

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Notion de milieu continu</b>	<b>9</b>
2.1	Qu'est ce qu'un fluide ? . . . . .	9
2.2	Notion d'échelle mésoscopique . . . . .	10
2.3	Notion de « particule fluide » . . . . .	10
2.4	Vitesse d'une particule fluide . . . . .	11
2.4.1	Quelques techniques de mesure de vitesse (vélocimétrie) . . . . .	11
2.4.2	Quelques exemples de champ de vitesse : . . . . .	11
2.5	Trajectoire de particules, ligne d'émission, ligne de courant et lignes de temps . . . . .	11
2.5.1	Trajectoire de particule ( <i>particle path</i> ) . . . . .	12
2.5.2	Ligne d'émission ( <i>streakline</i> ) . . . . .	12
2.5.3	Ligne de courant ( <i>streamline</i> ) . . . . .	12
2.5.4	Ligne de temps ( <i>timeline</i> ) . . . . .	13
2.5.5	Changement de référentiel . . . . .	13
2.6	Fonction de courant . . . . .	14
2.6.1	Ecoulement plan incompressible en coordonnées cartésiennes ou polaire plane	14
2.6.2	Ecoulement axisymétrique - Fonction de Stokes - . . . . .	14
2.7	Dérivée eulérienne et dérivée lagrangienne . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Analyse dimensionnelle et similitude</b>	<b>17</b>
3.1	Théorème $\pi$ ou de Buckingham . . . . .	17
3.2	Exemple de la traînée d'une sphère . . . . .	19
3.3	Période des oscillations d'un pendule pesant . . . . .	22
3.4	"Démonstration" du théorème de Pythagore . . . . .	22
3.5	Questions et remarques . . . . .	23
3.6	Notion de similitude . . . . .	23
3.6.1	Similitude pour une maquette de navire . . . . .	23
3.6.2	Pourquoi les enfants marchent-ils facilement pieds-nus sur les gravillons ? . . . . .	23
3.6.3	Pourquoi un animal de 50 m de haut ne peut-il exister sur Terre ? . . . . .	23
3.6.4	Pourquoi les animaux sautent-ils tous à peu près à la même hauteur ? . . . . .	24
3.6.5	Pourquoi les sociétés de fourmis n'ont-elles pas inventé le feu ? . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Le théorème du transport</b>	<b>27</b>
4.1	Notion de volume de contrôle . . . . .	27
4.2	Théorème de Leibnitz . . . . .	27

4.3	Théorème du transport d'une fonction scalaire . . . . .	28
4.4	Conservation de la masse . . . . .	28
4.4.1	Démonstration . . . . .	29
4.4.2	Cas particulier d'un fluide incompressible. . . . .	29
4.5	Théorème du transport d'une fonction vectorielle . . . . .	29
4.6	Application au transport de la quantité de mouvement . . . . .	30
4.7	Application au sillage d'un cylindre . . . . .	31
4.8	Transport de l'énergie . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Le tenseur des contraintes</b>	<b>35</b>
5.1	Notion de tenseur cartésien de rang 2 . . . . .	35
5.2	Le tenseur des contraintes $[\sigma]$ ( <i>stress tensor</i> ) . . . . .	36
5.3	Symétries du tenseur des contraintes . . . . .	37
5.4	Calcul de la contrainte dans une direction quelconque $\vec{\sigma}(\vec{n})$ . . . . .	37
5.5	Le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$ . . . . .	37
5.6	Principe fondamental de la dynamique et divergence de $[\sigma']$ . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Hydrostatique</b>	<b>41</b>
6.1	Equilibre de la pression dans le champ de pesanteur . . . . .	42
6.1.1	Cas d'un fluide de masse volumique constante . . . . .	43
6.1.2	Cas d'un fluide de masse volumique variable . . . . .	45
6.1.3	Cas d'une atmosphère adiabatique . . . . .	46
6.2	Equilibre de la pression dans un référentiel non galiléen . . . . .	47
6.3	La poussée d'Archimède . . . . .	47
6.3.1	Le poisson et le ludion . . . . .	48
6.4	Equilibre des corps flottants . . . . .	49
6.4.1	Centre de carène . . . . .	49
6.4.2	Notion de métacentre . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Fluides parfaits et équation d'Euler</b>	<b>53</b>
7.1	Equation de Bernoulli . . . . .	54
7.2	Généralisation de l'équation de Bernoulli . . . . .	55
7.2.1	Cas d'un fluide barotrope . . . . .	55
7.2.2	Cas d'un écoulement instationnaire mais irrotationnel . . . . .	56
7.2.3	Effet Coanda . . . . .	56
7.3	Quelques applications de l'équation de Bernoulli . . . . .	57
7.3.1	Anémomètre à tube de Pitot . . . . .	57
7.3.2	Effet Venturi et débitmètre de Venturi . . . . .	58
7.3.3	Expérience de Torricelli . . . . .	59
7.3.4	Effet Magnus . . . . .	60
7.3.5	Portance d'une aile . . . . .	60
7.3.6	Amplification des vagues par le vent . . . . .	61
7.3.7	Jet incident sur une plaque . . . . .	61
7.4	Paradoxe de d'Alembert . . . . .	61

