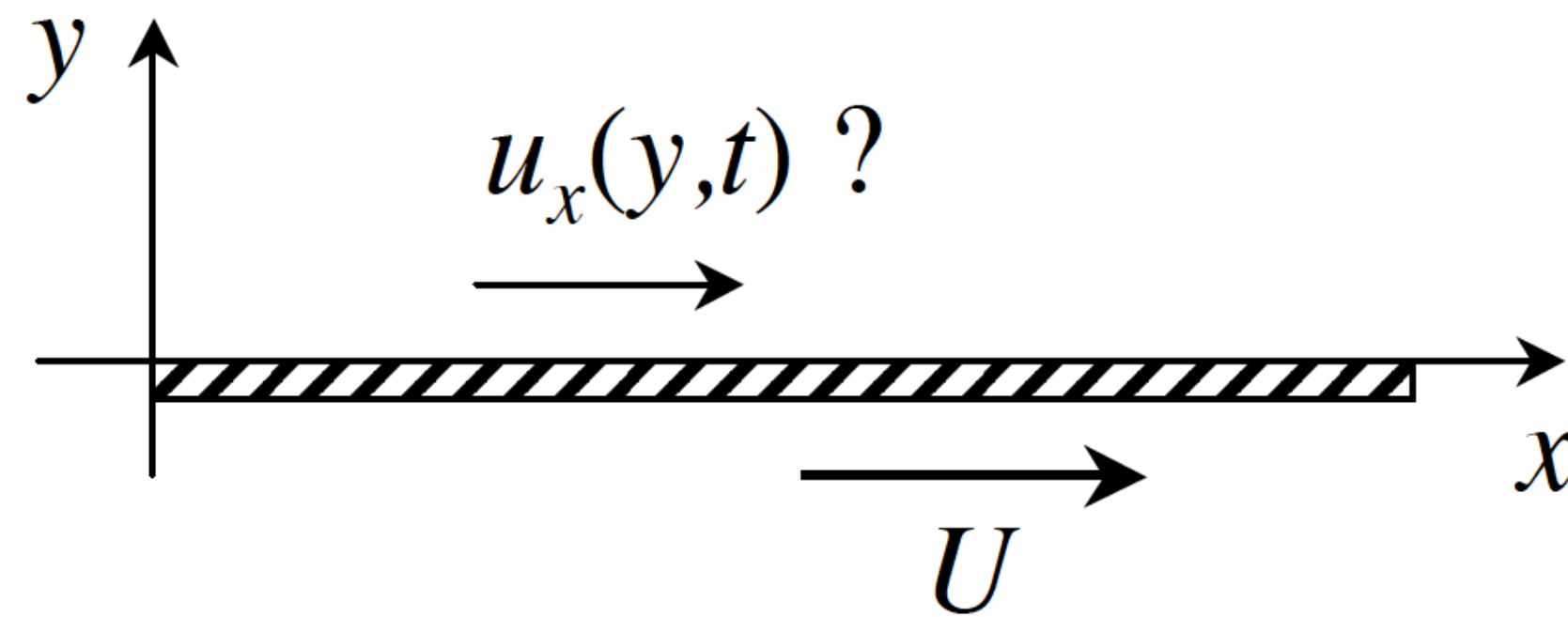


Solutions instationnaires

Mise en mouvement d'une plaque



- Hyp :
- fluide en $y > 0$ au repos à $t < 0$
 - plaque plane en $y = 0$ immobile ($U = 0$) à $t < 0$
puis mobile ($U = \text{cte} \neq 0$) à $t \geq 0$
 - écoulement 2D (x, y)

Question : quel est l'écoulement à $t > 0$?

Compte-tenu de la géométrie, cherchons une solution possible d'écoulement parallèle instationnaire de la forme

$$\mathbf{u} \begin{cases} u_x(y, t) \\ u_y = 0 \end{cases}$$

L'écoulement est ici induit par le mouvement de la plaque,
pas par la gravité ni par un gradient de pression

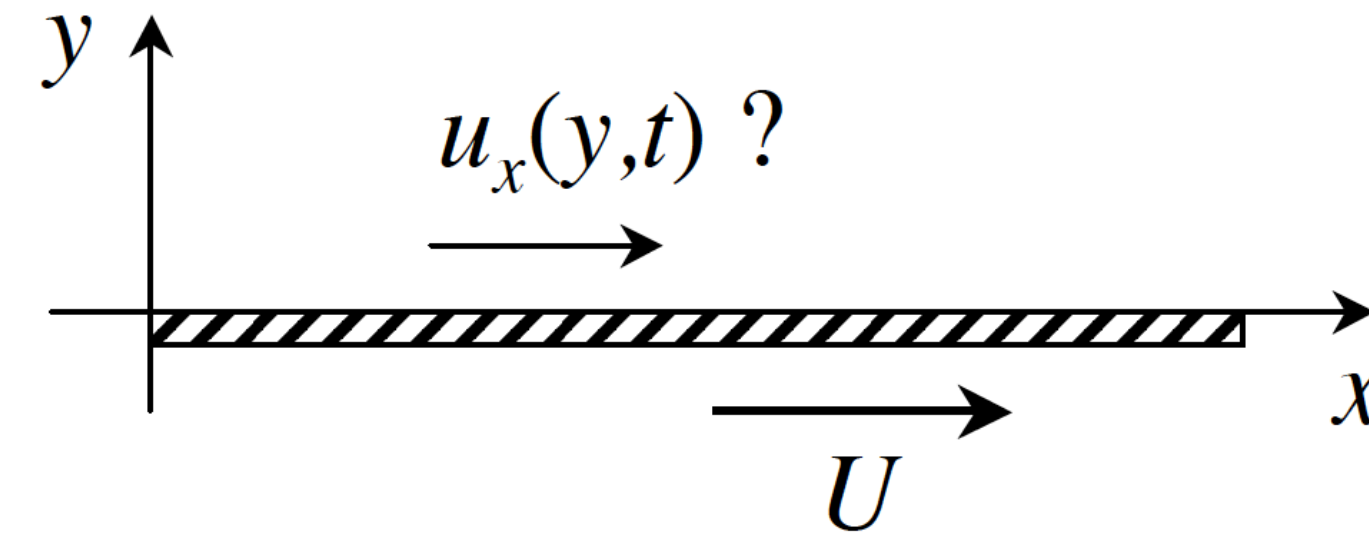
L'équation de Navier-Stokes suivant x

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \cancel{\rho g_x}$$

se réduit à

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (1) \quad \text{où } \nu = \frac{\eta}{\rho} \text{ est le coefficient de viscosité cinématique}$$

(en m²/s)



Avant de résoudre cette équation, on peut estimer l'ordre de grandeur de chacun des termes

$$\frac{U}{t} = \nu \frac{U}{\delta^2} \quad \text{où } \delta \text{ est l'épaisseur caractéristique sur laquelle varie la vitesse, appelée } \mathbf{couche\ limite}$$

On en déduit que $\delta^2 = \nu t$

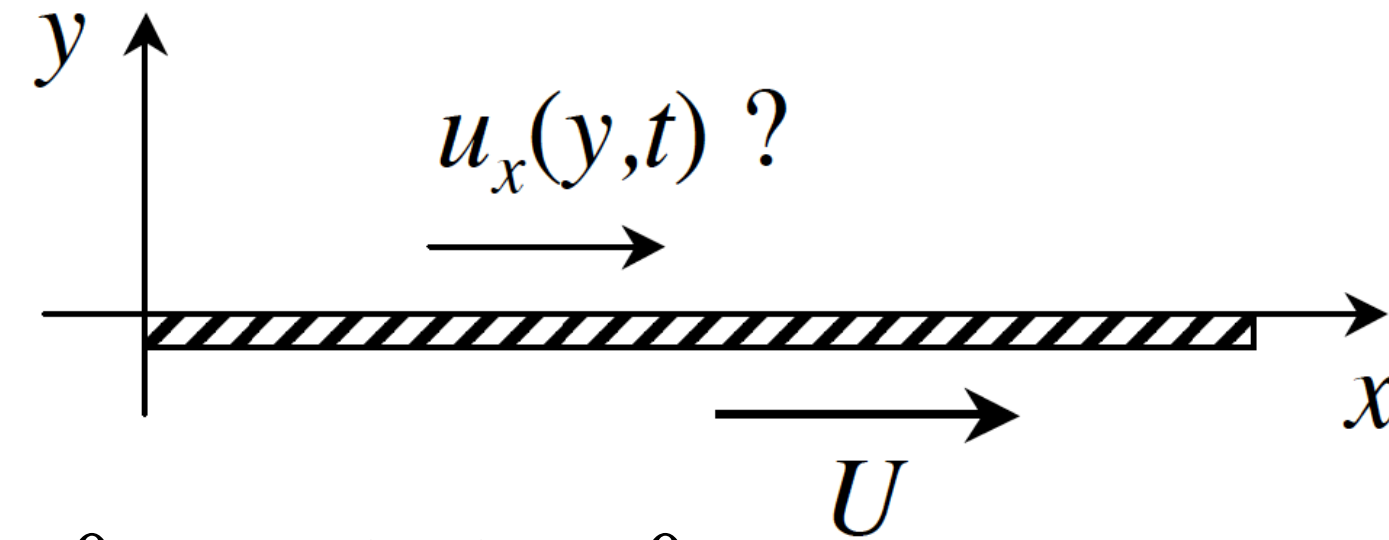
$$\delta = (\nu t)^{1/2}$$

Dans ce problème instationnaire, on s'attend donc à ce que l'épaisseur de couche limite augmente en temps et soit plus importante pour un fluide de viscosité cinématique plus forte

	eau	air
ρ (kg/m ³)	1000	1,29
η (Pa.s)	10 ⁻³	1,85 10 ⁻⁵
ν (m ² /s)	10 ⁻⁶	1,4 10 ⁻⁵

Réolvons maintenant l'équation

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (1)$$



avec C.I. : $u_x(y, t=0) = 0$ pour tout $y > 0$

C.L. : $u_x(y=0, t) = U$ pour tout $t > 0$

$u_x(y=+\infty, t) = 0$ pour tout $t > 0$

Cette équation est identique à l'équation de diffusion de la chaleur $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

L'éq. (1) est invariante par transformation $y \rightarrow \alpha y, t \rightarrow \alpha^2 t$

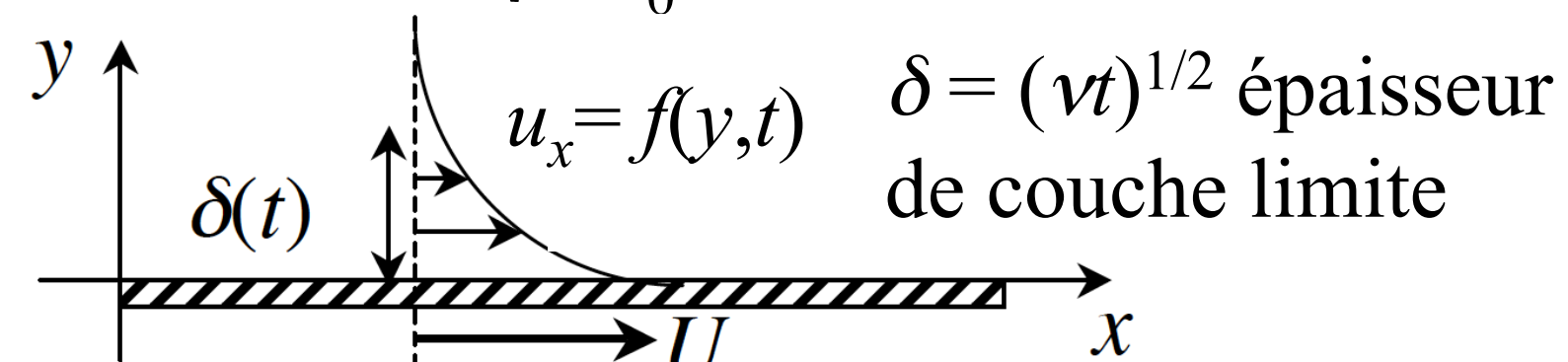
On peut donc chercher une solution $u_x = f(\xi)$ avec $\xi = y/(\nu t)^{1/2}$

L'éq. (1) s'écrit alors

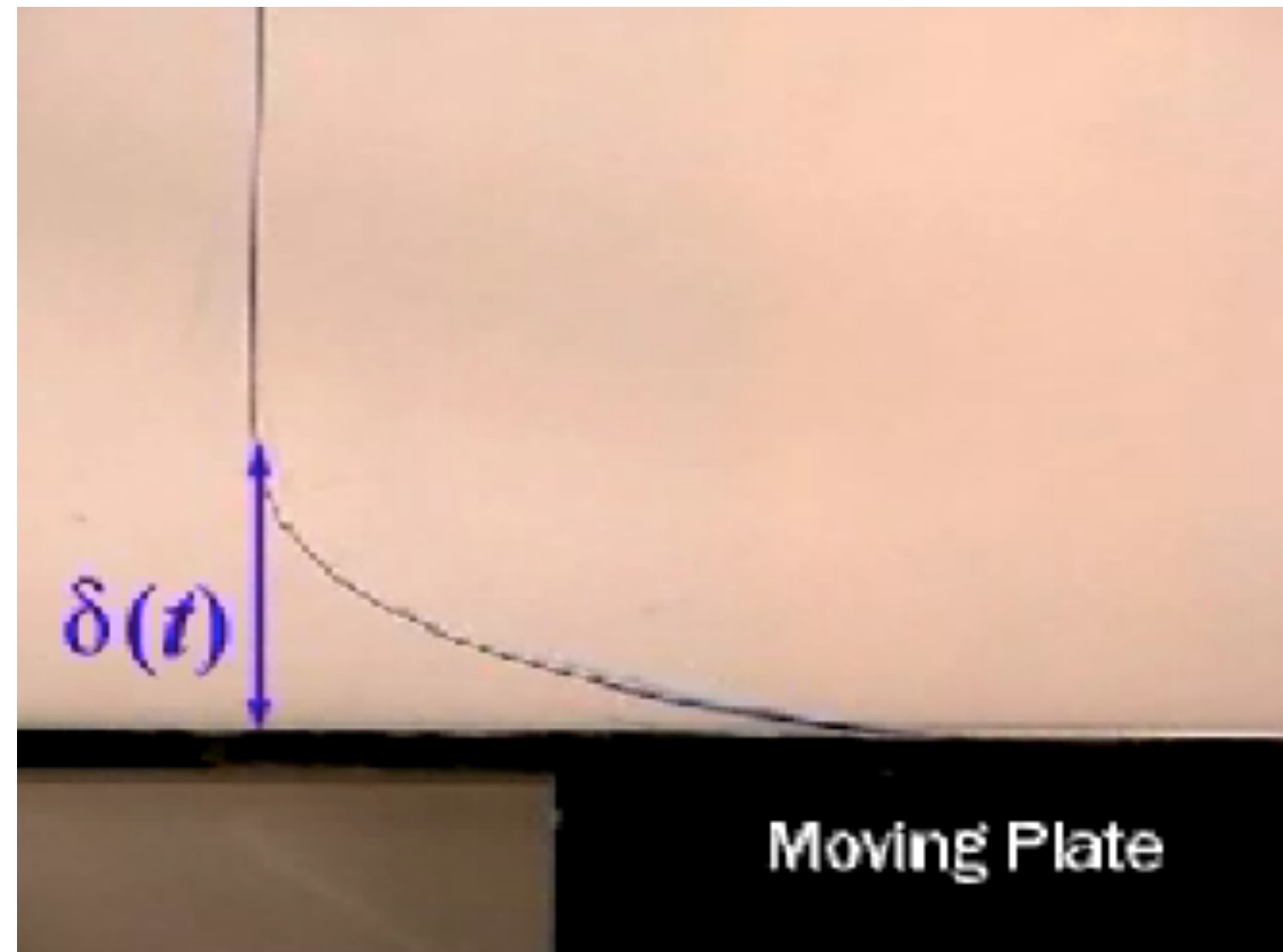
$$f''(\xi) + \frac{1}{2} \xi f'(\xi) = 0 \quad \text{avec CL : } f(0) = U$$

$$f(+\infty) = 0$$

La solution est $u_x(\xi) = U[1 - \text{erf}(\xi/2)]$ avec $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$



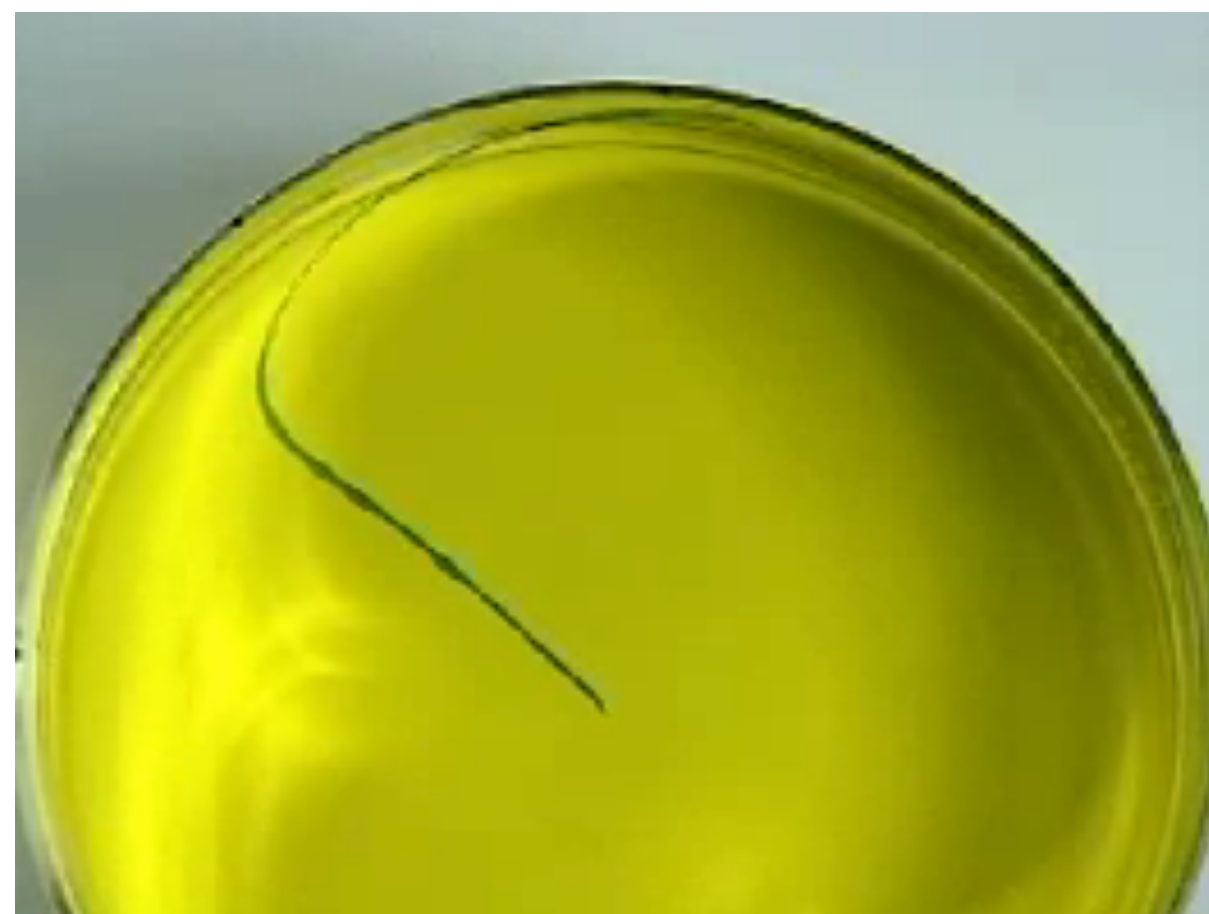
Démarrage d'une plaque plane



$$\delta = (\nu t)^{1/2}$$

épaisseur de couche limite

Spin-up



$\nu = 10 \text{ cSt}$



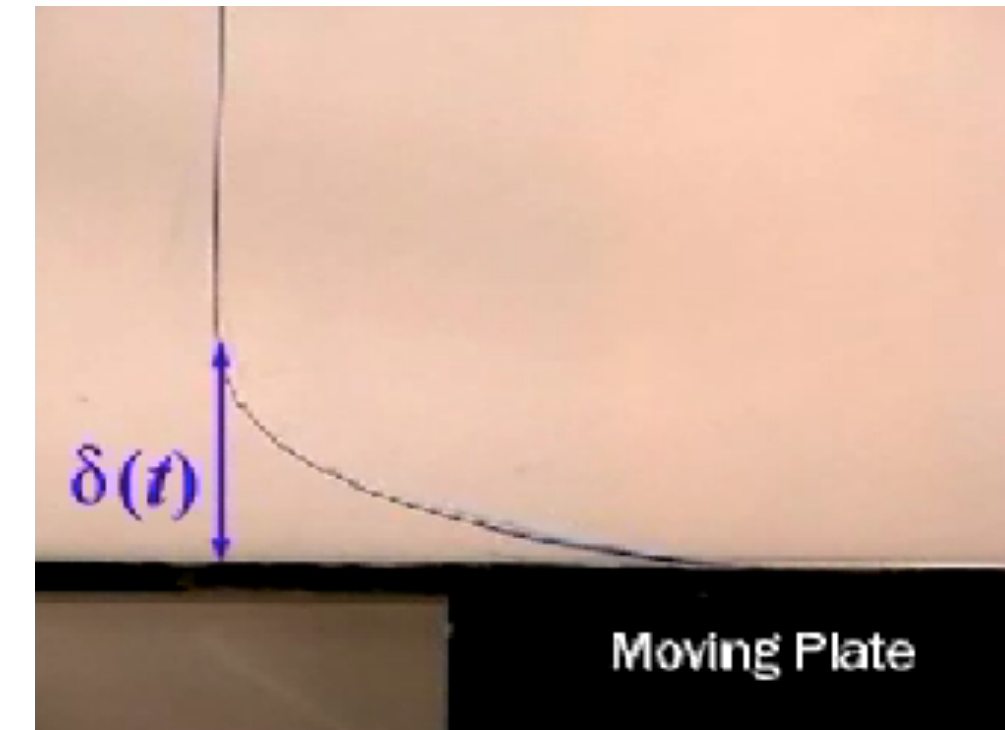
$\nu = 100 \text{ cSt}$



$\nu = 10\,000 \text{ cSt}$

Quelle est la contrainte tangentielle sur la plaque ?

