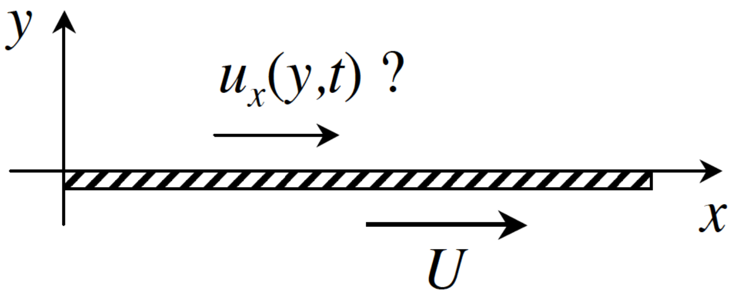
Solutions instationnaires

Mise en mouvement d'une plaque



Hyp :
- fluide en $y > 0$ au repos à $t < 0$
- plaque plane en $y = 0$ immobile ($U = 0$) à $t < 0$ puis mobile ($U = \text{cte} \neq 0$) à $t \geq 0$
- écoulement 2D (x,y)

Question : quel est l'écoulement à $t > 0$?

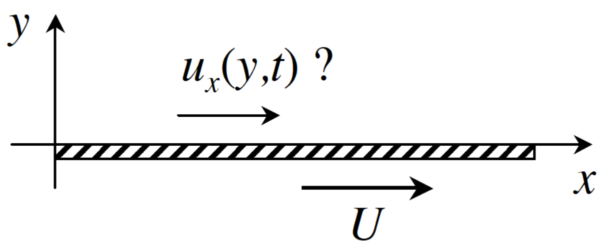
Compte-tenu de la géométrie, cherchons une solution possible d'écoulement parallèle instationnaire de la forme

$$\mathbf{u}\begin{cases} u_x(y,t) \\ u_y = 0 \end{cases}$$

L'écoulement est ici induit par le mouvement de la plaque, pas par la gravité ni par un gradient de pression

L'équation de Navier-Stokes suivant x

$$\rho\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}} + \eta\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \cancel{\rho g_x}$$



se réduit à

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \qquad (1)$$

où $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$ est le coefficient de **viscosité cinématique** (en m^2/s)

Avant de résoudre cette équation, on peut estimer l'ordre de grandeur de chacun des termes

$$\frac{U}{t} = \nu\frac{U}{\delta^2}$$

où δ est l'épaisseur caractéristique sur laquelle varie la vitesse, appelée **couche limite**

On en déduit que $\delta^2 = \nu t$

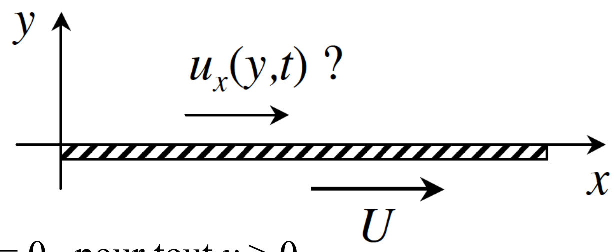
$$\delta = (\nu t)^{1/2}$$

Dans ce problème instationnaire, on s'attend donc à ce que l'épaisseur de couche limite augmente en temps et soit plus importante pour un fluide de viscosité cinématique plus forte

	eau	air
ρ (kg/m^3)	1000	1,29
η (Pa.s)	10^{-3}	1,85 10^{-5}
ν (m^2/s)	10^{-6}	1,4 10^{-5}

Résolvons maintenant l'équation

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \qquad (1)$$



avec C.I. : $u_x(y,t{=}0) = 0$ pour tout $y > 0$

C.L. : $u_x(y=0,\, t) = U$ pour tout $t > 0$

$u_x(y{=}{+}\infty, t) = 0$ pour tout $t > 0$

Cette équation est identique à l'équation de diffusion de la chaleur $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \kappa \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

L'éq. (1) est invariante par transformation $y \to \alpha y$, $t \to \alpha^2 t$

On peut donc chercher une solution $u_x = f(\xi)$ avec $\xi = y/(\nu t)^{1/2}$

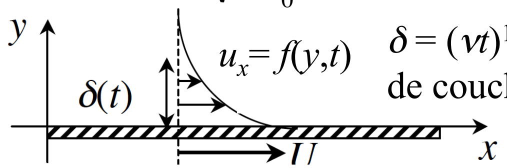
L'éq. (1) s'écrit alors

$$f''(\xi) + \frac{1}{2}\xi f'(\xi) = 0$$

avec CL : $f(0)=U$

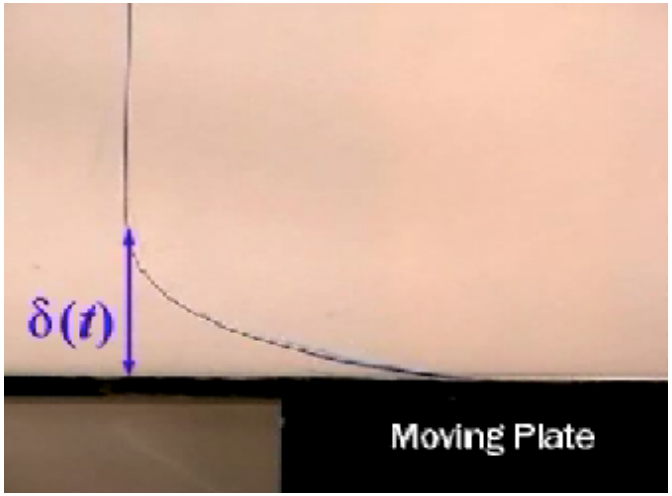
$f(+\infty) = 0$

La solution est $\boxed{u_x(\xi) = U\left[1 - \mathrm{erf}(\xi/2)\right]}$ avec $\mathrm{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-y^2}\, dy$