<b>8</b>	<b>La viscosité des fluides</b>	<b>63</b>
8.1	Tenseur des déformations $[\epsilon]$ ( <i>strain tensor</i> ) . . . . .	63
8.2	Tenseur des taux de déformation (rate of strain tensor) ou tenseur des gradients de vitesse $[G]$ . . . . .	64
8.2.1	Décomposition d'un tenseur . . . . .	64
8.2.2	Partie symétrique de $[G]$ ou tenseur $[e]$ des déformations pures . . . . .	65
8.2.3	Partie antisymétrique de $[G]$ ou tenseur $[\omega]$ des rotations pures . . . . .	66
8.3	Equation constitutive des fluides newtoniens . . . . .	67
8.4	Divergence du tenseur des contraintes visqueuses . . . . .	68
8.5	Equation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien . . . . .	68
8.6	Signification physique de la viscosité . . . . .	69
8.7	Mesure de la viscosité . . . . .	69
8.7.1	Quelques viscosimètres simples . . . . .	69
8.7.2	Quelques exemples de rhéomètre . . . . .	69
8.8	Quelques exemples de fluides non-newtoniens . . . . .	71
<b>9</b>	<b>L'équation de Navier-Stokes</b>	<b>75</b>
9.1	Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible . . . . .	75
9.1.1	Quelques valeurs de nombres de Reynolds . . . . .	76
9.1.2	Quelques autres nombres sans dimension . . . . .	77
9.2	Les conditions aux limites cinématiques et dynamiques . . . . .	78
9.2.1	Les conditions cinématiques . . . . .	78
9.2.2	Les conditions dynamiques . . . . .	80
9.2.3	Tableau récapitulatif des conditions aux limites . . . . .	82
<b>10</b>	<b>Solutions laminaires de l'équation de Navier-Stokes</b>	<b>85</b>
10.1	Les écoulements parallèles . . . . .	85
10.1.1	Écoulement de Couette plan . . . . .	86
10.1.2	Écoulement de Couette circulaire . . . . .	86
10.1.3	Écoulement de Poiseuille plan . . . . .	87
10.1.4	Écoulement sur un plan incliné . . . . .	87
10.1.5	Écoulement de Poiseuille en conduite circulaire . . . . .	87
10.1.6	Solutions instationnaires . . . . .	89
10.2	Les écoulements à très faibles nombre de Reynolds . . . . .	89
10.2.1	Equation de Stokes . . . . .	89
10.2.2	Écoulement autour d'une sphère : force de Stokes . . . . .	91
10.2.3	La sédimentation . . . . .	93
10.2.4	La réversibilité et la vie aux faibles nombres de Reynolds . . . . .	95
10.3	Les écoulements quasi-parallèles : les équations de la lubrification . . . . .	96
10.3.1	Calcul d'un palier lubrifié . . . . .	98
<b>11</b>	<b>La portance sur une aile</b>	<b>99</b>
11.0.2	Etude du décollement . . . . .	100
11.0.3	Utilisation de la polaire Eiffel . . . . .	102
11.0.4	Cas d'un voilier . . . . .	102
11.1	Nage et vol animal . . . . .	106