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=0}$$



Avant de la calculer précisément, on peut rapidement estimer son ordre de grandeur :

$$\sigma_{xy}|_{y=0} \sim \eta \frac{U}{\delta} \quad \text{avec } \delta = (\nu t)^{1/2} \text{ épaisseur de couche limite}$$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} \sim \eta \frac{U}{(\nu t)^{1/2}}$$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} \sim \rho^{1/2} \eta^{1/2} U t^{-1/2}$$

Cette contrainte décroît au cours du temps

La contrainte tangentielle sur la plaque est précisément

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=0}$$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_{y=0}$$

avec $\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{(\nu t)^{1/2}}$

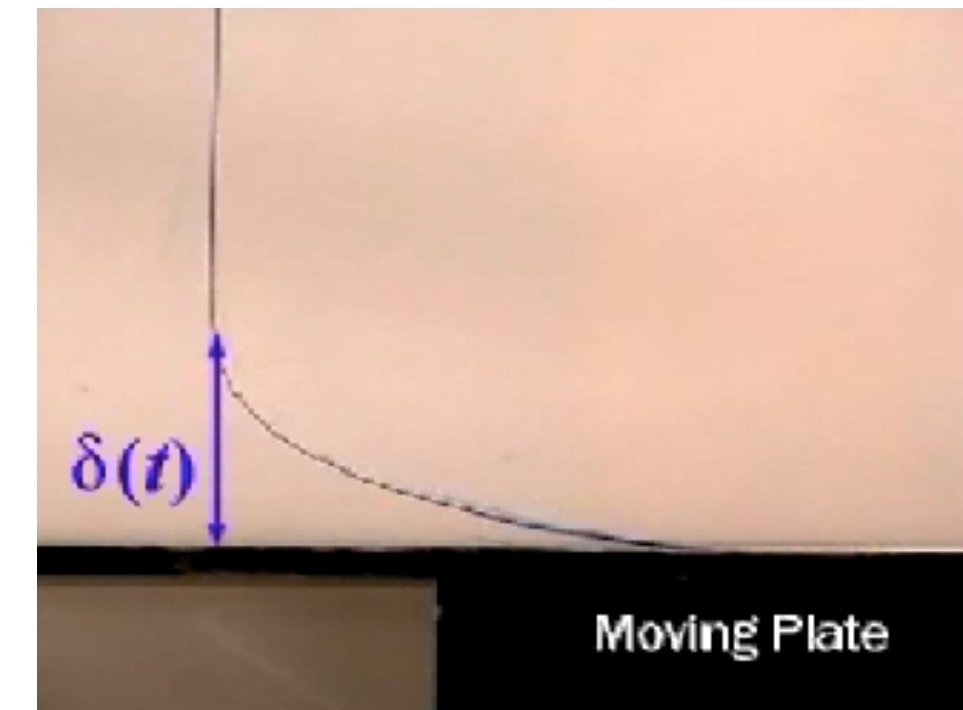
$$\sigma_{xy}|_{y=0} = \eta \frac{1}{(\nu t)^{1/2}} \left(\frac{\partial u_x}{\partial \xi} \right)_{y=0}$$

avec $\frac{\partial u_x}{\partial \xi} = -\frac{2U}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2}$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = -\eta \frac{1}{(\nu t)^{1/2}} \frac{2U}{\sqrt{\pi}}$$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho^{1/2} \eta^{1/2} U t^{-1/2}$$

Cette contrainte décroît au cours du temps



ÉCOULEMENTS A TRES FAIBLE NOMBRE DE REYNOLDS

REGIME DE STOKES

$$0 = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u}$$

Propriétés de l'équation de Stokes (linéaire) et conséquences :

- unicité de solution
- réversibilité hydrodynamique
- symétrie de l'écoulement autour de corps symétriques
- modes de propulsion

équation de Stokes

Navier - Stokes :

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} = \cancel{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}}$$

If $Q \ll 1$:

Time doesn't matter. The pattern of motion is the same, whether slow or fast, whether forward or backward in time.

The Scallop Theorem



Figure 6

THE NATIONAL COMMITTEE

FOR

FLUID MECHANICS FILMS

under a grant from the

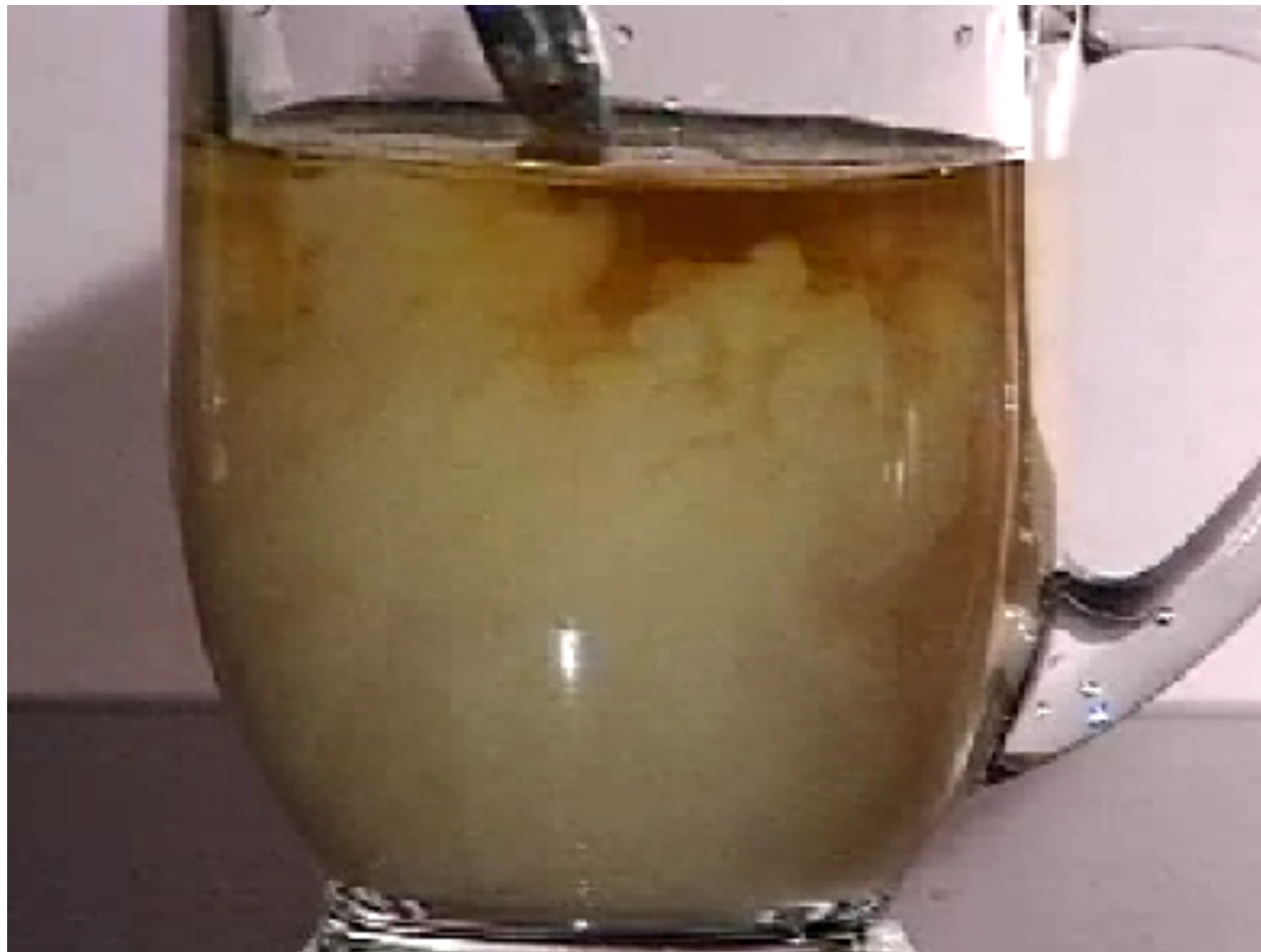
National Science Foundation

presents

Mélange

$Re \gg 1$

$Re \ll 1$

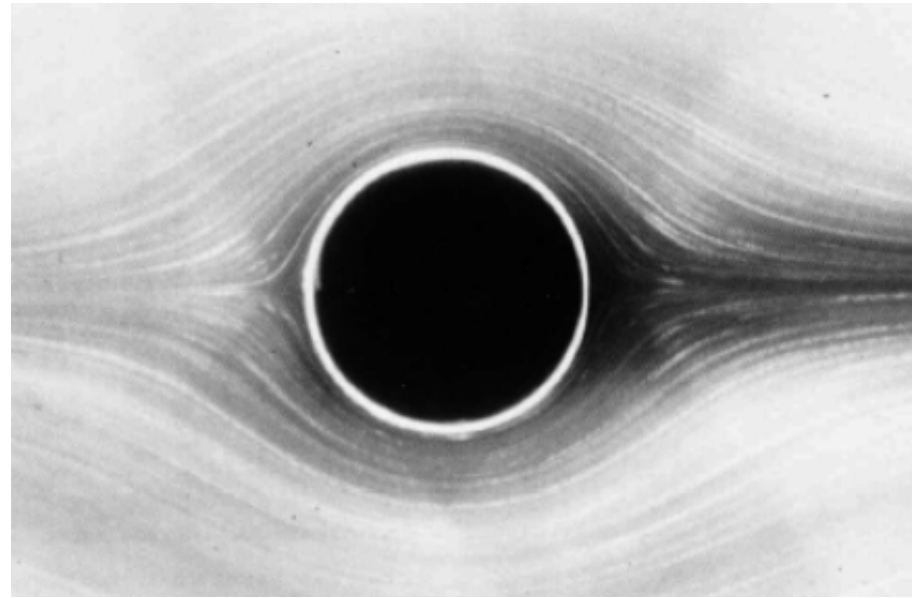


café, thé



peinture

A $Re \ll 1$, la force de traînée (et aussi portance) sur un objet de taille L est $F \sim \eta LU$
en régime stationnaire



Le coefficient numérique en préfacteur peut être calculé analytiquement pour des formes simples :

$$F_D = 6\pi\eta RU \quad \text{pour une sphère (Stokes, 1880)}$$

$$F_D = 16\pi\eta RU \quad \text{pour un disque (Sampson, 1891)}$$

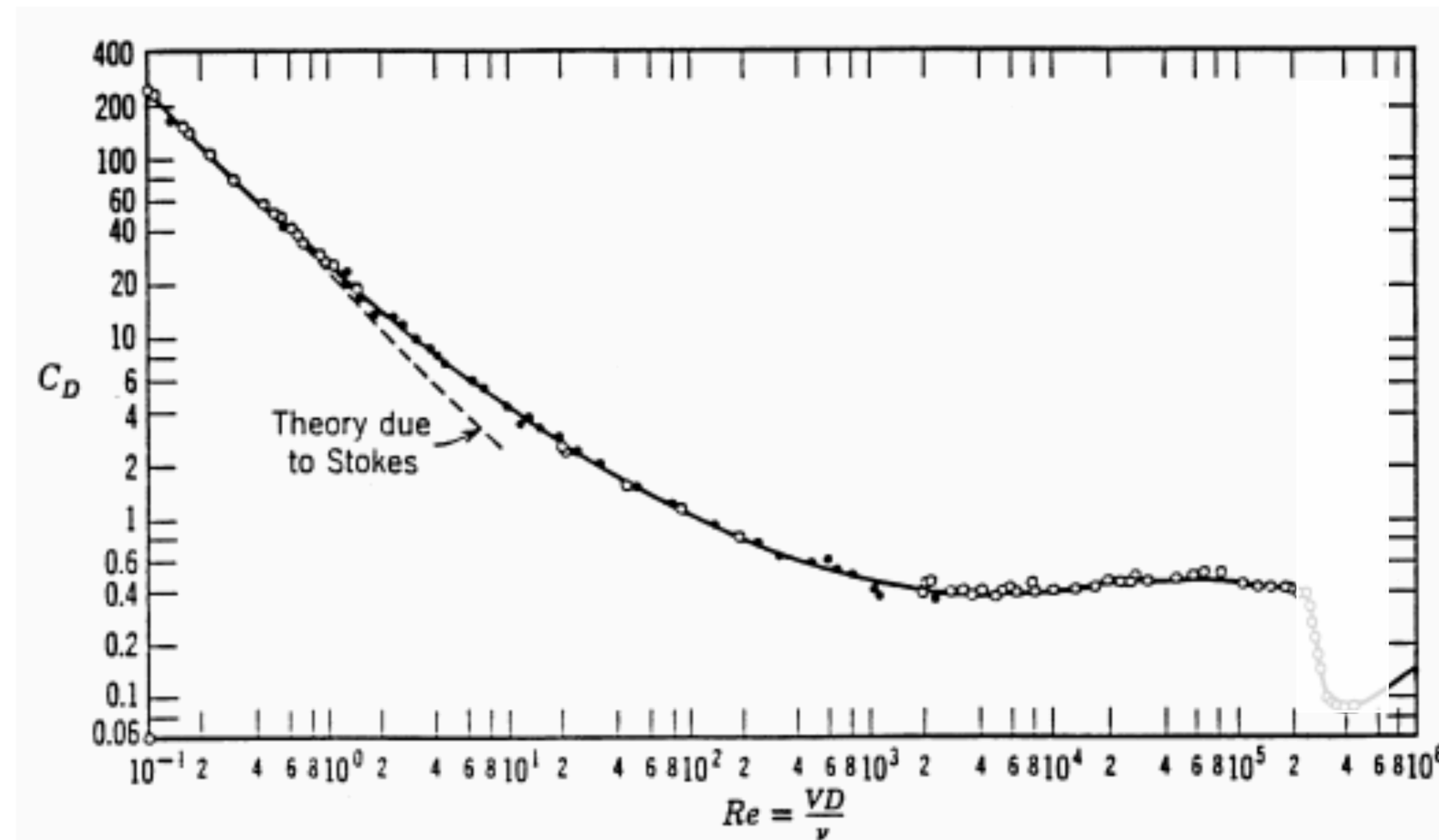
Le coefficient de traînée défini en régime inertiel ($Re \gg 1$) n'est pas pertinent en régime visqueux ($Re \ll 1$)

Pour une sphère

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} = \frac{3\pi\eta UD}{\frac{\pi}{8}\rho U^2 D^2} = \frac{24}{Re}$$

pour $Re \ll 1$

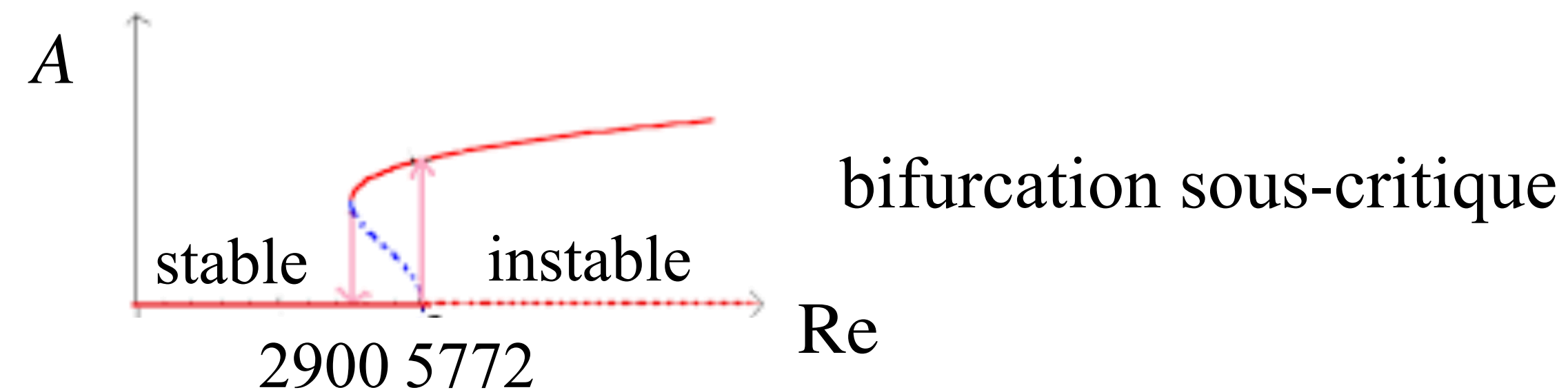
Coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds – Sphère lisse



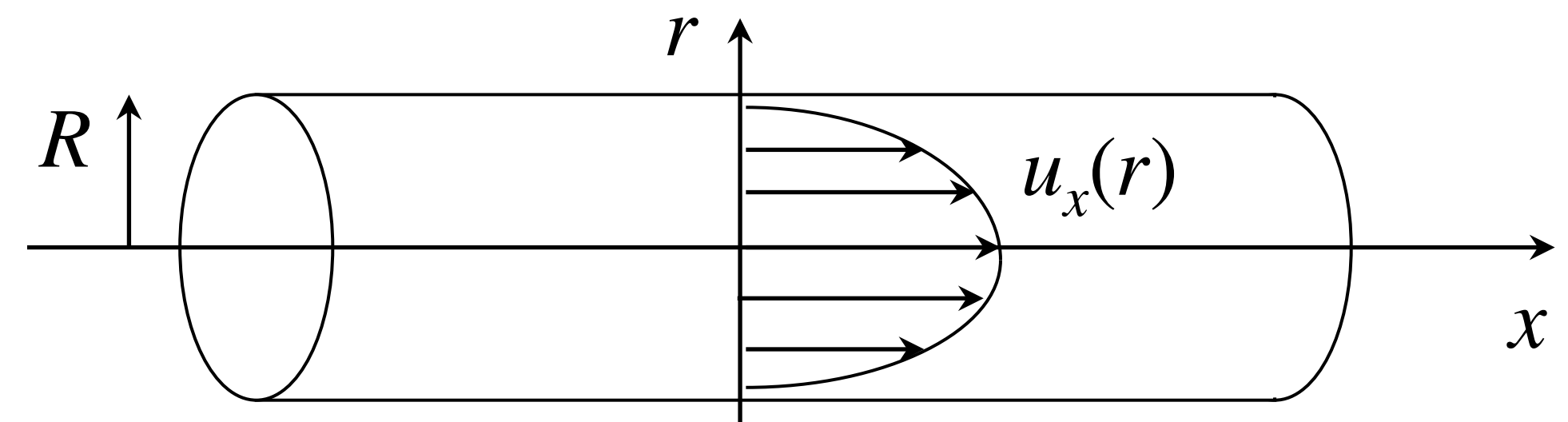
L'écoulement de Poiseuille plan est-il stable ?