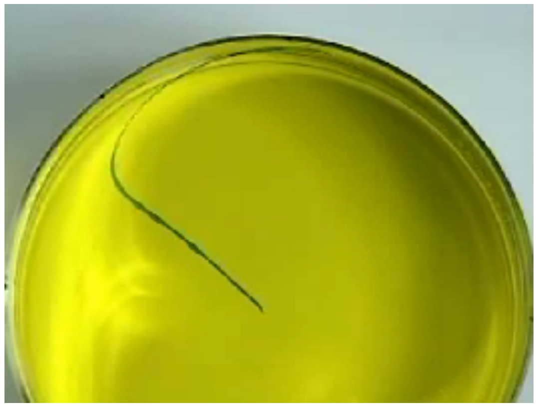
$\delta = (\nu t)^{1/2}$ épaisseur de couche limite

Démarrage d'une plaque plane



$\delta = (\nu t)^{1/2}$
épaisseur de couche limite

Spin-up

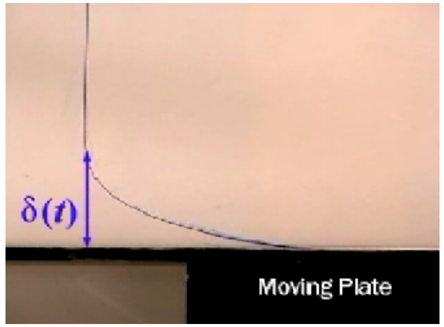


$\nu = 10$ cSt

$\nu = 100$ cSt

$\nu = 10\,000$ cSt

Quelle est la contrainte tangentielle sur la plaque ?



$$\sigma_{xy}\Big|_{y=0} = \eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}$$

Avant de la calculer précisément, on peut rapidement estimer son ordre de grandeur :

$$\sigma_{xy}\Big|_{y=0} \sim \eta\frac{U}{\delta}$$

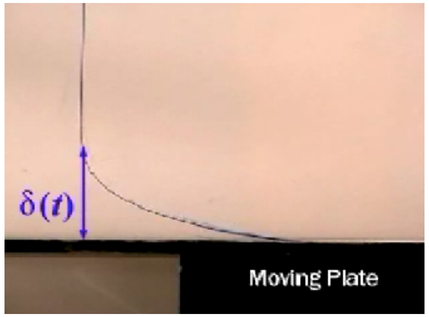
avec $\delta = (\nu t)^{1/2}$ épaisseur de couche limite

$$\sigma_{xy}\Big|_{y=0} \sim \eta\frac{U}{(\nu t)^{1/2}}$$

$$\sigma_{xy}\Big|_{y=0} \sim \rho^{1/2}\eta^{1/2}Ut^{-1/2}$$

Cette contrainte décroît au cours du temps

La contrainte tangentielle sur la plaque est précisément



$$\sigma_{xy}\Big|_{y=0} = \eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}$$

$$\sigma_{xy}\Big|_{y=0} = \eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_{y=0}$$ avec $$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{(\nu t)^{1/2}}$$

$$\sigma_{xy}\Big|_{y=0} = \eta\frac{1}{(\nu t)^{1/2}}\left(\frac{\partial u_x}{\partial \xi}\right)_{y=0}$$ avec $$\frac{\partial u_x}{\partial \xi} = -\frac{2U}{\sqrt{\pi}}e^{-\xi^2}$$

$$\sigma_{xy}\Big|_{y=0} = -\eta\frac{1}{(\nu t)^{1/2}}\frac{2U}{\sqrt{\pi}}$$

$$\sigma_{xy}\Big|_{y=0} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\rho^{1/2}\eta^{1/2}Ut^{-1/2}$$

Cette contrainte décroît au cours du temps

ECOULEMENTS A TRES FAIBLE NOMBRE DE REYNOLDS

REGIME DE STOKES

$$\boxed{0 = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u}}$$

équation de Stokes

Propriétés de l'équation de Stokes (linéaire) et conséquences :
- unicité de solution
- réversibilité hydrodynamique
- symétrie de l'écoulement autour de corps symétriques
- modes de propulsion

Navier - Stokes :

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} = \cancel{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}}$$

If $\mathcal{R} \ll 1$:

Time doesn't matter. The pattern of motion is the same, whether slow or fast, whether forward or backward in time.

The Scallop Theorem

Figure 6


THE NATIONAL COMMITTEE
FOR
FLUID MECHANICS FILMS
under a grant from the
National Science Foundation
presents

Mélange

Re >> 1

Re << 1

café, thé

peinture