11.1.1	Les oiseaux . . . . .	106
11.1.2	Les poissons . . . . .	106
<b>12</b>	<b>La couche limite</b>	<b>109</b>
12.1	Introduction . . . . .	109
12.1.1	Définitions de l'épaisseur de couche limite . . . . .	109
12.2	Couche limite laminaire d'un fluide incompressible sur une plaque plane . . . . .	111
12.2.1	Les équations de Prandtl (1904) . . . . .	111
12.2.2	Profil de vitesse de Blasius (1907) . . . . .	112
12.2.3	Calcul de la contrainte pariétale et du coefficient de traînée . . . . .	113
12.3	Couche limite turbulente . . . . .	114
12.4	Couche limite sur une paroi courbée : décollement et contrôle de la couche limite . .	114
<b>13</b>	<b>Formulaire</b>	<b>117</b>
13.1	Opérateurs différentiels . . . . .	117
13.2	Conservation de la masse et équation de NAVIER–STOKES . . . . .	120
<b>14</b>	<b>Personnages marquants</b>	<b>123</b>
	Références . . . . .	131

# Chapitre 1

## Introduction

*Il y a très certainement encore de nombreuses erreurs ou imprécisions dans ces notes de cours. N'hésitez pas à me les communiquer (rabaud@fast.u-psud.fr) !*

Voici en images quelques exemples illustrant la diversité des champs d'applications de la Mécanique des Fluides.



FIG. 1.1 – Sillage de l'île de la Guadalupe (Mexique).



FIG. 1.2 – Avalanche de poudreuse.



FIG. 1.3 – Catamaran PlayStation, ancien détenteur du record du tour du monde à la voile.



FIG. 1.4 – Tourbillons de bout d'aile visualisés lors de la pulvérisation d'insecticide.



FIG. 1.5 – Eruption explosive d'un volcan.



FIG. 1.6 – Eolienne en Bretagne.

## Chapitre 2

# Notion de milieu continu

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Qu'est ce qu'un fluide ?</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>2.2</b>	<b>Notion d'échelle mésoscopique</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>2.3</b>	<b>Notion de « particule fluide »</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>2.4</b>	<b>Vitesse d'une particule fluide</b> . . . . .	<b>11</b>
2.4.1	Quelques techniques de mesure de vitesse (vélocimétrie) . . . . .	11
2.4.2	Quelques exemples de champ de vitesse : . . . . .	11
<b>2.5</b>	<b>Trajectoire de particules, ligne d'émission, ligne de courant et lignes de temps</b> . . . . .	<b>11</b>
2.5.1	Trajectoire de particule ( <i>particle path</i> ) . . . . .	12
2.5.2	Ligne d'émission ( <i>streakline</i> ) . . . . .	12
2.5.3	Ligne de courant ( <i>streamline</i> ) . . . . .	12
2.5.4	Ligne de temps ( <i>timeline</i> ) . . . . .	13
2.5.5	Changement de référentiel . . . . .	13
<b>2.6</b>	<b>Fonction de courant</b> . . . . .	<b>14</b>
2.6.1	Ecoulement plan incompressible en coordonnées cartésiennes ou polaire plane . . . . .	14
2.6.2	Ecoulement axisymétrique - Fonction de Stokes - . . . . .	14
<b>2.7</b>	<b>Dérivée eulérienne et dérivée lagrangienne</b> . . . . .	<b>15</b>