Il est linéairement stable théoriquement jusqu'à $Re_c = 5772$, expérimentalement jusqu'à $Re_c \approx 3000$ (sans précautions particulières) voire 5500 (avec de grandes précautions)

Il est non linéairement instable à partir $Re_c \approx 2900$



Écoulement en tube cylindrique (cf TD 5)

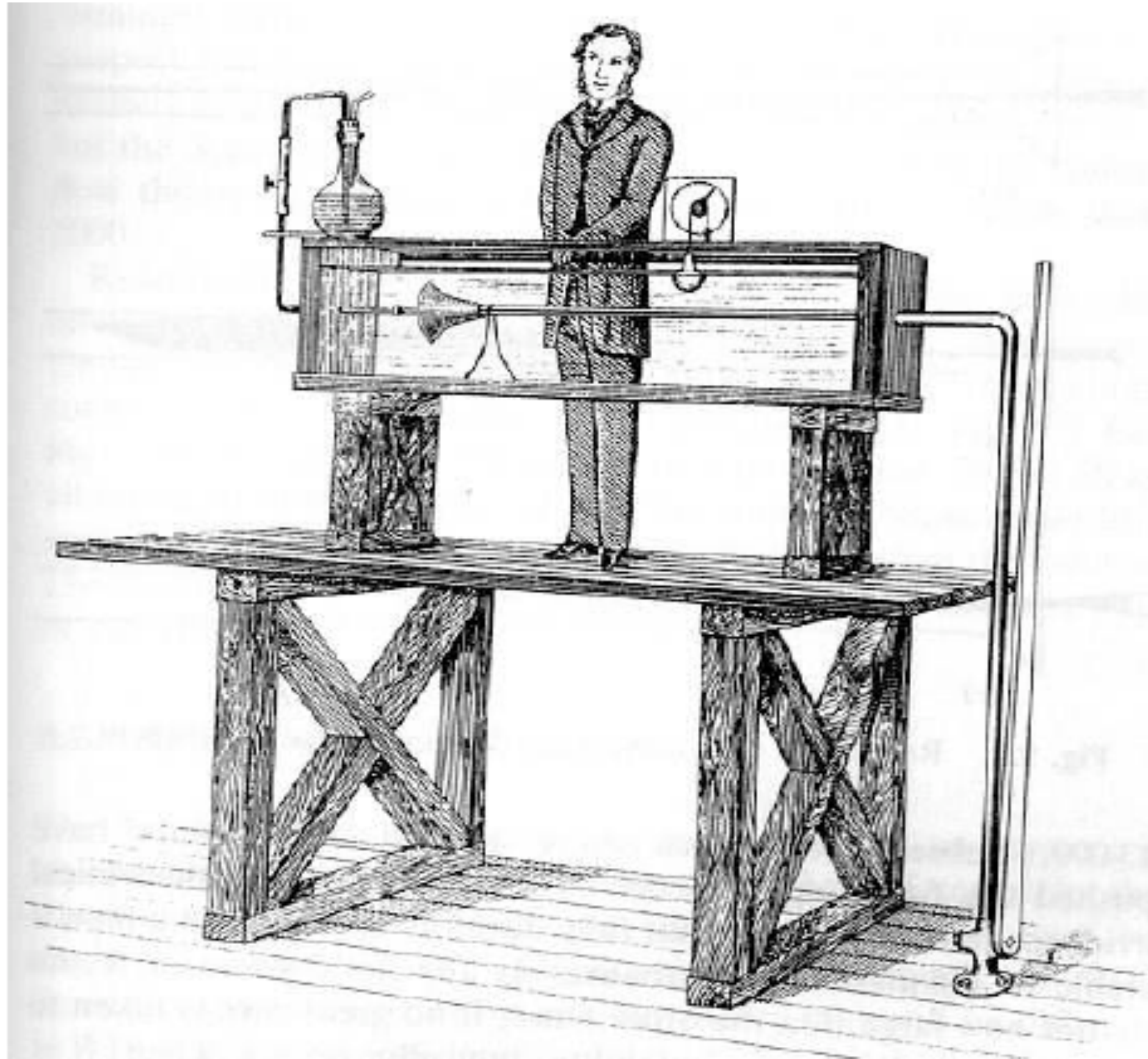


L'écoulement de Poiseuille cylindrique est-il stable ?

linéairement stable théoriquement jusqu'à $Re = +\infty$, expérimentalement jusqu'à $Re \approx 2600$ (sans précautions particulières) ou même 10^5 (avec des très grandes précautions) !

non linéairement instable à $Re \approx 2600$ (cas tube)

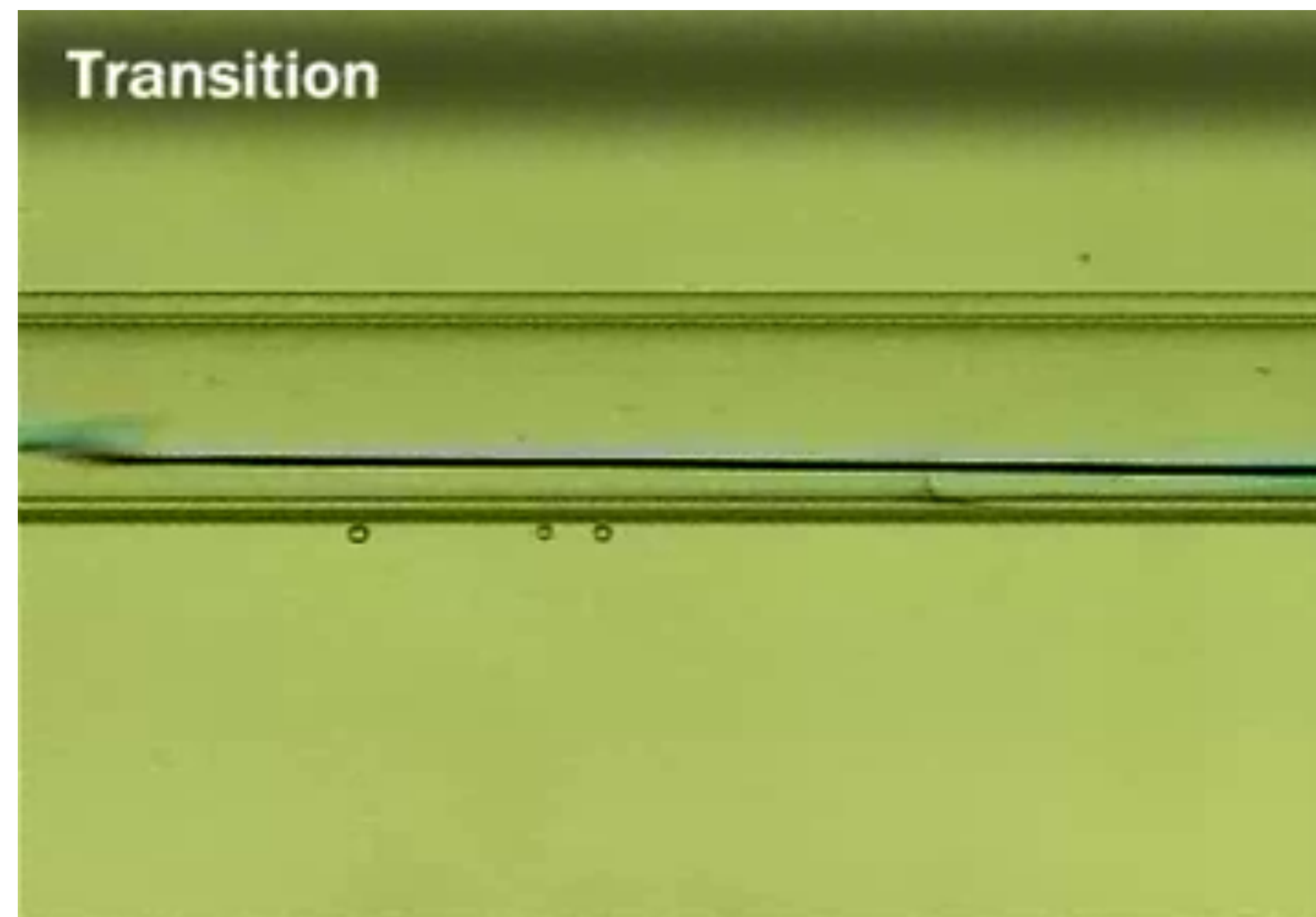
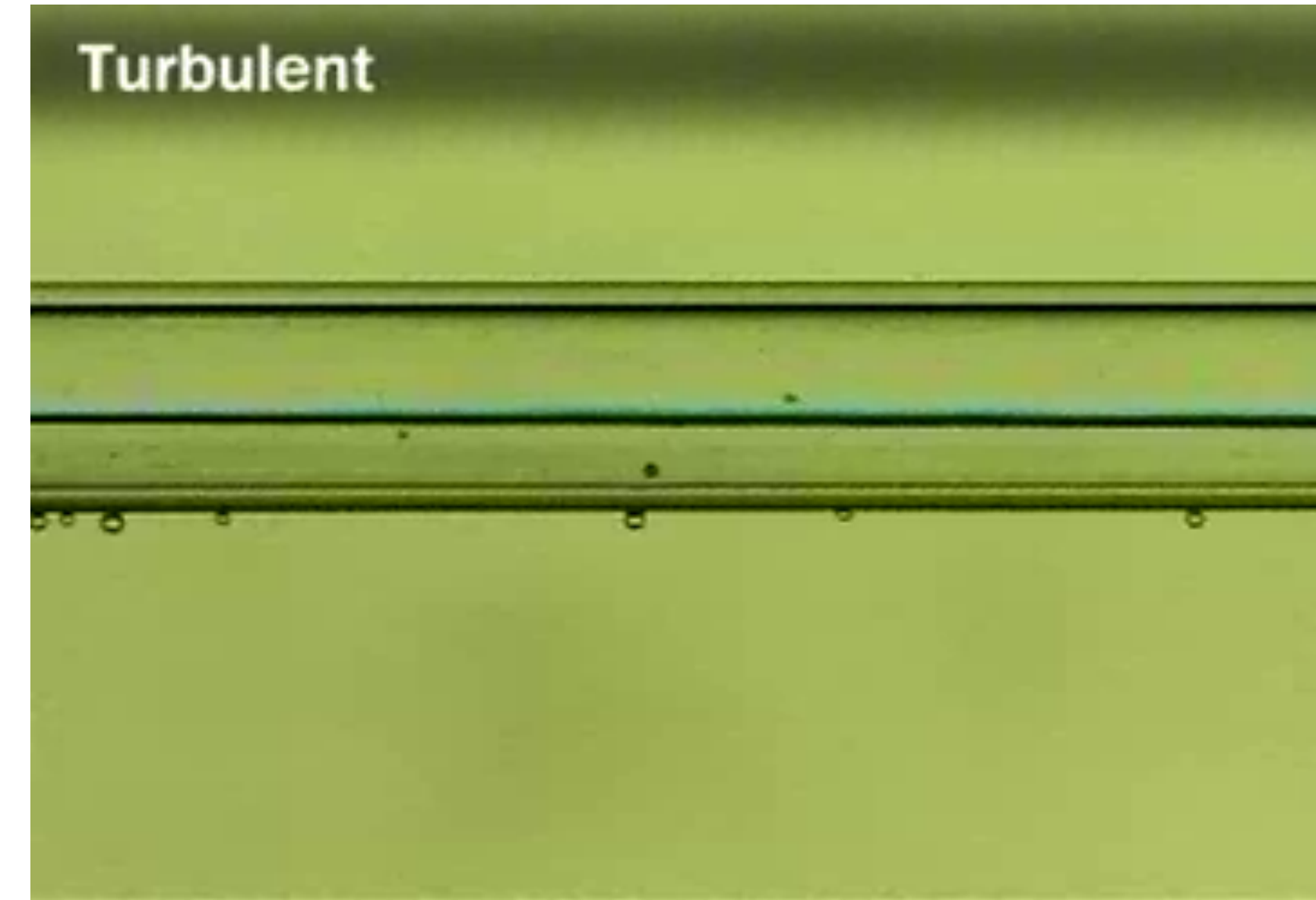
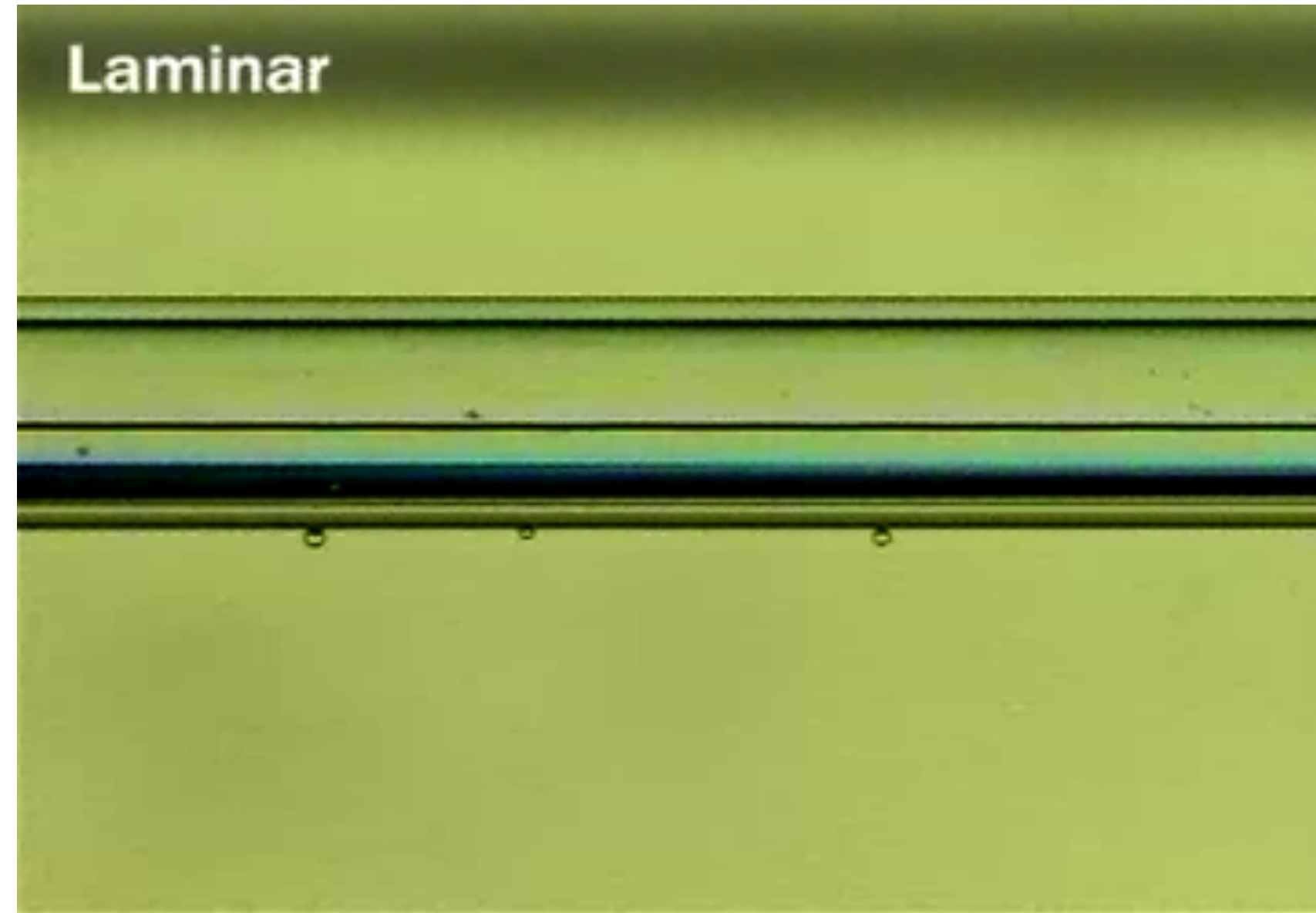
Écoulement en tube
Transition laminaire-turbulent



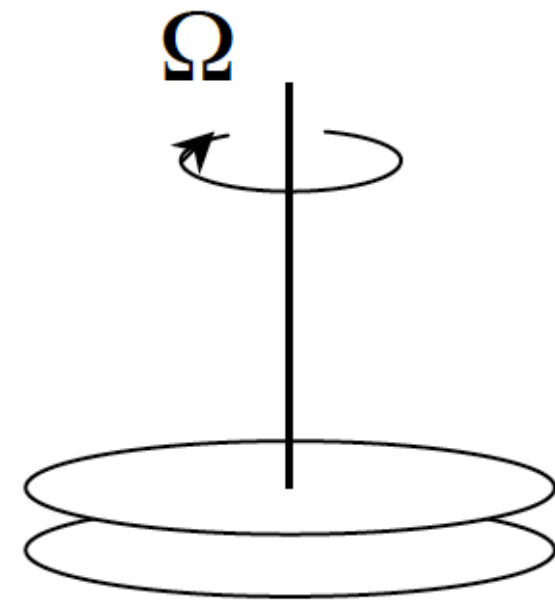
Osborne Reynolds (1883, Manchester)



Transition laminaire-turbulent en tube

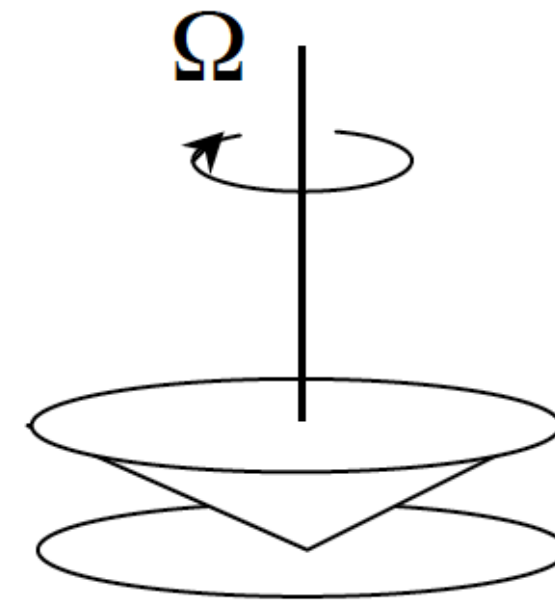


Viscosimètres (ou rhéomètres) de Couette



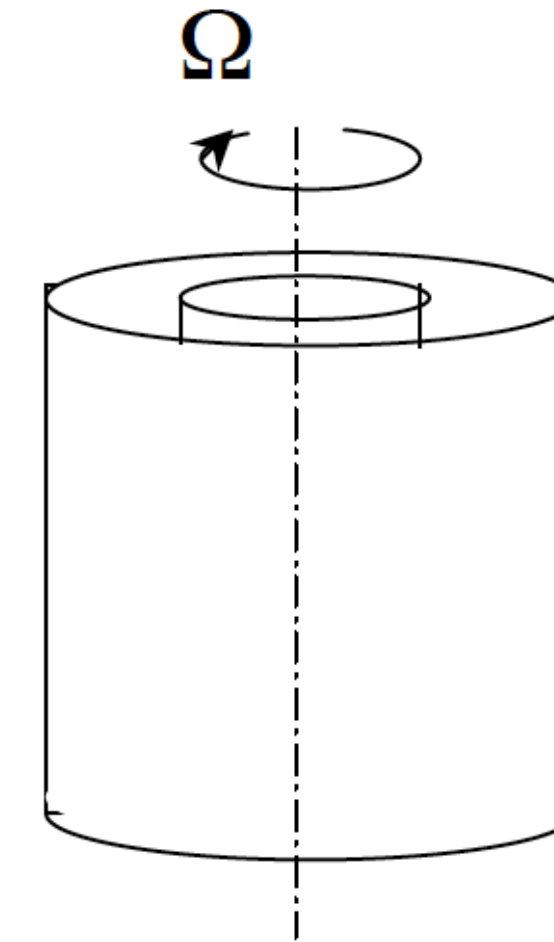
Couette plan

deux disques parallèles
l'un fixe, l'autre en rotation.
Très simple mais avec
l'inconvénient que le taux de
cisaillement dépend de r



Cône-plan

un cône en rotation au-dessus
d'un disque fixe.
L'avantage est que le taux de
cisaillement ne dépend pas de r .
Un autre avantage est la faible
quantité de liquide à utiliser



Couette cylindrique

deux cylindres
concentriques, le cylindre
intérieur tournant,
l'extérieur fixe
(cf TD 5)



Maurice Couette
(1858-1943)
physicien français



*Le viscosimètre construit et
utilisé par Maurice Couette
pour mesurer la viscosité de
l'eau et de l'air en 1888*

Rhéomètres
à vitesse imposée
(mesure du couple)
à contrainte imposée
(mesure de vitesse)

Un rhéomètre actuel



Stabilité de l'écoulement parallèle $u_\theta(r)$ de Couette cylindrique ?