---

### 2.1 Qu'est ce qu'un fluide ?

Un milieu continu est un milieu dont les propriétés et les champs associés sont définis en tout point, continus et dérivables. On distingue deux types de milieux continus : les solides et les fluides. Un solide est rigide (indéformable, élastique ou plastique) et même si les molécules vibrent, elles gardent les mêmes voisins. Il n'y a pas d'écoulement sous contrainte. Pour un liquide ou un gaz au contraire, sous l'action d'une contrainte donnée la déformation se poursuit indéfiniment. La mécanique des fluides s'intéresse à ces déformations infinies, ou plutôt aux vitesses de déplacement appelées *taux de déformations* qui caractérisent le champ de vitesse sous écoulement. D'autre part nous appellerons fluide indifféremment un gaz ou un liquide, la seule chose importante pour la mécanique des fluides étant de savoir si la masse volumique le long d'une trajectoire fluide reste constante ou non.

## 2.2 Notion d'échelle mésoscopique

On peut définir trois échelles de longueur ou de temps pour un milieu fluide ; l'échelle microscopique, l'échelle macroscopique et entre les deux une échelle intermédiaire que l'on nomme *échelle mésoscopique*.

### Echelle microscopique $\lambda$

C'est l'échelle des molécules de fluides (libre parcours moyen  $\lambda$  ou temps moyen entre collision  $\tau$ ). Sur cette échelle les particules ont des trajectoires balistiques (mouvement brownien) avec une vitesse microscopique moyenne donnée par la température.

### Echelle mésoscopique $\delta$

C'est une échelle de taille supérieure à quelques dizaines de libre parcours moyen. A cette échelle on peut déjà effectuer une moyenne spatiale sur un volume, moyenne relativement significative et peu fluctuante car il y aura déjà quelques milliers de particules, et définir une vitesse moyenne sur ce volume. Ce volume mésoscopique porte le nom de *particule fluide*. A l'équilibre thermodynamique, la distribution de vitesse brownienne est isotrope et l'on trouve une vitesse moyenne ou *vitesse fluide* nulle. Hors équilibre, par exemple avec une pression inhomogène, il existe un écoulement et donc une vitesse non nulle de la particule fluide.

### Echelle macroscopique $L$

C'est l'échelle de variation des champs de vecteurs (vitesse  $\vec{v}$ , accélération  $\vec{a}$ , ...) ou scalaire (pression  $P$ , masse volumique  $\rho$ , température  $T$ , ...). Si cette échelle est suffisamment grande devant l'échelle mésoscopique, on peut faire de la *Physique du milieu continu*, c'est-à-dire supposer que les grandeurs mésoscopiques ou *fluides* sont définies en tout point  $\vec{r}$  et tout temps  $t$ , on écrira par exemple  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  ou  $\rho(\vec{r}, t)$ .

On supposera donc toujours ici que  $\lambda \ll \delta \ll L$ .

Etablir les équations de la mécanique des fluides (équation de Navier-Stokes) à partir des propriétés microscopiques et de la thermodynamique hors équilibre (équation de Boltzmann) est une tâche ardue qui suppose de prendre des moyennes sur ces différentes échelles. Dans certaines hypothèses la démonstration a été faite par Chapman et Enskog pour un gaz monoatomique (S. Chapman et T.G. Cowling, *The Mathematical Theory of Nonuniform Gases*. Cambridge University Press, 1960).

## 2.3 Notion de « particule fluide »

On nomme « particule fluide » une petite masse de fluide de taille mésoscopique  $\delta$ . On suppose sa taille suffisamment faible,  $\delta \ll L$ , pour que l'on puisse considérer que son volume tend vers zéro (tout en restant suffisamment volumineuse pour que les valeurs locales restent statistiquement définies  $\delta \gg \lambda$ ) et donc que l'on peut définir les dérivées des champs en tout point. Pour les fluides denses, et les échelles macroscopiques usuelles cela ne pose pas trop de problème. On peut alors faire de la *Mécanique des milieux continus*.