Linéairement stable jusqu'à $Re_c = \frac{41}{\sqrt{R_2/R_1 - 1}}$ pour $R_2/R_1 \approx 1$ (faible gap)

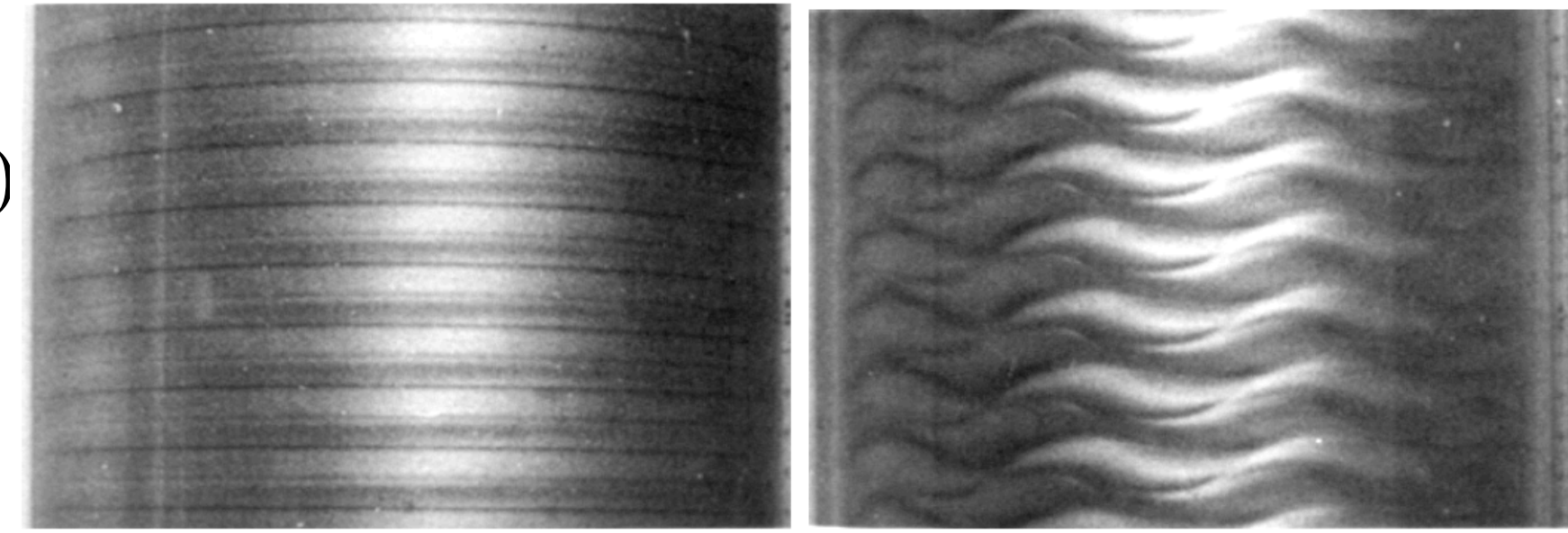
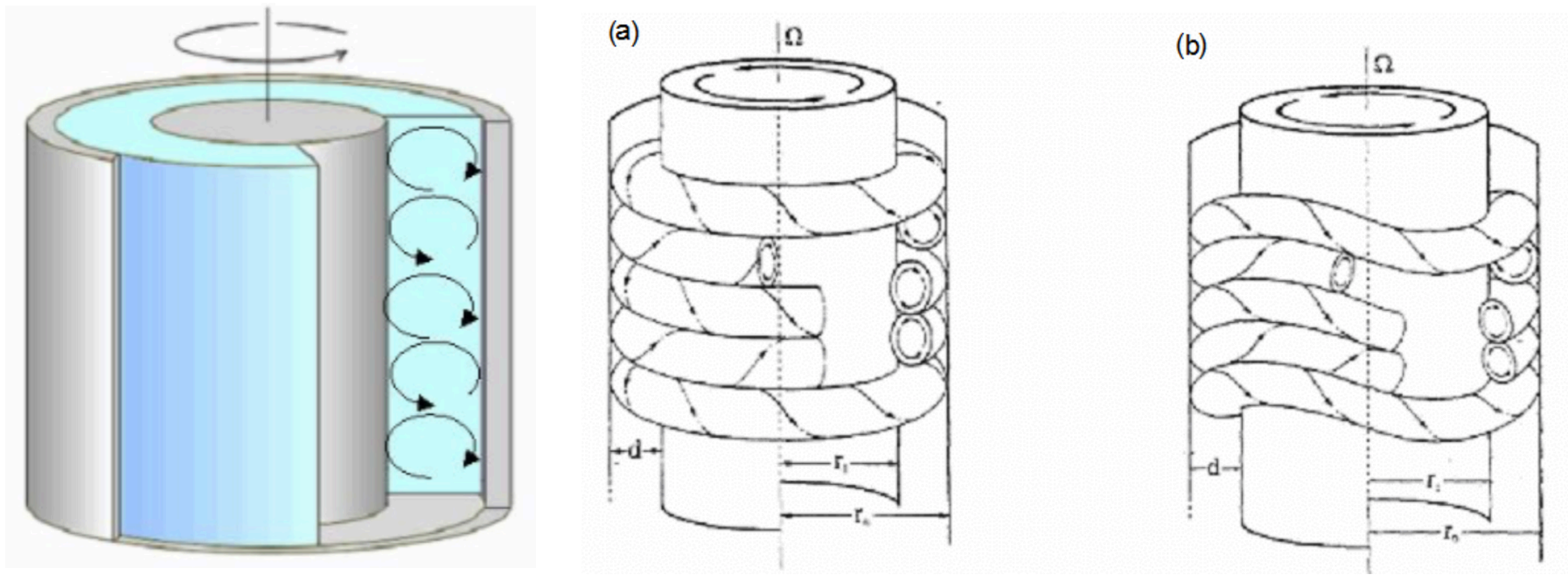
L'écoulement n'est ensuite plus parallèle mais se déstabilise pour prendre la forme de

rouleaux contrarotatifs stationnaires $\mathbf{u} \begin{cases} u_r(r, z) \\ u_\theta(r, z) \\ u_z(r, z) \end{cases}$
(instabilité de Taylor-Couette)

puis oscillants $\mathbf{u} \begin{cases} u_r(r, \theta, z, t) \\ u_\theta(r, \theta, z, t) \\ u_z(r, \theta, z, t) \end{cases}$

...

avant la turbulence (H. Sweeney & J. Gollub 1975)

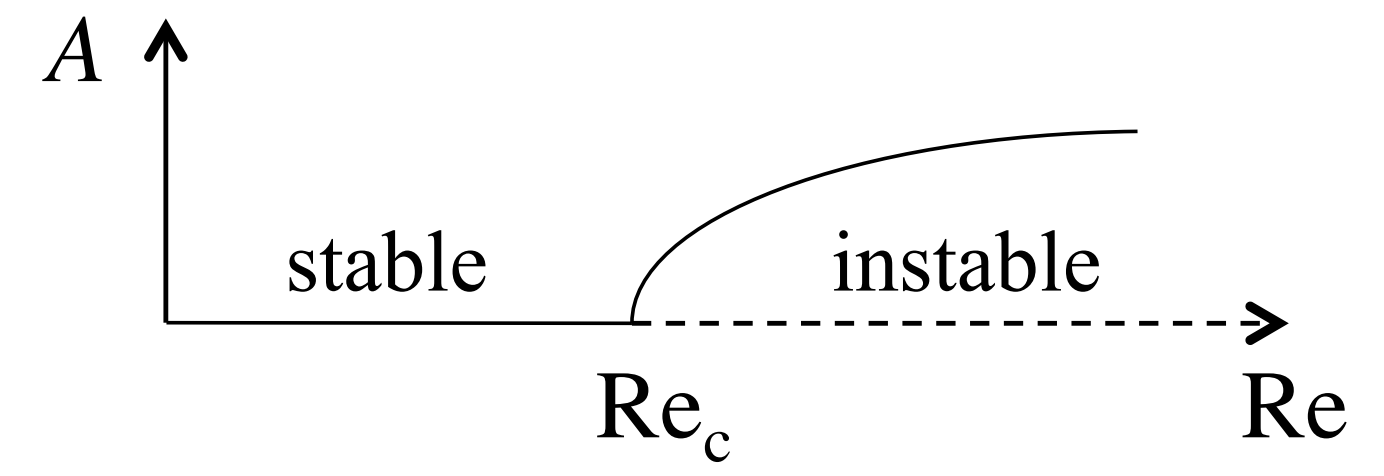


rouleaux de Taylor-Couette

Instabilité de Taylor-Couette par bifurcation super-critique (1923)



G. I. Taylor 1886-1975



Stabilité de l'écoulement de Couette plan ?

Linéairement stable jusqu'à $Re = +\infty$ (résultat issu d'une analyse de stabilité linéaire

$$u = u_0 + A \cos(kx - wt) \quad \text{avec perturbation de vitesse } A \text{ infiniment petite}$$

Et non-linéairement (A non infiniment petit) ?

Transition vers la turbulence par intermittence spatio-temporelle

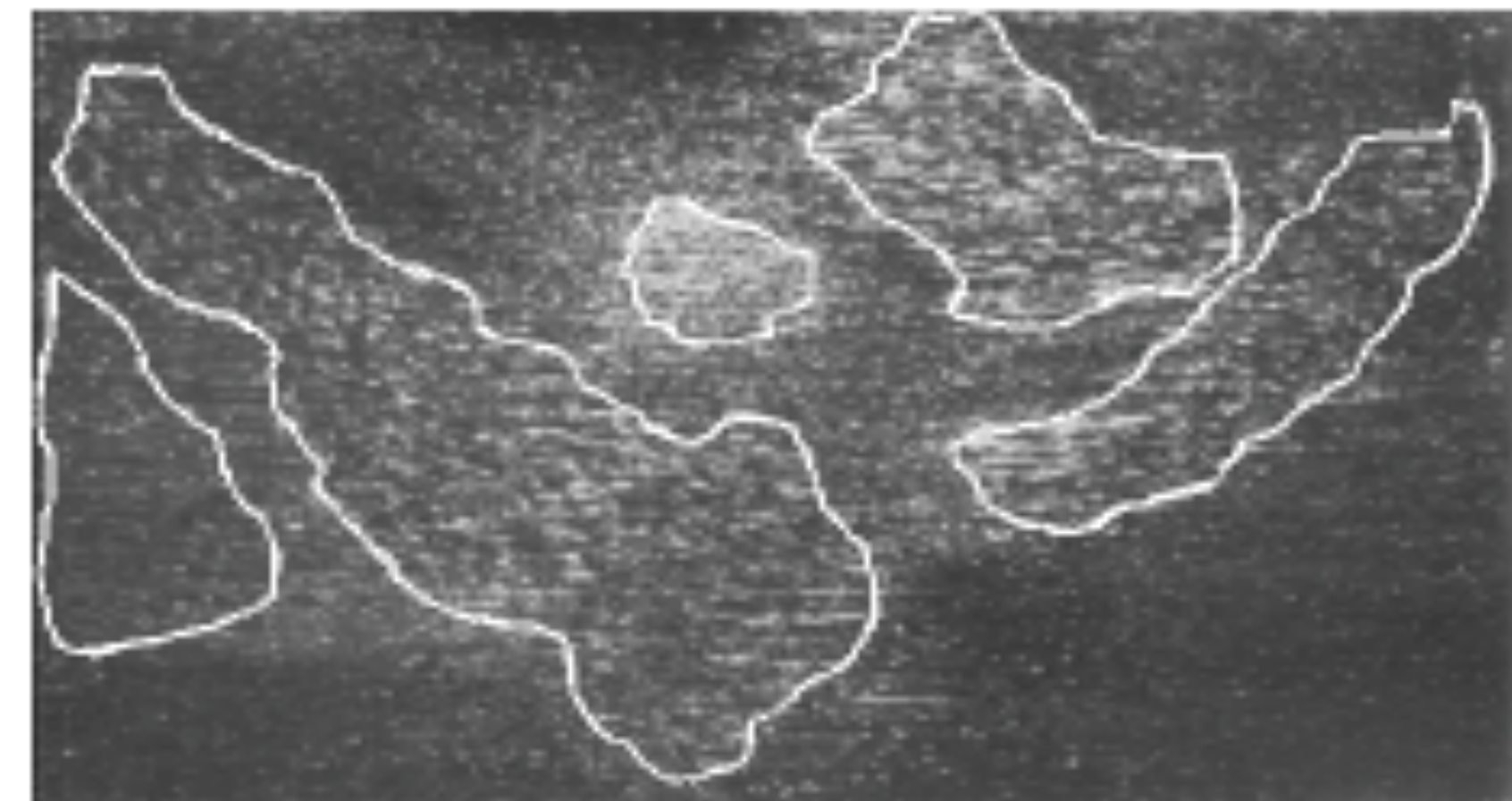
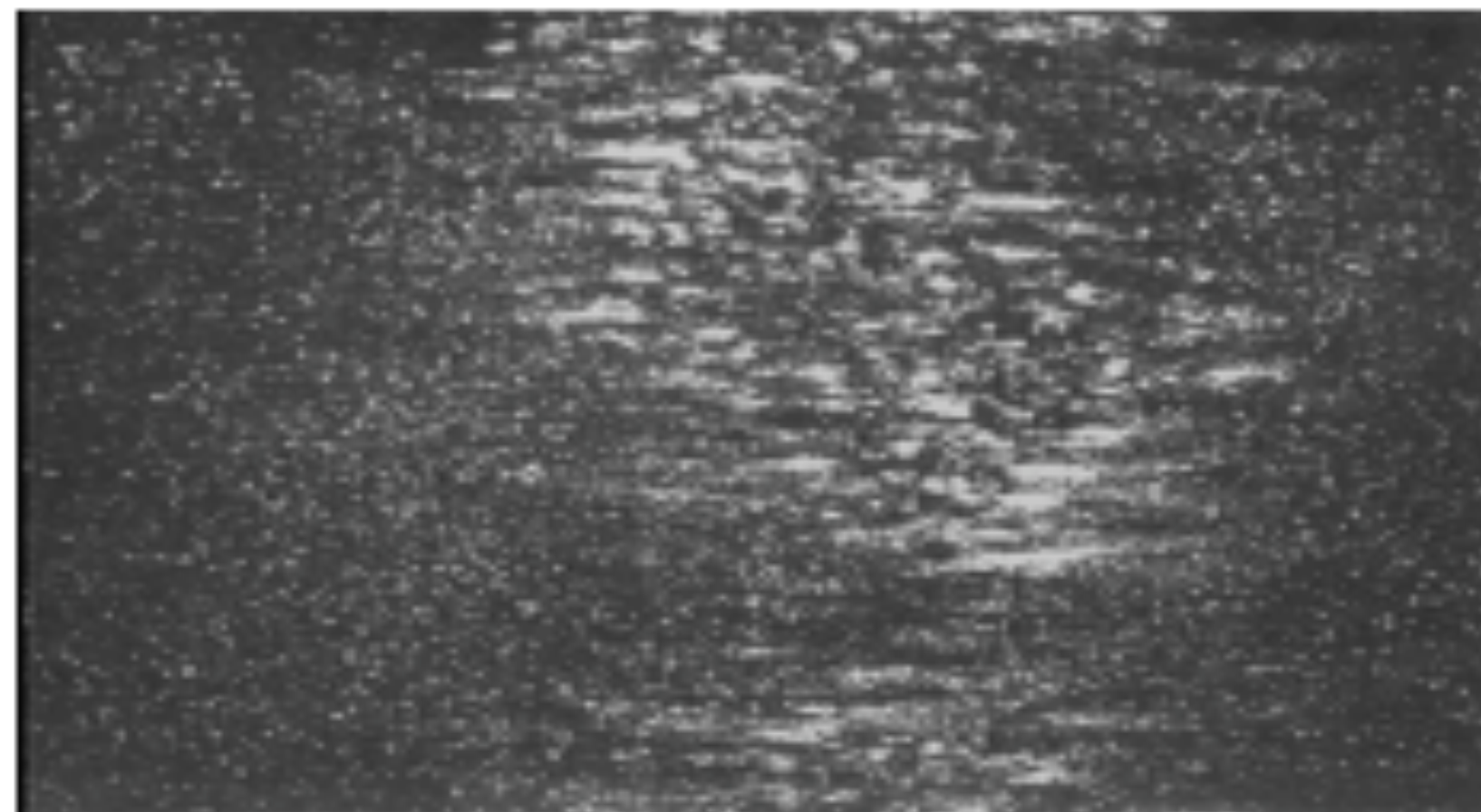
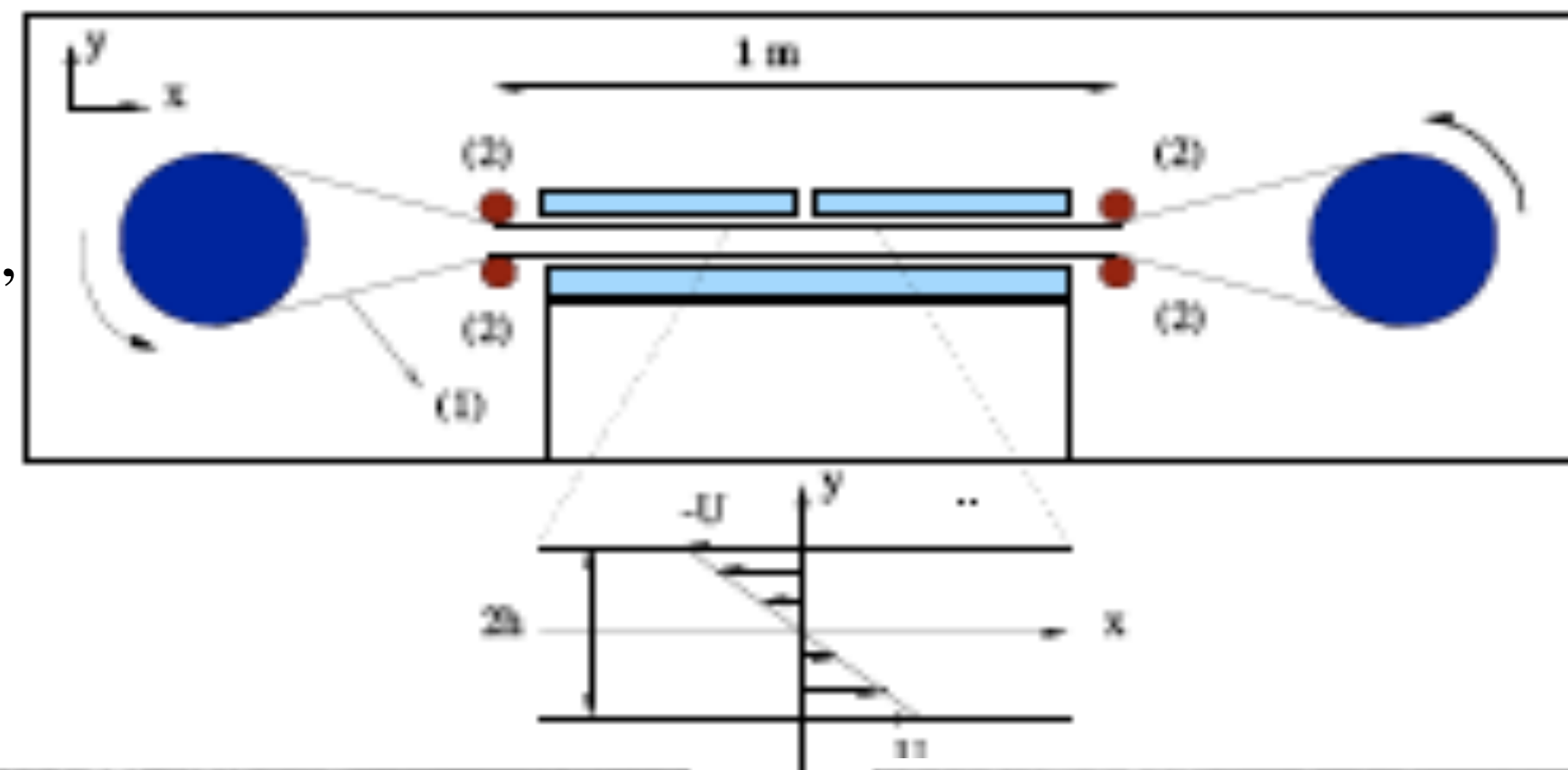
Expériences

F. Daviaud, O. Dauchot, S. Bottin,
P. Manneville (CEA Saclay)

1990-2000

R. Monchaud et al. (ENSTA)

2010-2020



$Re \sim 325$

Transition vers la turbulence par spots turbulents
Simulations numériques
($Re = 250$)

P. Manneville (Ladhyx) 2007
Barkley & Tuckerman (LIMSI-PMMH) 2007
Y. Duguet (LIMSI) 2015-2020

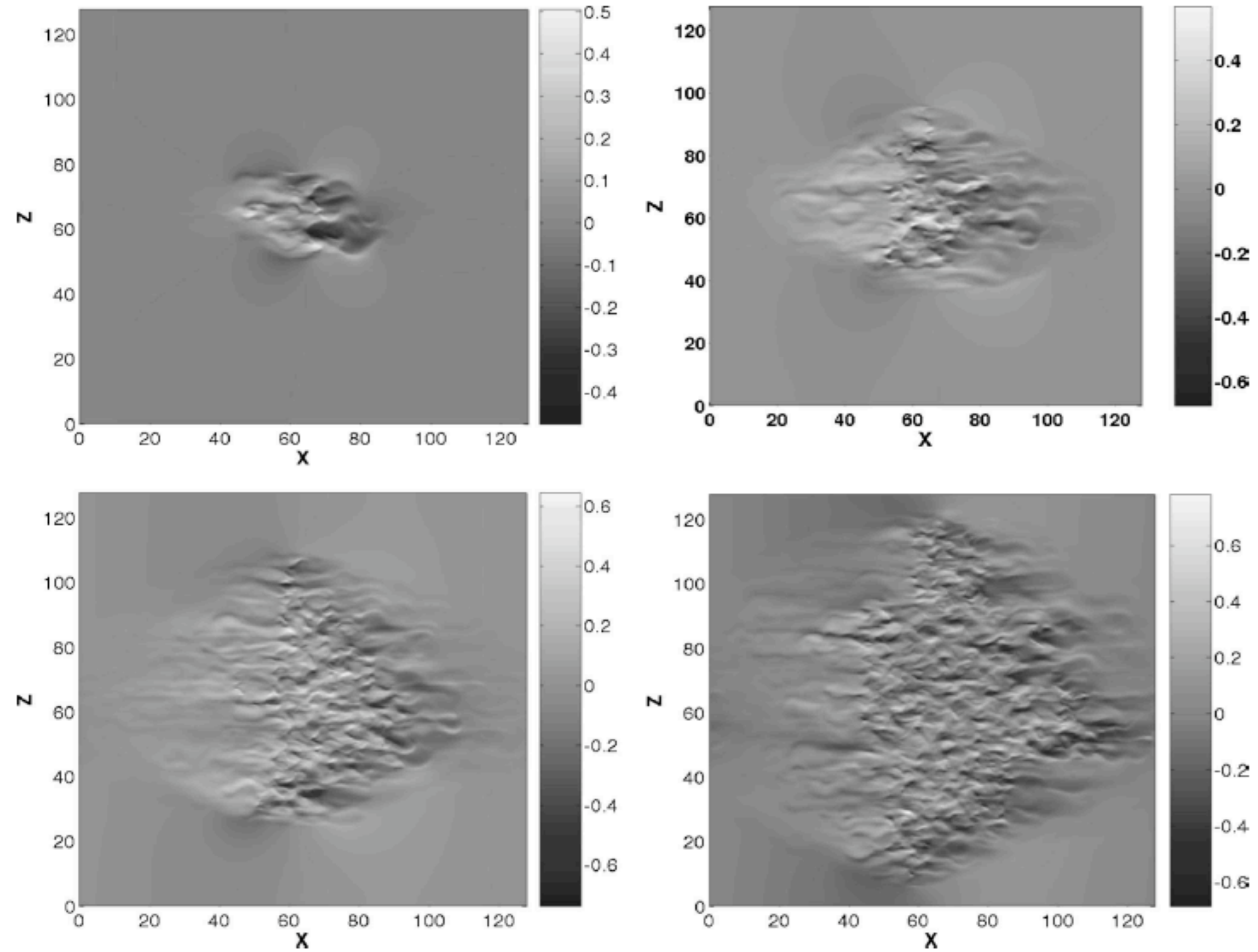
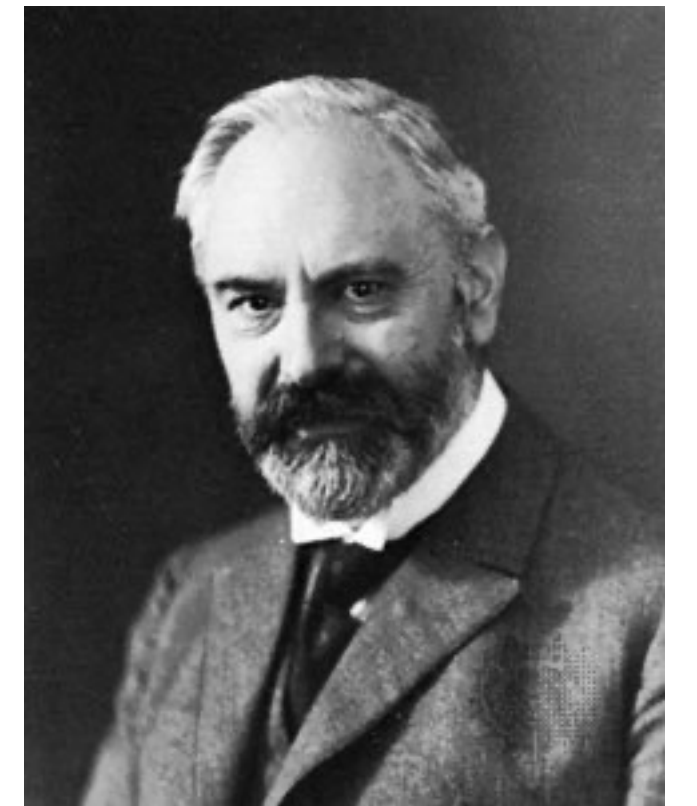


FIG. 1. Growth of a turbulent spot at $R=250$ in a wide domain ($L_x \times L_z = 128 \times 128$). Field of amplitude $U_0(x, z, t)$ in gray levels at $t=50, 150, 250,$ and 350 (from left to right and top to bottom). The whole domain becomes uniformly turbulent at $t \approx 700$.

Couche Limite

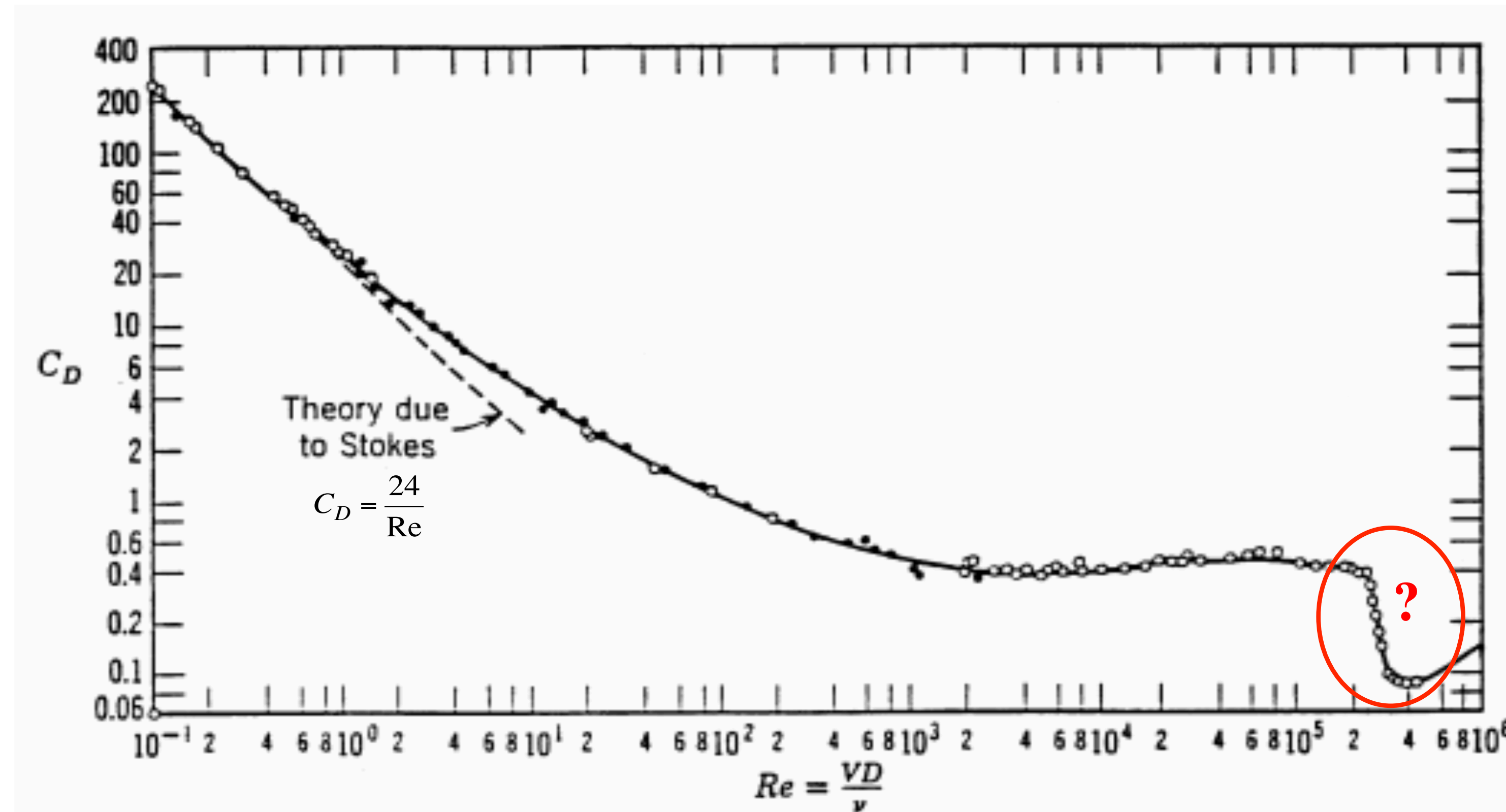
Le concept de couche limite date d'une centaine d'années (début du 20ème siècle) et a constitué un élément clé dans le développement de l'aéronautique, avec la compréhension de phénomènes subtils, qui apparaissaient incompréhensibles à l'époque, comme la crise de traînée appelée "the Eiffel paradox"



L Prandtl

La crise de traînée ou "the Eiffel paradox"

Coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds – Sphère lisse



Que se passe-t-il entre $Re = 2 \times 10^5$ et 3×10^5 ?

Le 13 août 1912, courrier de Gustave Eiffel à un de ses collaborateurs :

« Mon cher Rith, j'ai reçu votre lettre du 12. Les résultats pour la sphère de 24,4 cm avec les vitesses de 6 à 10 m/s sont plus que bizarres et des expériences aussi discordantes ne peuvent être bonnes. Elles ont besoin d'être refaites. Achetez une nouvelle sphère de 15 à 18 cm. »

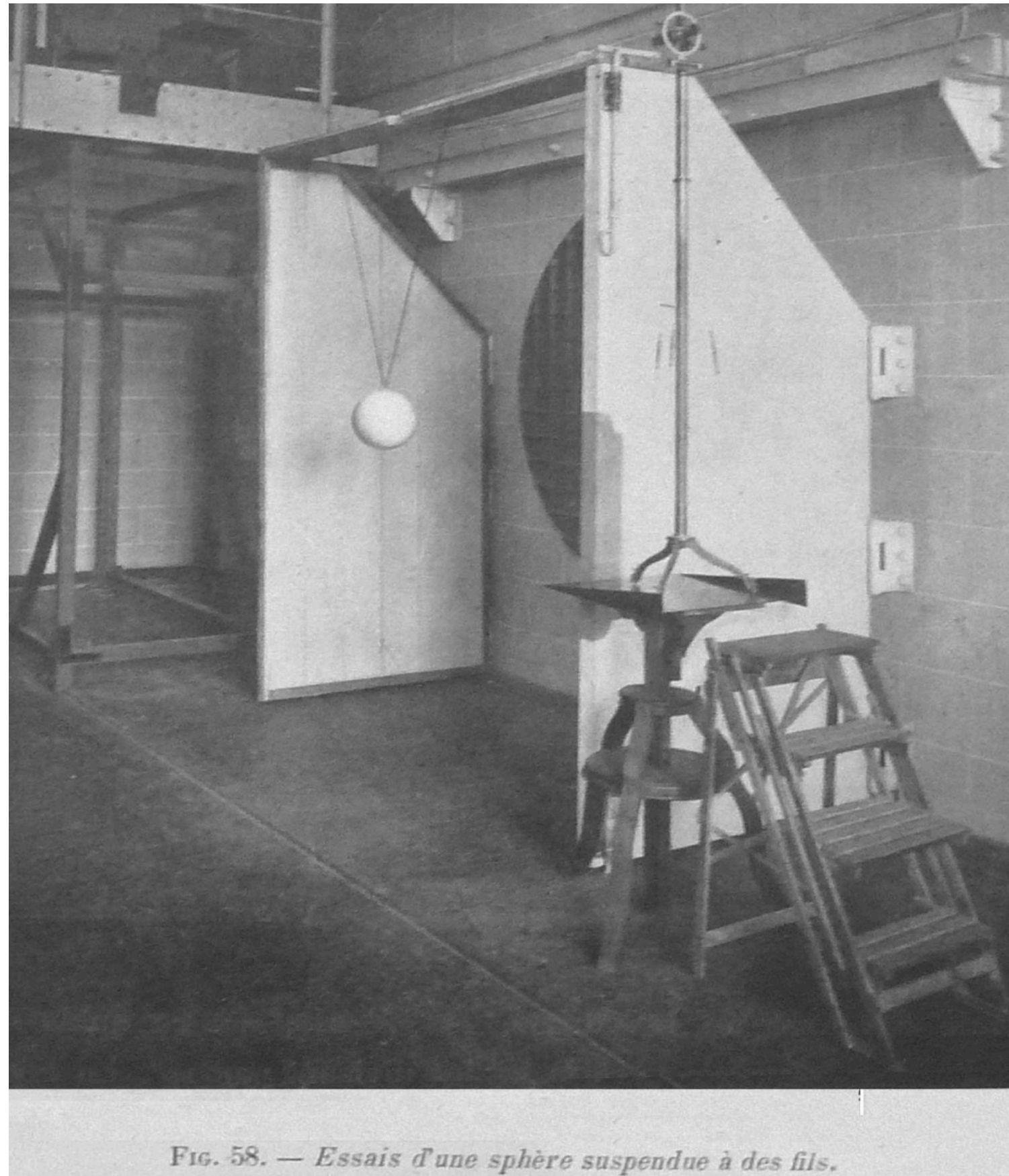


Fig. 58. — Essais d'une sphère suspendue à des fils.

Dispositif de mesure de la traînée de la sphère par son recul dans la soufflerie d'Eiffel

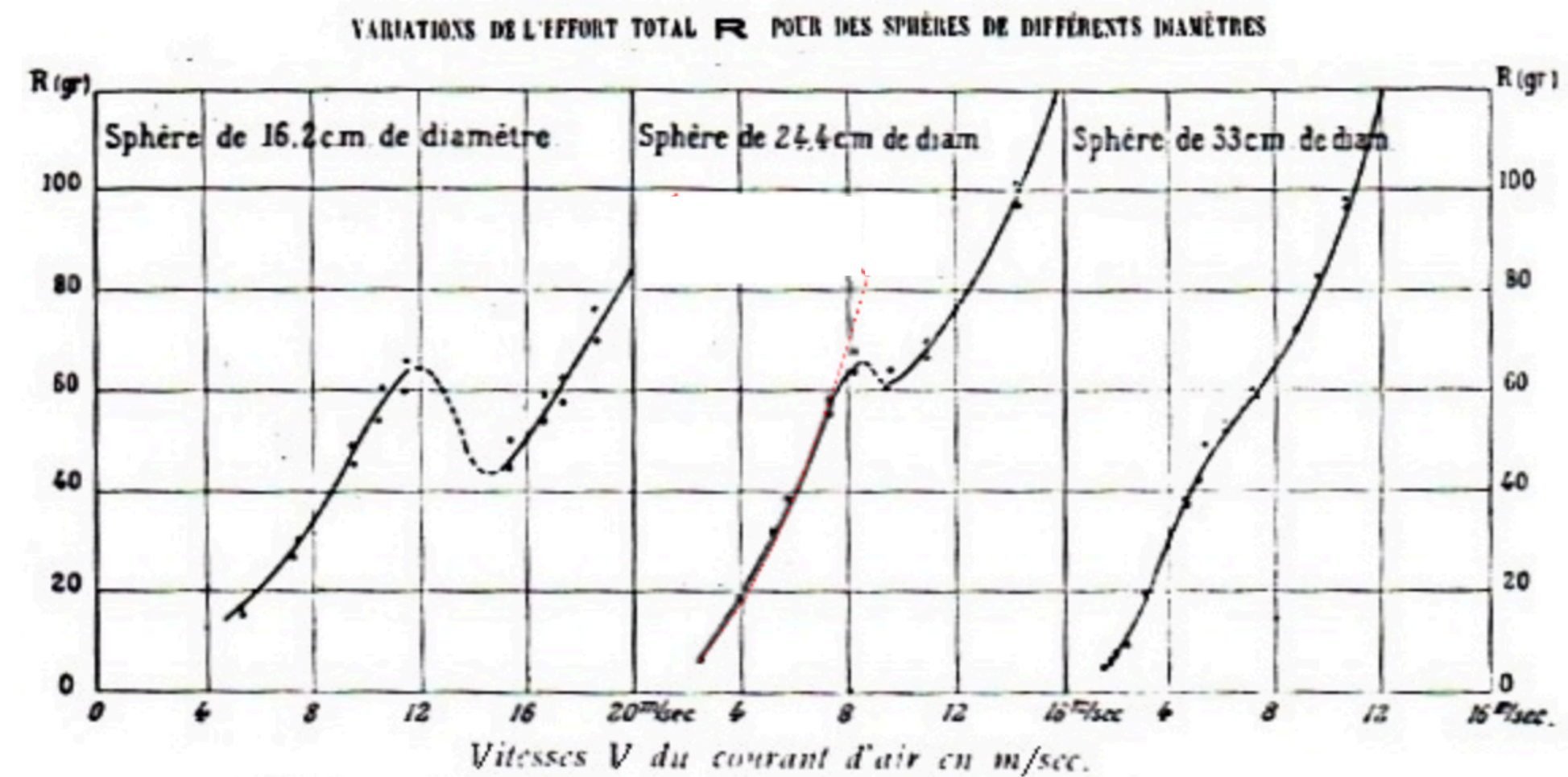


Fig. 57. — Résistance totale R des sphères en fonction de la vitesse.