Quelques cas délicats où il faut utiliser la mécanique statistique hors-équilibre : gaz dilué comme dans les nuages interstellaires ( $\lambda \approx 10^4$  km et  $\tau \approx 5$  jours), nanofluidique, ondes de choc, rentrée d'une navette spatiale dans l'atmosphère ( $\lambda >$  taille de la navette).

*Nota* : Par définition une particule fluide conserve sa masse, mais pas forcément son volume si le fluide est compressible.



## 2.4 Vitesse d'une particule fluide

La vitesse d'une particule fluide est la moyenne sur son volume mésoscopique de la vitesse de chacune des molécules présentes à cet instant dans le volume. Notons que ce ne sont pas toujours les mêmes molécules qui constituent la *particule fluide*, certaines rentrent, d'autres sortent (ce phénomène caractérise la diffusion moléculaire).

Le mouvement d'une particule fluide peut toujours se décomposer en un mouvement de translation (donné par la vitesse  $\vec{v}$ ), de rotation (donné par un vecteur rotation instantané  $\vec{\omega}$  appelé en mécanique des fluides vorticité) et de déformation (donné par le tenseur des gradients de vitesse  $[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}]$ ). Nous reverrons ce point dans le module 4.

### 2.4.1 Quelques techniques de mesure de vitesse (vélocimétrie)

Voici quelques exemples des techniques classiques de mesure des vitesses dans un fluide.

- Mesure de forces ou de couples et étalonnage. Robuste, simple mais peu précis et perturbant l'écoulement.
- Suivi de particules (*particle tracking*) par exemple un ballon atmosphérique, une tâche de colorant, ... C'est une mesure dite lagrangienne car mesurée en suivant un objet à différents instants et donc à différentes positions et non pas en un point fixe.
- Anémométrie à fil chaud. On mesure le refroidissement d'un fil mince parcouru par un courant électrique. Permet d'atteindre  $10^5$  mesures par secondes.
- Anémométrie laser (LDV : *Laser Doppler Velocimetry*). Basée sur la détection de la lumière émise par une particule traversant l'intersection de deux faisceaux lasers. Mesure non perturbative d'une composante de la vitesse en un point. Nécessite un fluide transparent.
- Anémométrie Doppler ultrasonore. Basé sur le décalage Doppler d'une impulsion acoustique réfléchie par une particule. Permet la mesure des vitesses longitudinales sur toute une ligne de visée.
- Vélocimétrie par image de particules (PIV : *Particle Image Velocimetry*). Basé sur la corrélation entre des portions d'images successives où de petites particules solides transportées par le fluide sont rendues visibles par un fort éclairage (par exemple un plan laser). Cette technique permet d'obtenir par calcul informatique un champ de vitesse sur un maillage du plan des images, où plus précisément les deux composantes de la vitesse contenues dans le plan de l'image.

### 2.4.2 Quelques exemples de champ de vitesse :

Les figures suivantes présentent dans un plan les vecteurs vitesse projetés dans ce plan sur un maillage régulier. Les données pouvant venir soit de simulations numériques soit de mesures expérimentales.

## 2.5 Trajectoire de particules, ligne d'émission, ligne de courant et lignes de temps

De nombreuses techniques expérimentales sont utilisées pour visualiser la structure d'un écoulement. Elles conduisent à introduire les notions de trajectoire de particules, de ligne d'émission, de ligne de courant ou de ligne de temps. Ces différentes notions risquent de se confondre facilement, en effet les trois premières sont équivalentes *pour un écoulement stationnaire* ( $\partial/\partial t = 0$ ). Ce n'est que pour un écoulement *instationnaire* que ces notions sont vraiment différentes.

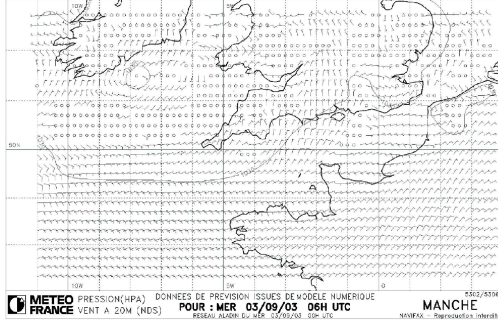


FIG. 2.1 – Carte météorologique de prévision des vents.