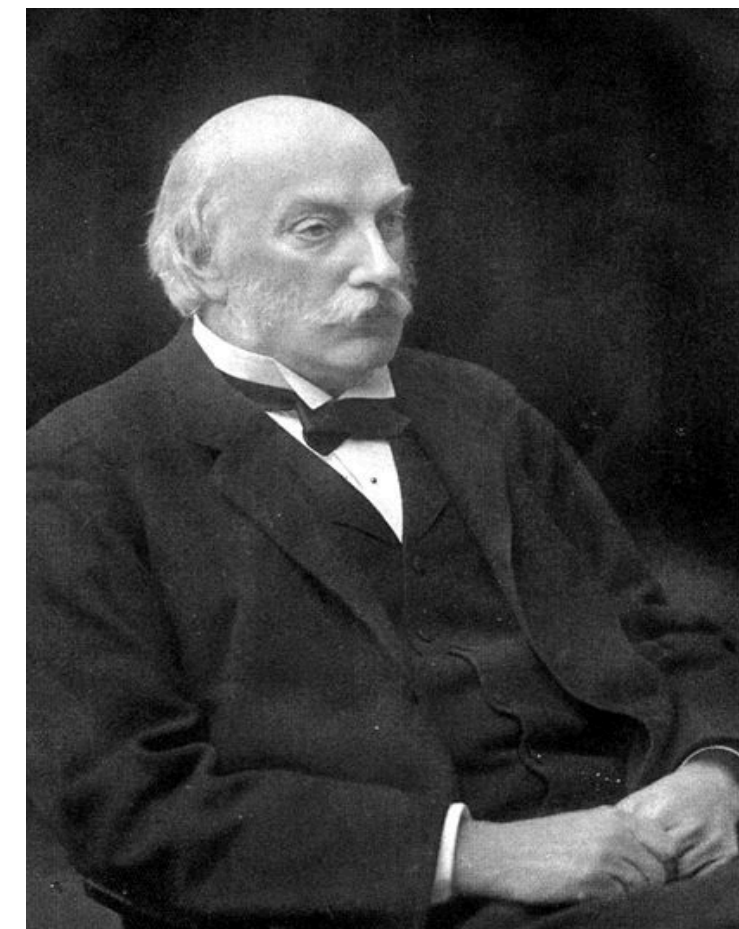
Note du 30 décembre 1912 présentée par Gustave Eiffel à l'Académie des Sciences :
« Le principal laboratoire aérodynamique allemand, celui de Göttingen, a attribué à ce coefficient une valeur deux fois et demie plus forte. Il a, du reste, publié que celui que j'avais donné moi-même était une erreur manifeste de ma part et ne pouvait qu'être le résultat d'une faute de calcul. »

« Nous ferons remarquer que le capitaine Costanzi, de la Brigada Specialisti, à Rome, a constaté la même diminution brusque de $K [C_x]$ avec des sphères immergées dans l'eau »

Eiffel en 1914 : « Lord Rayleigh, l'éminent directeur du National Physical Laboratory, a adressé une note à l'Académie des Sciences le 13 janvier 1913 dans laquelle il a fait remarquer que les produits U_c de la vitesse critique par le diamètre de la sphère sont à peu près constants. »

Cette remarque de Rayleigh est sans doute la première application du concept de nombre de Reynolds...

La crise de traînée est souvent dénommée
« *Eiffel paradox* » dans les pays anglophones.



John William Strutt
Lord Rayleigh
(1842-1919)

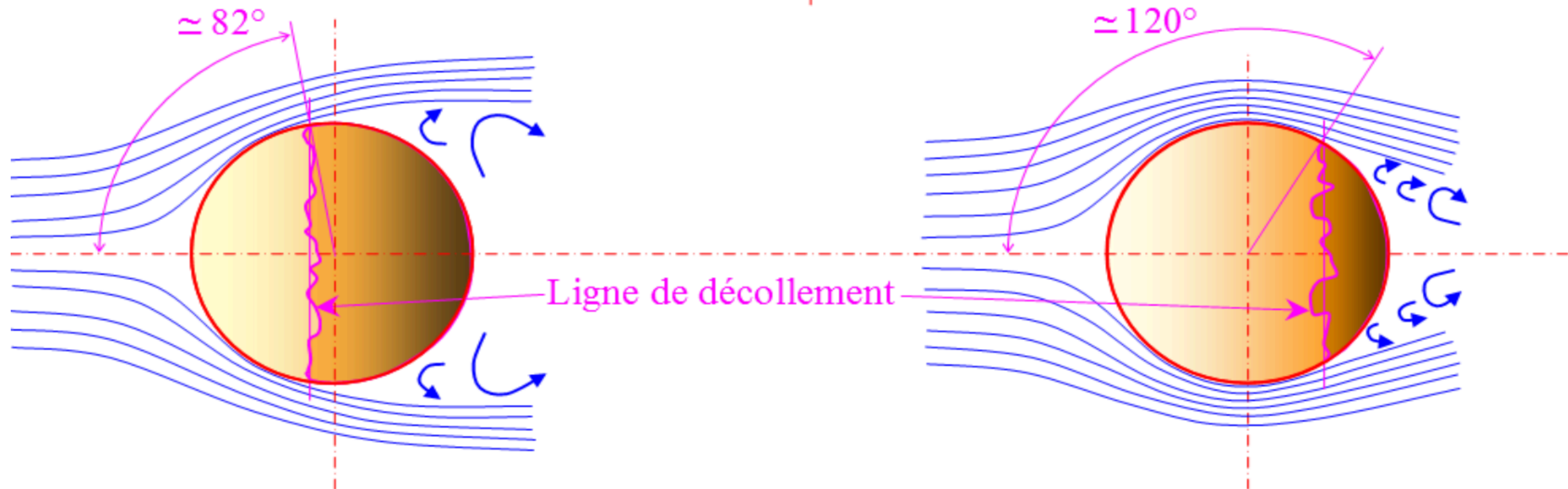
physicien anglais
prix Nobel de physique 1904

La crise de traînée

Cette brusque diminution du coefficient de traînée et donc de la force de traînée, appelée “crise de traînée” est due à un changement du champ de vitesse autour de la sphère. La *couche limite* (*boundary layer* en anglais), très mince zone proche de la sphère de transition entre la vitesse sur la sphère et la vitesse loin de la sphère, se modifie pour passer d’un régime laminaire à un régime turbulent et décolle plus en aval : le sillage en aval de la sphère est alors plus étroit, ce qui entraîne une réduction de force de traînée.

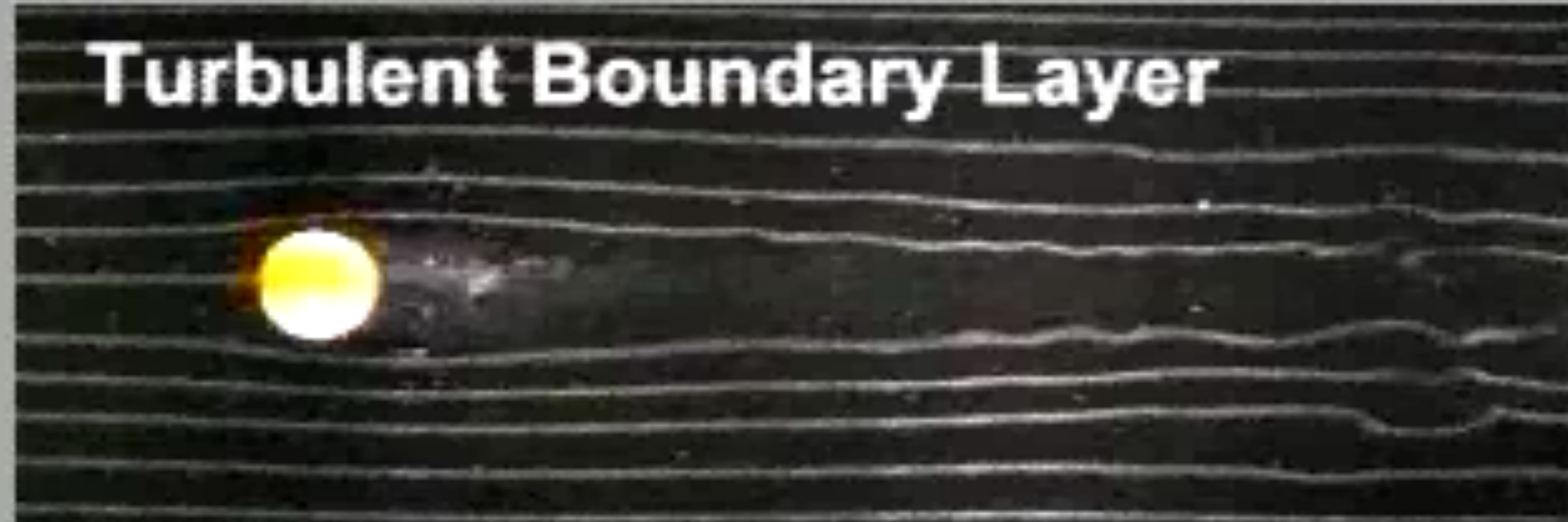
$$Re \approx 2 \times 10^5$$

$$Re \approx 3 \times 10^5$$



La crise de traînée

$Re \approx 3 \times 10^5$

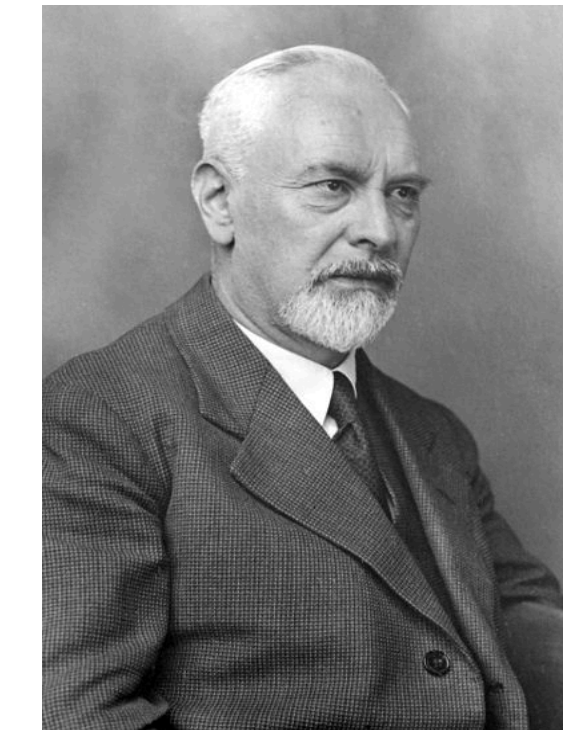


$Re \approx 2 \times 10^5$

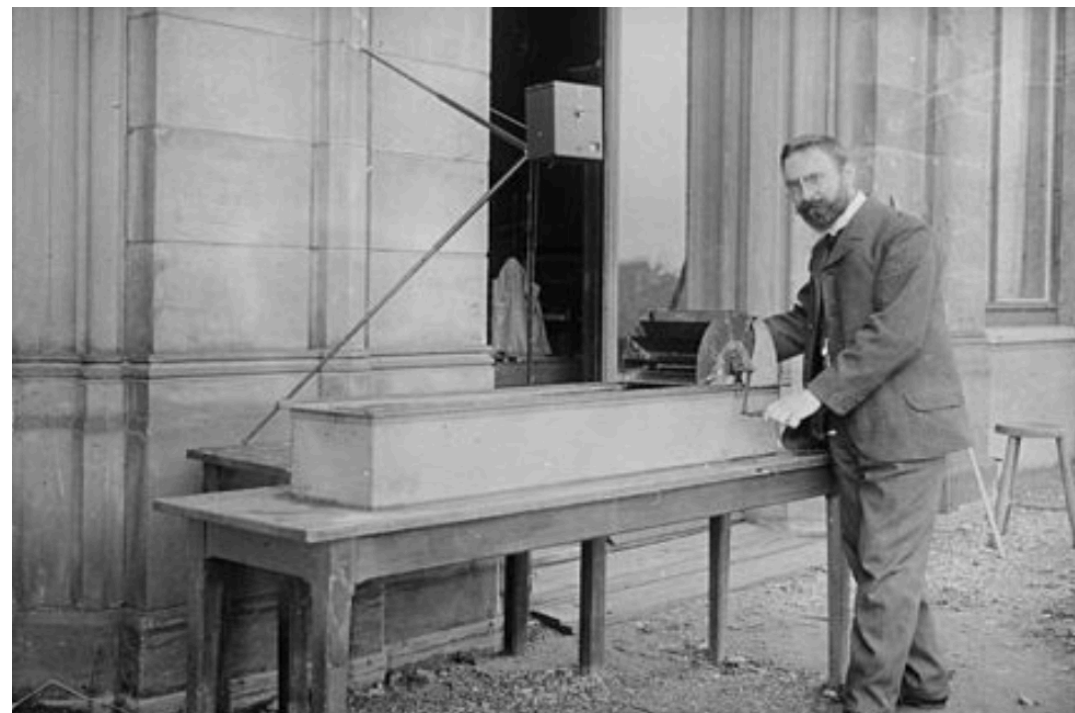


Le concept de *couche limite* fut présenté par **Ludwig Prandtl** en août 1904 à l'occasion du 3e congrès international des mathématiciens d'Heidelberg.

A partir des équations complètes de Navier-Stokes, il propose des équations simplifiées pour la couche limite, appelées maintenant *équations de Prandtl*, en utilisant des approximations pertinentes pour négliger certains termes des équations de Navier-Stokes

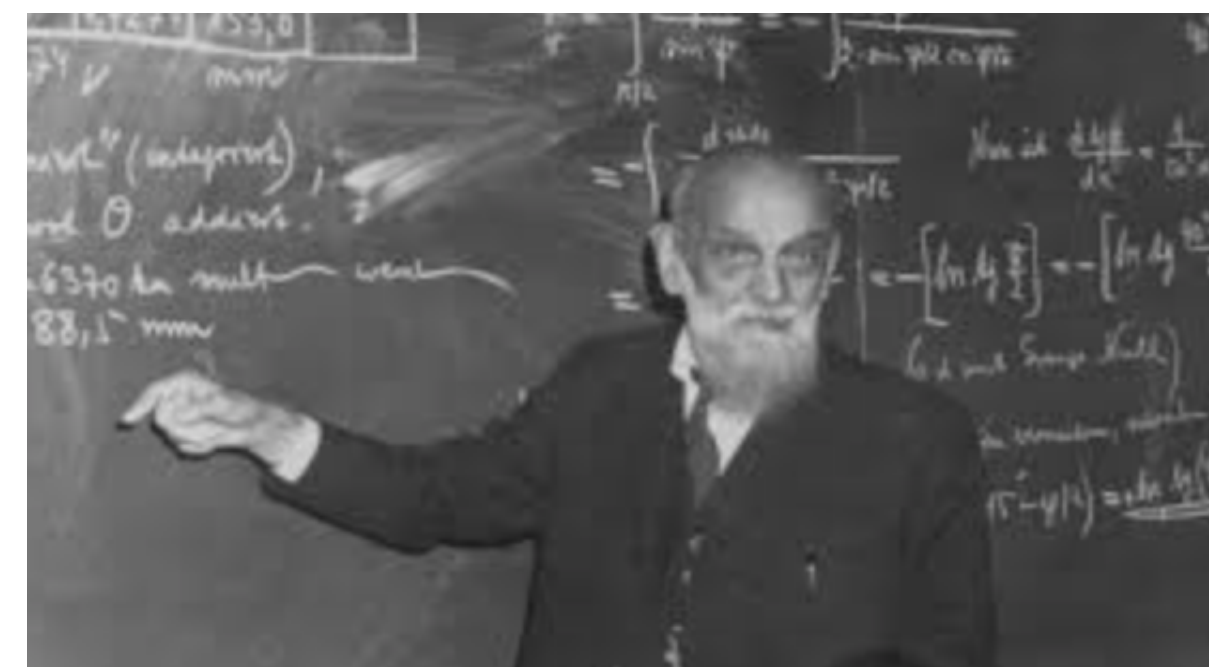


Ludwig Prandtl
Ingénieur et physicien
allemand (1875-1953)



Ludwig Prandtl en 1904 devant son canal hydraulique de visualisation d'écoulements

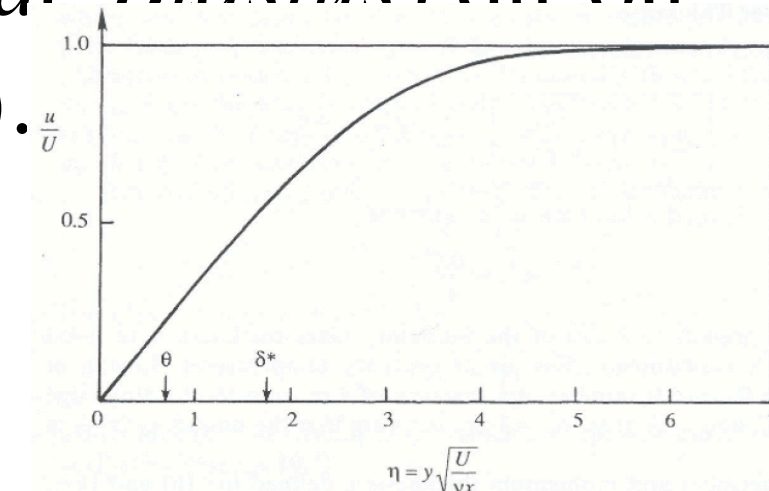
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e(x) \frac{\partial U_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



Heinrich Blasius
Ingénieur et professeur
allemand (1883-1970)

Heinrich Blasius, un des premiers élèves de Prandtl, propose en 1908 un mode de calcul de la couche limite laminaire aboutissant à une équation différentielle (*équation de Blasius*) qu'on peut résoudre numérique pour trouver le profil de vitesse (*profil de Blasius*).

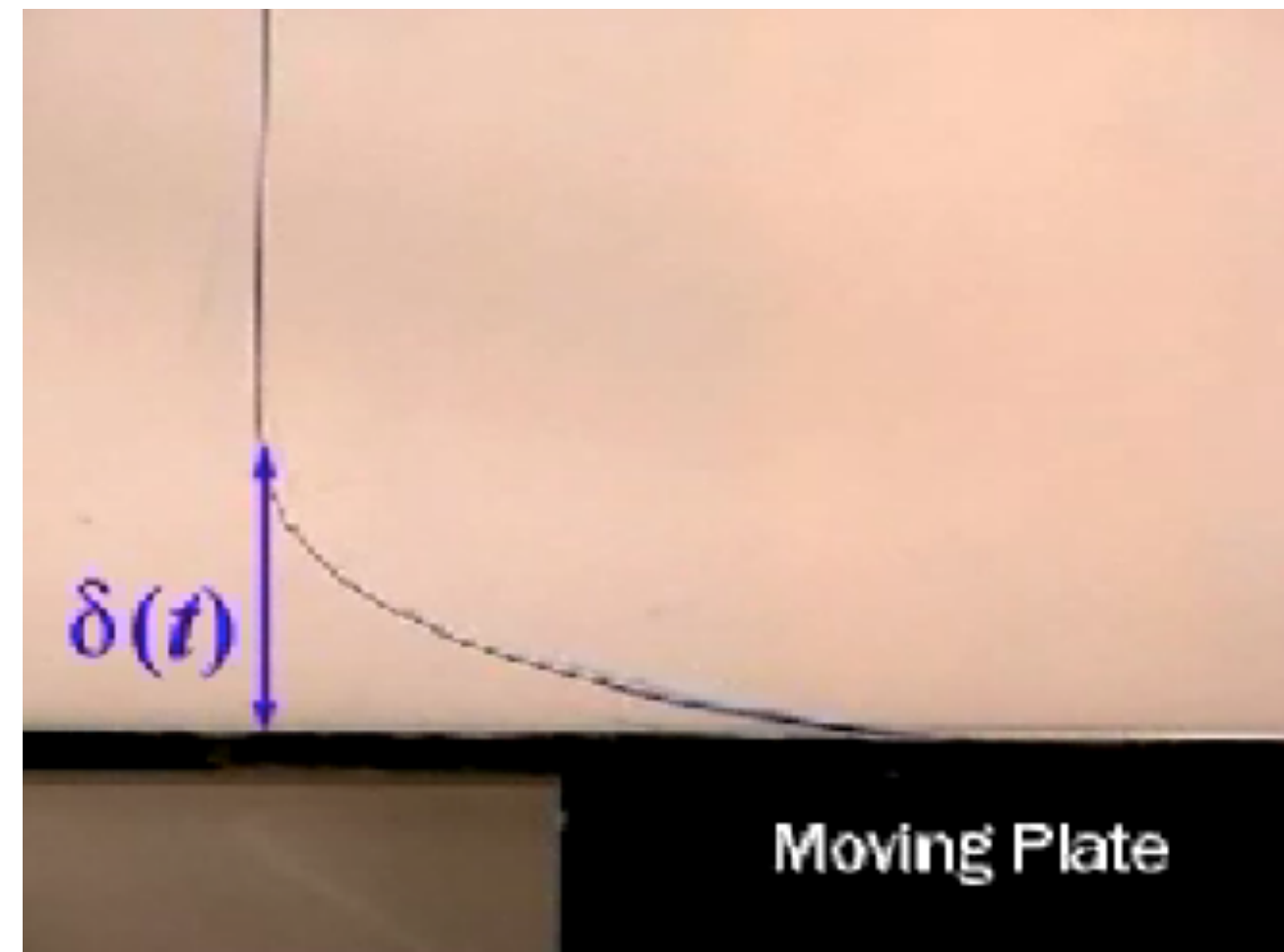
$$2F''' + F''F = 0$$



En 1912, L. Prandtl explique la crise de traînée de la sphère quantifiée par G. Eiffel en l'attribuant à la transition de la couche limite depuis un état laminaire jusqu'à un état turbulent.