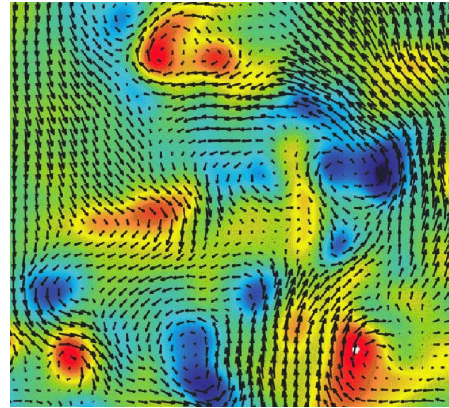


FIG. 2.2 – Champ de vitesse turbulent mesuré par PIV.

### 2.5.1 Trajectoire de particule (*particle path*)

C'est l'ensemble des points occupés par une particule fluide au cours du temps. Mathématiquement on peut écrire :  $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = f(\vec{r}_0, t)$  où  $\vec{r}_0$  est la position initiale de la particule à l'instant  $t = 0$ . C'est donc ce que l'on appelle un suivi *lagrangien* (suivre le déplacement d'un objet donné au cours du temps). Par définition la tangente à la trajectoire est parallèle au vecteur vitesse qu'avait la particule à l'instant où elle passait en ce point. Une façon classique d'obtenir la trajectoire est de prendre une photo en pause longue tout en éclairant l'écoulement de façon continu.

### 2.5.2 Ligne d'émission (*streakline*)

Elles sont facile à réaliser expérimentalement en prenant une photographie à un instant  $t$  d'un filet de colorant émis en continu depuis un certain temps à partir d'un point source fixe. Attention le vecteur vitesse n'a aucune raison d'être tangent à cette courbe pour un écoulement instationnaire.

### 2.5.3 Ligne de courant (*streamline*)

Ligne théorique qu'il est difficile d'observer expérimentalement mais que l'on peut calculer à l'issue d'une simulation. C'est la courbe qui, à un instant donné, est tangente en tout point au vecteur vitesse en ce point. Cela suppose donc de connaître a priori le champ de vitesse en tout point. C'est la ligne de champ classique d'un champ de vecteur à un instant donné (champ électromagnétique par exemple). En coordonnées cartésiennes elle est donnée par l'équation  $dx/u = dy/v = dz/w$  si  $\vec{v} = (u, v, w)$ .

- Deux lignes de champ ne se croisent qu'en des points de stagnation (aussi appelés points cols) où la vitesse est nulle.
- On peut bien-sur aussi définir des surfaces de courant et des tubes de courant. Pour un fluide incompressible le débit *massique*  $Q_m = \int \rho \vec{v} \cdot \vec{dS}$  ou le débit volumique  $Q_v = \int \vec{v} \cdot \vec{dS}$  se conservent le long d'un tube de champ. Pouvez-vous le montrer ?

**Exercice :** dessiner les lignes de courants, lignes d'émission et trajectoires de particules pour un écoulement homogène mais qui change de direction de  $90^\circ$  à un instant donné.

Rappelons que pour un écoulement stationnaire,  $\vec{v}(\vec{r})$  indépendant du temps, lignes de courant, lignes d'émission et trajectoires de particule sont identiques.

### 2.5.4 Ligne de temps (*timeline*)

Position à un instant  $t$  d'une ligne marquée dans le fluide à un instant initial et transportée (on dit advectée ou convectée) ensuite par l'écoulement. Elles sont assez faciles à réaliser expérimentalement et donnent une idée de la composante du vecteur vitesse normale (perpendiculaire) à la ligne.

### 2.5.5 Changement de référentiel

Un écoulement stationnaire dans un certain référentiel peut ne pas l'être dans un autre. De ce fait la transformation de ces différentes lignes n'est pas évidente comme l'illustre la série de figures suivantes :

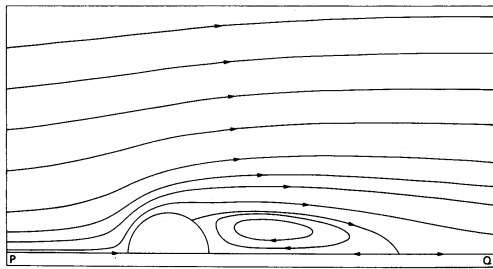


FIG. 2.3 – Écoulement stationnaire autour d'un cylindre fixe à un nombre de Reynolds de 40. Visualisation par lignes d'émission qui sont aussi dans ce cas des lignes de courant et des trajectoires de particules. D'après Réf. [28] p. 76.

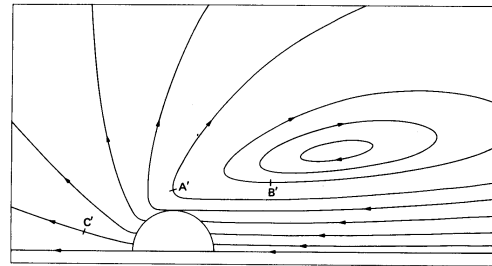


FIG. 2.4 – Ligne de courant autour d'un cylindre en mouvement de droite à gauche au même nombre de Reynolds dans un référentiel où le fluide est initialement au repos. D'après Réf. [28] p. 76.

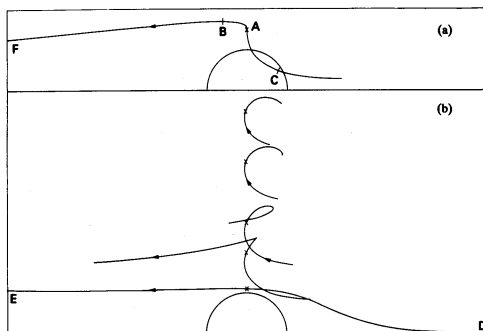


FIG. 2.5 – Trajectoires de particules dans le référentiel où le fluide est au repos et où le cylindre se déplace de droite à gauche. D'après Réf. [28] p. 78.

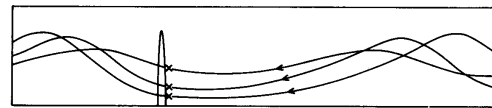


FIG. 2.6 – Trajectoire de particules piégées dans les tourbillons de recirculation dans le référentiel où le fluide est au repos (noter l'échelle transverse dilatée). D'après Réf. [28] p. 79.

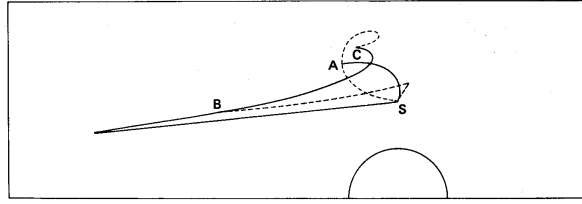


FIG. 2.7 – Lignes d'émission dans le référentiel où le fluide est au repos. D'après Réf. [28] p. 79.

## 2.6 Fonction de courant

Pour un écoulement incompressible nous verrons que l'hypothèse de conservation de la masse conduit à l'équation  $\text{div } \vec{v} = 0$  (voir chapitre 4 page 27) et on peut donc écrire que  $\vec{v} = \text{rot } \vec{A}$  comme on le fait pour le champ électromagnétique  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ . Le vecteur  $\vec{A}$  est appelé le potentiel vecteur du champ de vitesse  $\vec{v}$  et  $\vec{v}$  satisfait alors obligatoirement la condition d'incompressibilité. Noter que  $\vec{A}$  est défini à une jauge près et que  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} C$  est aussi solution. Cette transformation est en général peu utile (on transforme un champ de vecteur en un autre champ vectoriel moins intuitif) sauf si l'écoulement est 2C2D, c'est-à-dire s'il n'a que deux composantes (2C) de vitesse non nulles et qu'elles ne dépendent que deux dimensions d'espace (2D). En effet dans ce cas la connaissance du champ de vitesse se ramène à la connaissance d'un scalaire, la *fonction de courant*  $\psi$ .