Nous avons abordé la notion de couche limite dans plusieurs configurations

Écoulement de démarrage au voisinage d'une plaque plane

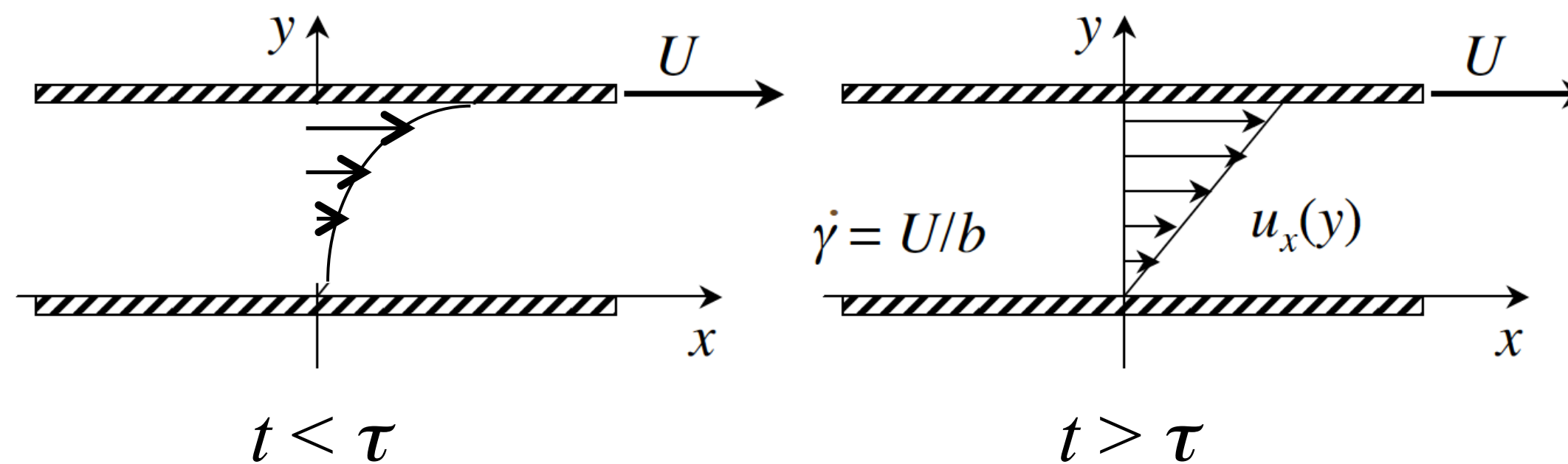


$$\delta = (\nu t)^{1/2}$$

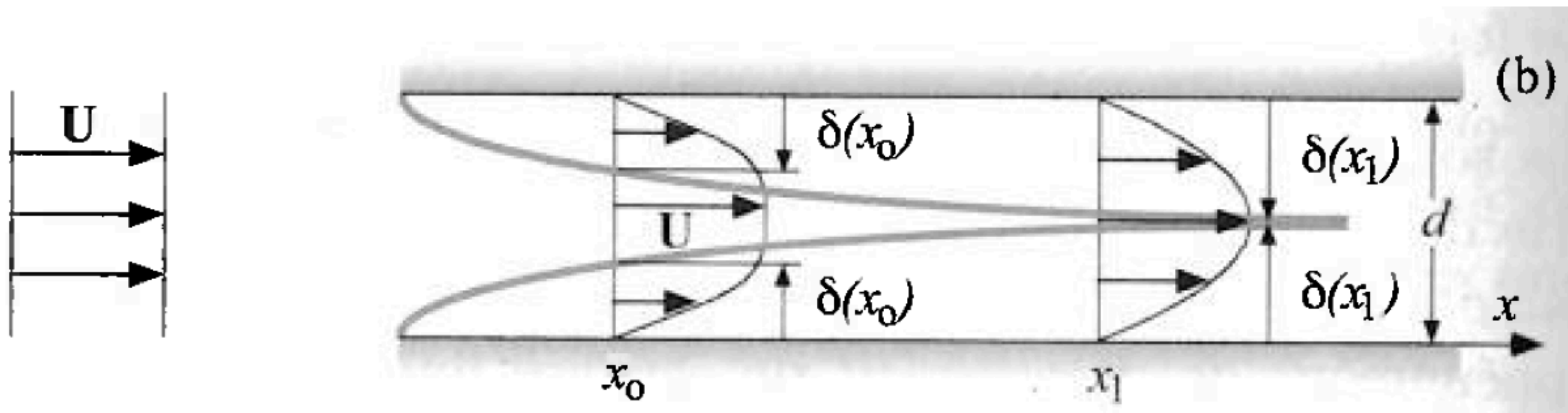
épaisseur de couche limite

Temps d'établissement de l'écoulement de Couette entre deux plans

$$\tau = \frac{b^2}{\nu}$$



Longueur d'établissement de l'écoulement à l'entrée d'une conduite



diffusion visqueuse et advection

$$\delta = (\nu t)^{1/2}$$

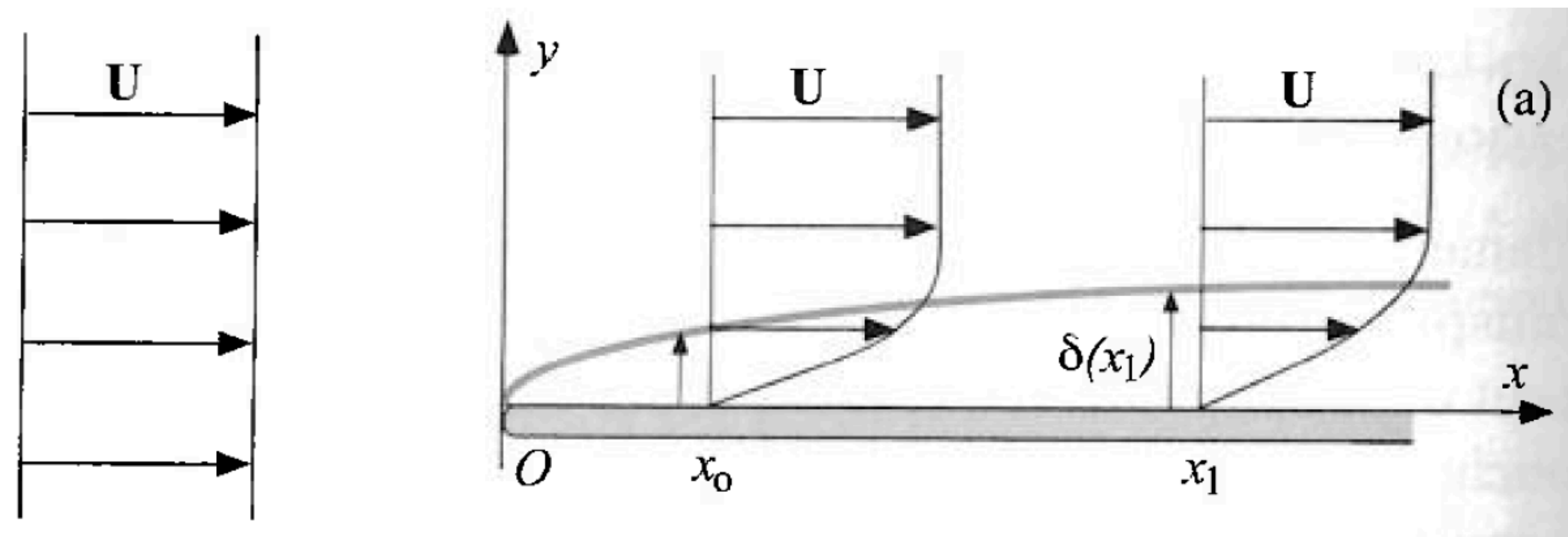
$$x = Ut$$

$$\delta = \left(\frac{\nu x}{U} \right)^{1/2}$$

Écoulement établi à $x = L_e$ où $\delta = b/2$:

$$L_e = \frac{b^2}{4\nu} U = \frac{\text{Re}}{4} b$$

Écoulement stationnaire à l'abord d'une plaque plane



diffusion visqueuse et advection

$$\delta = (\nu t)^{1/2}$$

$$x = Ut$$

$$\delta = \left(\frac{\nu x}{U} \right)^{1/2}$$

Ici encore, la couche limite croît comme $x^{1/2}$

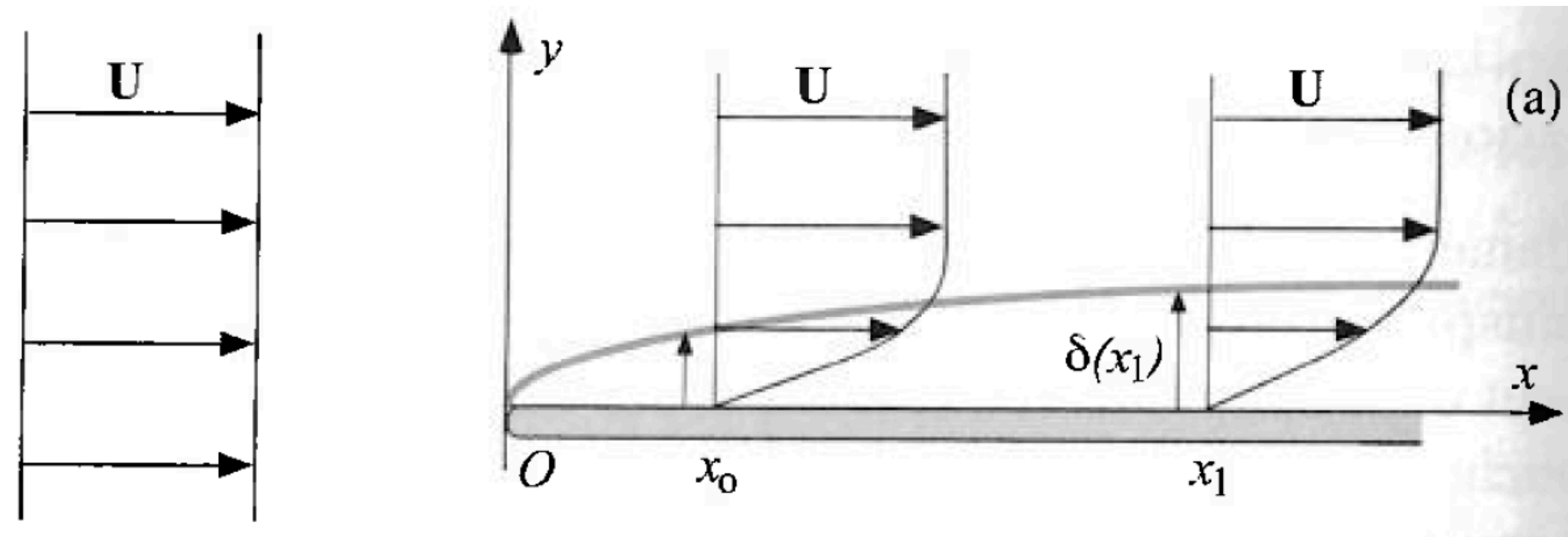
Cette couche limite est d'autant plus fine que U est grand et ν faible

$$\frac{\delta(x)}{x} = \left(\frac{\nu}{Ux} \right)^{1/2} = \frac{1}{\text{Re}_x^{1/2}} \ll 1$$

Lorsque Re_x est grand, l'épaisseur de la couche limite est faible devant la longueur L de la plaque. Cette particularité, va permettre de simplifier les équations de NS, en aboutissant à l'équation de Prandtl pour trouver le profil de vitesse caractéristique de la couche limite (profil de Blasius)

Considérons un écoulement 2C2D stationnaire $\mathbf{u} \begin{cases} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{cases}$

caractérisé par une vitesse typique U suivant x en amont d'une plaque plane suivant x



On a vu que

$$\frac{\delta(x)}{x} = \left(\frac{\nu}{Ux} \right)^{1/2} = \frac{1}{\text{Re}_x^{1/2}}$$

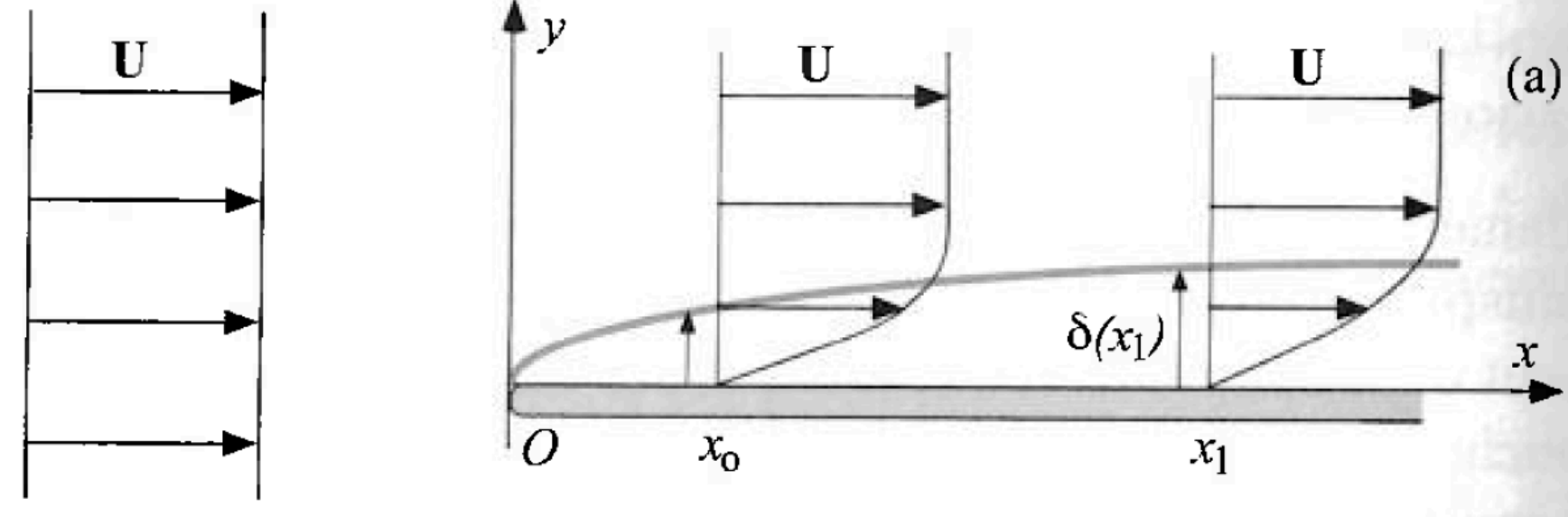
$$\delta(x) \ll x \text{ si } \text{Re}_x \gg 1$$

Il y donc dans cet écoulement 2 échelle de longueurs : x et $\delta(x)$
et par conséquent (par conservation de la masse) 2 échelles de vitesse :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

En ordre de grandeur $\frac{U}{x} \sim \frac{V}{\delta}$ d'où $V \sim \frac{\delta}{x} U \sim \frac{U}{\text{Re}_x^{1/2}} \ll U$

Equations de Prandtl



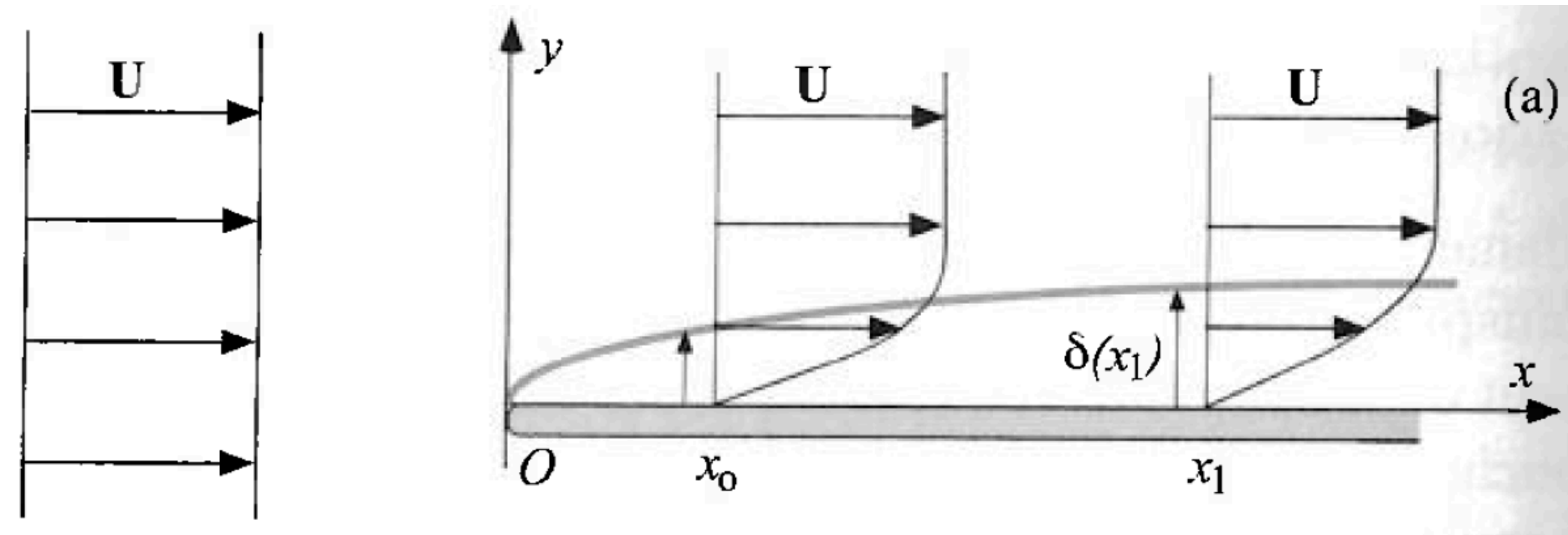
Les équations de Navier-Stokes s'écrivent pour un écoulement 2C2D stationnaire

$$\begin{cases} \rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

se simplifie alors dans la couche limite ($y < \delta$) :

$$\begin{cases} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad p(x,y) \end{cases}$$

La pression dans la couche limite est la même que dans l'écoulement extérieur. A noter qu'on comprend donc ici pourquoi le tube de Pitot fonctionne pour les fluides non parfaits



A l'intérieur de la couche limite, le terme visqueux domine, tandis qu'à l'extérieur de la couche limite, ce sont les termes inertiels qui dominent.

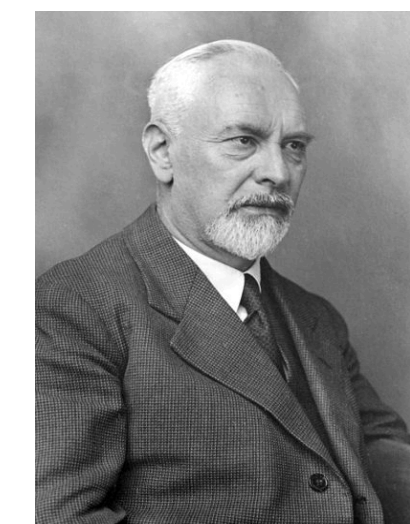
A l'extérieur de la couche limite, l'écoulement peut donc être considéré comme celui d'un fluide parfait satisfaisant à la relation de Bernoulli :

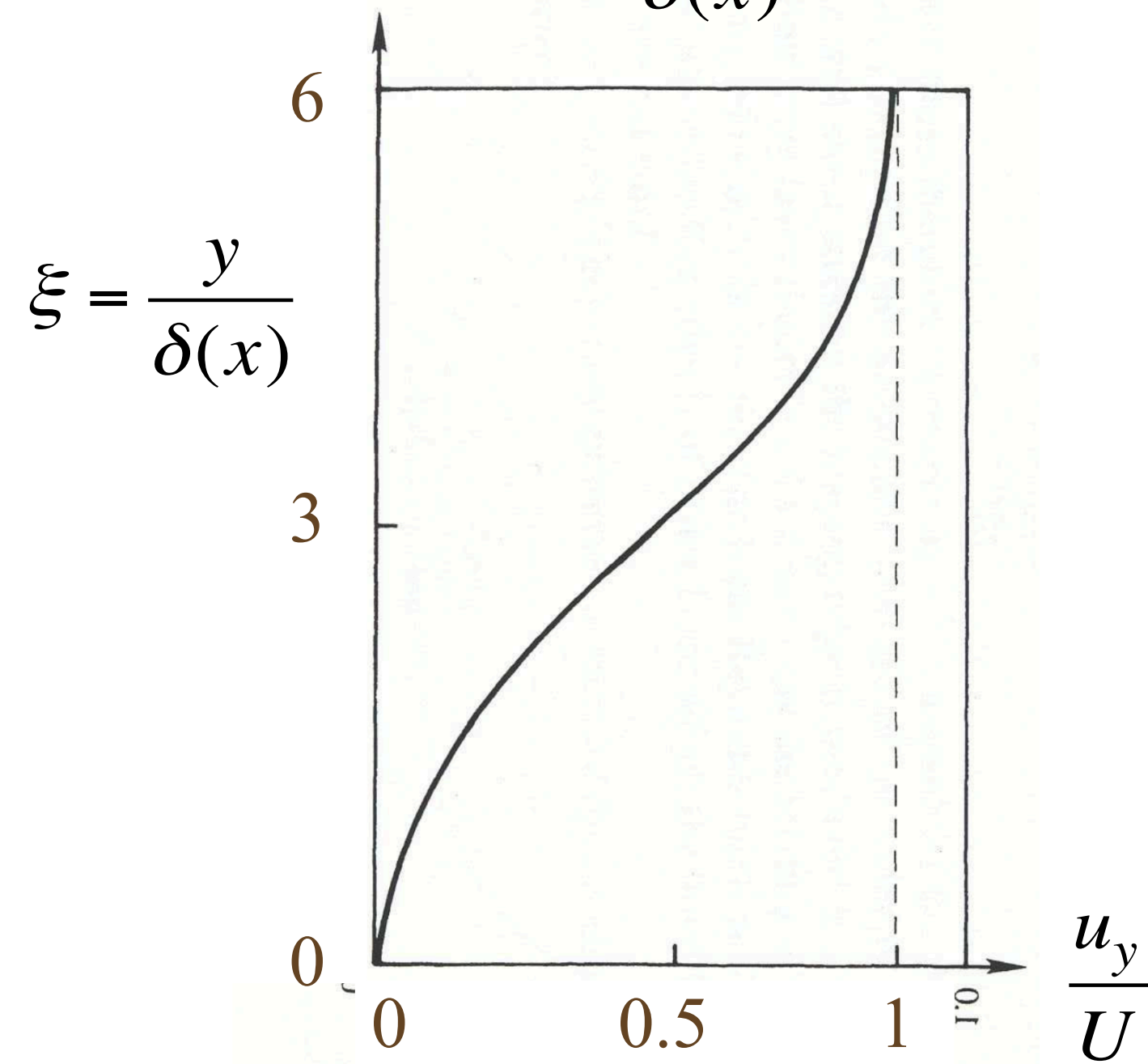
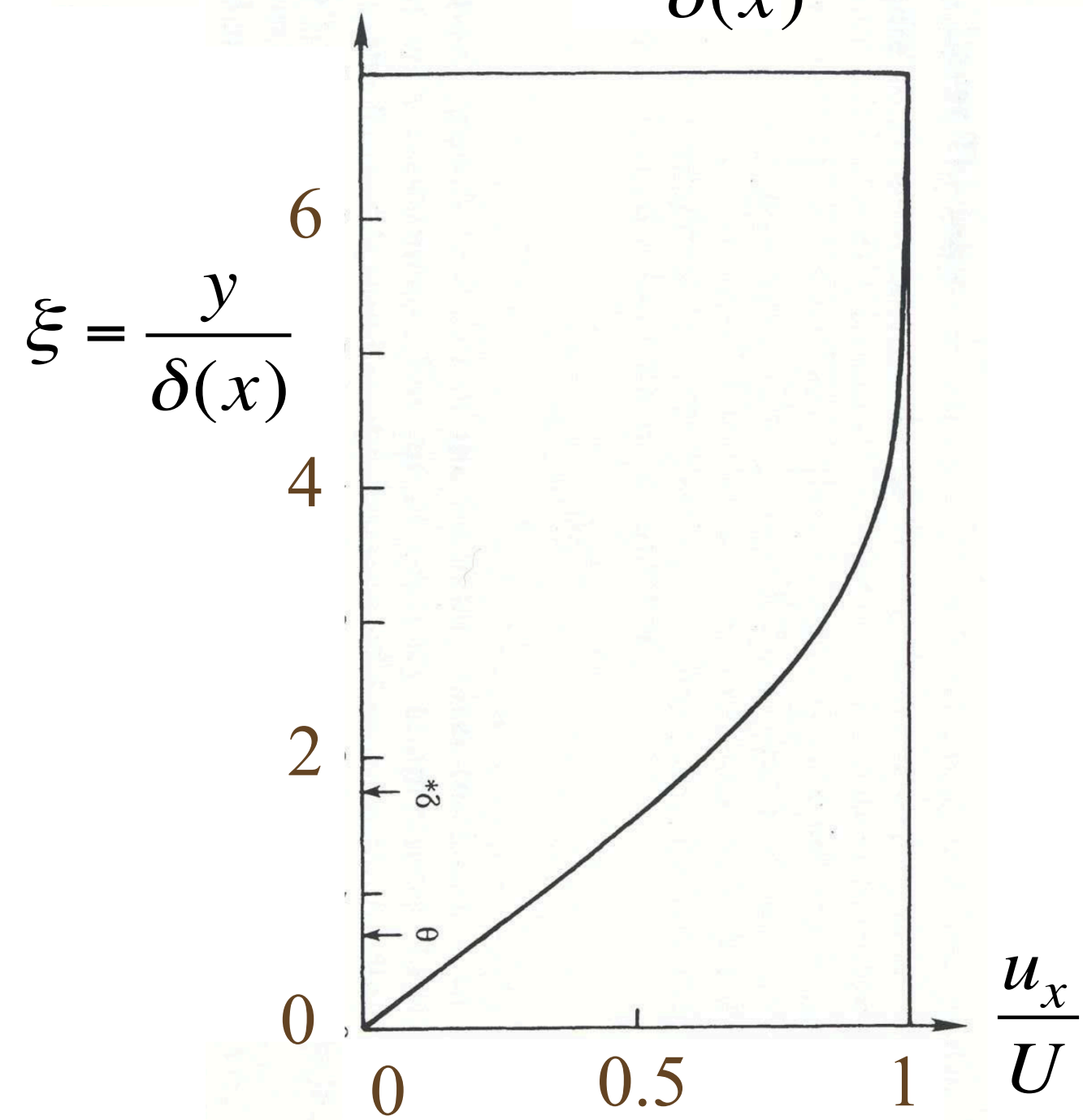
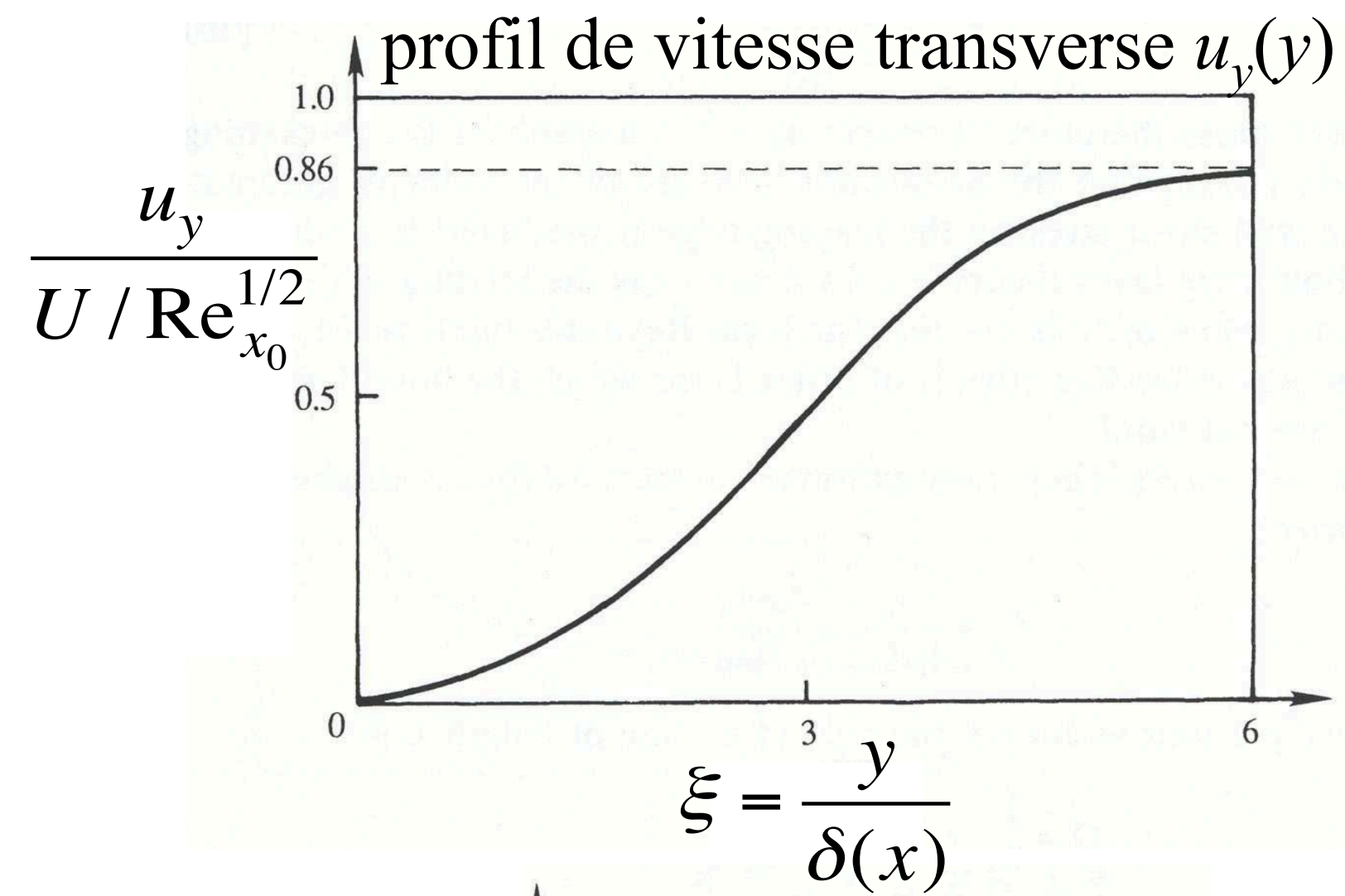
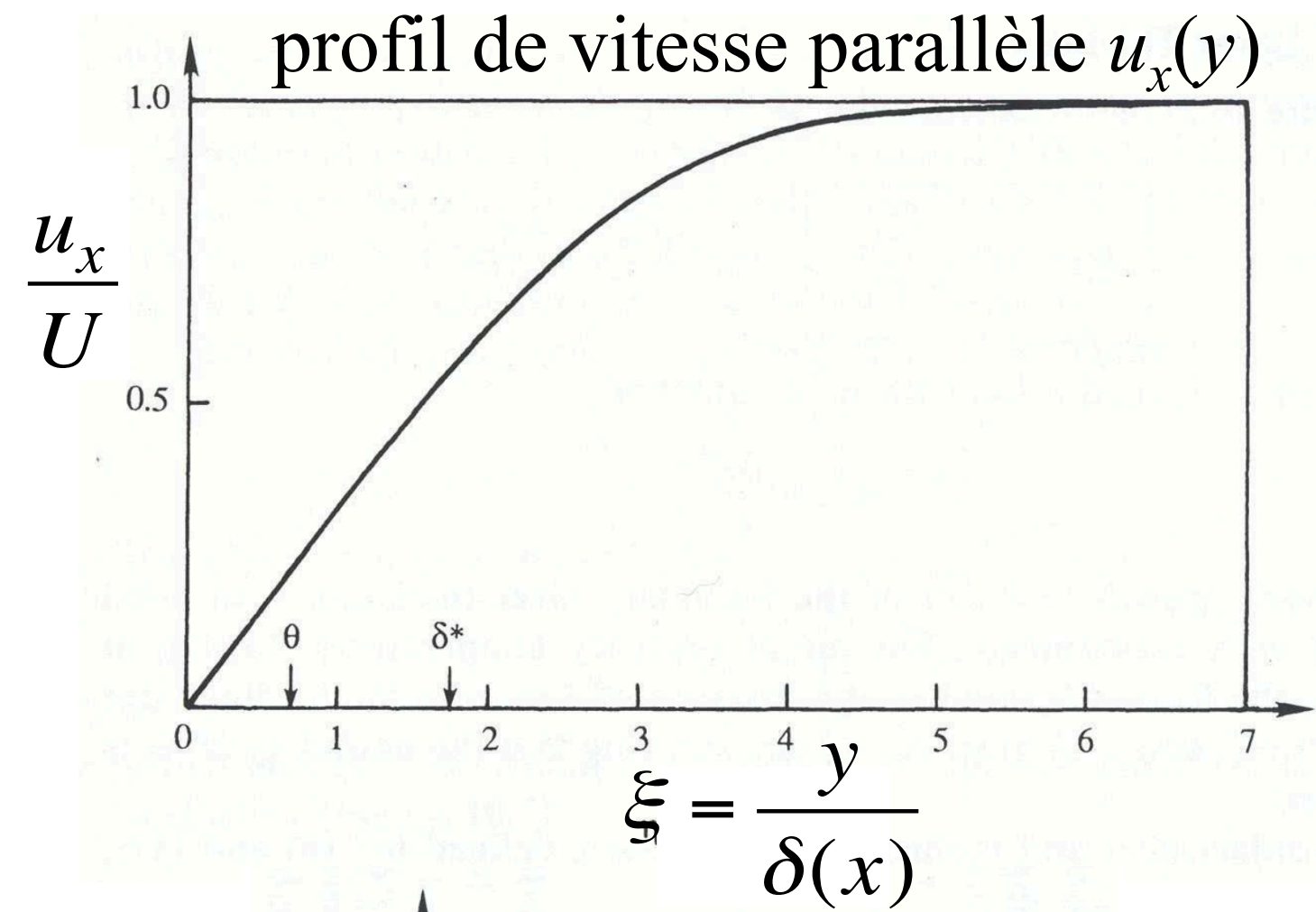
$$\frac{1}{2} \rho U_{ext}^2 + p = cte \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho U_{ext} \frac{\partial U_{ext}}{\partial x}$$

L'équation de Navier-Stokes suivant x s'écrit alors dans la couche limite :

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = U_{ext} \frac{\partial U_{ext}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

équation de Prandl (1904)





Aerodynamic forces on projectiles used in various sports F

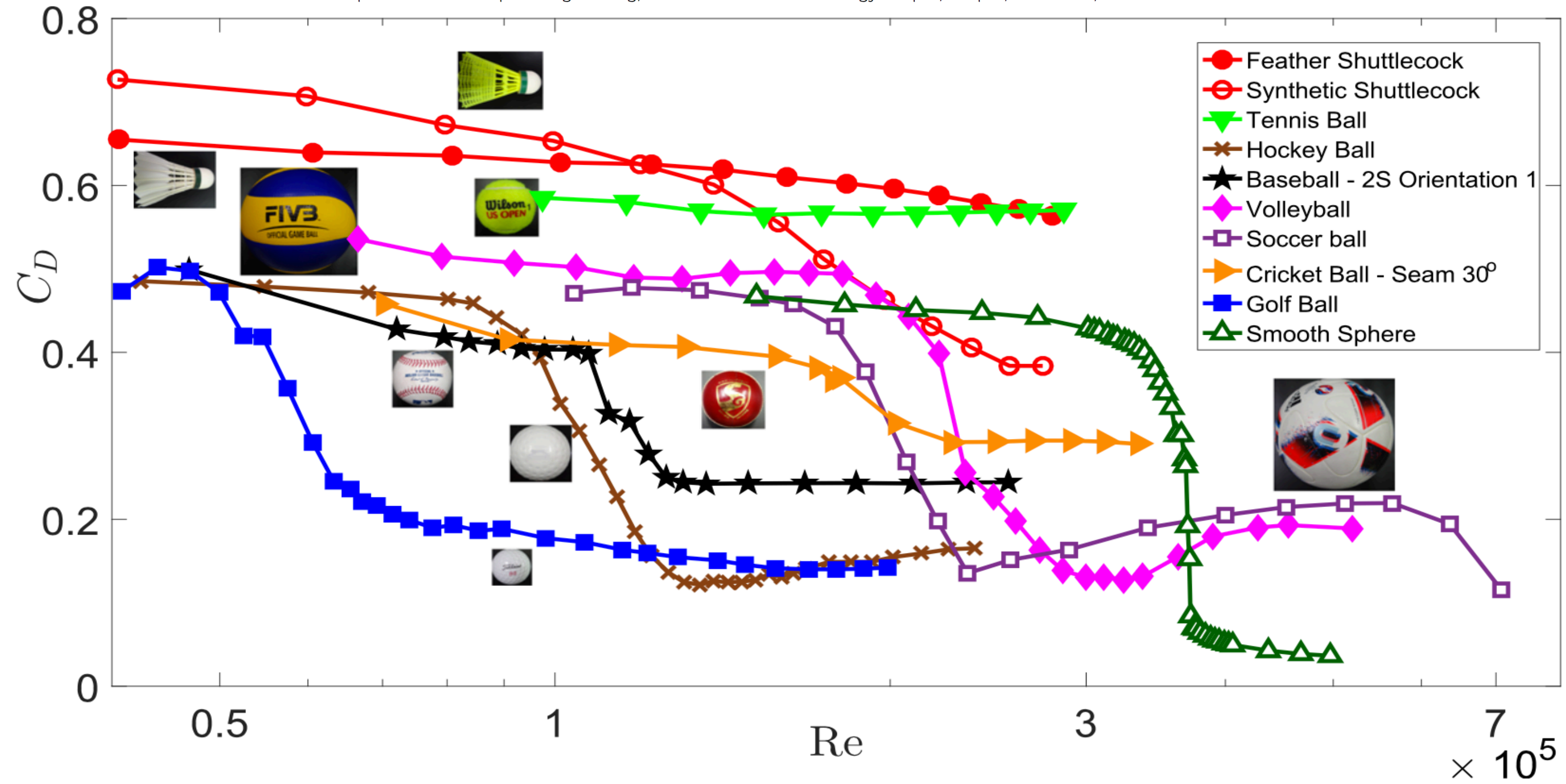
Cite as: Phys. Fluids 31, 015106 (2019); doi: 10.1063/1.5064700
Submitted: 7 October 2018 • Accepted: 24 December 2018 •
Published Online: 17 January 2019



Kunjai Shah, Ravi Shakya, and Sanjay Mittal^{a)}

AFFILIATIONS

Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Technology Kanpur, Kanpur, UP 208016, India



Pour en savoir plus sur

- Ecoulements de fluides non-newtoniens
- Ecoulements de fluides compressibles
- Instabilités d'écoulements
- Turbulence

à suivre en

- M1 Mécanique des Fluides
- M2 Dynamique des Fluides et Energétique