### 2.6.1 Écoulement plan incompressible en coordonnées cartésiennes ou polaire plane

Supposons un écoulement plan d'un fluide incompressible, ou plus précisément un écoulement 2C2D :  $\vec{v} = (u(x, y), v(x, y), 0)$ , c'est-à-dire sans composante selon  $Oz$ . Alors on peut écrire :

$$\boxed{\vec{v} = \text{rot} \left( \psi \vec{k} \right)}, \quad (2.1)$$

soit  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  et  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ .  $\psi$  est la fonction de courant, elle garde une valeur constante sur une ligne de courant.

*Nota :* Le débit par unité de longueur transverse est constant entre deux lignes de courant et vaut  $Q_v = \int_A^B \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{e}_y \right) \cdot (d\vec{l} \wedge \vec{e}_z) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A$ , car  $d\vec{l} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y$ .

### 2.6.2 Écoulement axisymétrique - Fonction de Stokes -

Dans le cas d'un écoulement incompressible 2C2D axisymétrique (sans composante orthoradiale) on doit utiliser une autre définition de la fonction de courant, la *fonction de Stokes*.

– En coordonnées cylindriques :  $\vec{v} = (u_r(r, z), 0, u_z(r, z))$  et l'on peut écrire :

$$\boxed{\vec{v} = \text{rot} \left( -\frac{\psi(r, z)}{r} \vec{e}_\theta \right)}. \quad (2.2)$$

– En coordonnées sphériques :  $\vec{v} = (u_r(r, \theta), u_\theta(r, \theta), 0)$  et l'on peut écrire :

$$\boxed{\vec{v} = \text{rot} \left( \frac{\psi(r, \theta)}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi \right)}. \quad (2.3)$$

Là encore, connaître  $\psi$  suffit pour connaître le champ vectoriel de vitesse  $\vec{v}$ .

*Remarque :* Pour un écoulement compressible instationnaire ou 3D3C, il n'existe pas de fonction de courant.

*Exercice :* Vérifier que la fonction  $\psi$  est bien constante sur une ligne de courant ( $d\psi = 0$ ) dans les trois systèmes de coordonnées.

## 2.7 Dérivée eulérienne et dérivée lagrangienne

Les dérivées eulériennes et lagrangiennes sont aussi appelées respectivement dérivées locales et dérivées totales. Cette dernière dérivée s'appelle encore parfois dérivée particulière ou dérivée convective. Elles apparaissent en mécanique des fluides lorsqu'une grandeur est étudiée en un point qui se déplace dans l'espace. Il faut alors distinguer les variations au cours du temps de la fonction en un point coïncidant fixe des variations dues au fait que le point explore des lieux différents de l'espace.

Prenons un exemple. Lors d'un trajet en voiture vous mesurez l'évolution de la température extérieure. Il fait par exemple  $15^\circ$  à Paris à 8 heures du matin et  $35^\circ$  à Marseille à 16 heures. Vous connaissez donc la variation de la fonction  $T$  au cours du temps,  $\frac{dT}{dt}$ , mais en différents points d'espace au cours du temps. Vous ne connaissez pas séparément  $\frac{\partial T}{\partial t}$  ou  $\frac{\partial T}{\partial x}$ .

Soit  $T$  une fonction scalaire de plusieurs variables  $T(\vec{r}, t)$ . On peut écrire :

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz.$$

Soit :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} u + \frac{\partial T}{\partial y} v + \frac{\partial T}{\partial z} w,$$

avec  $u = dx/dt, v = dy/dt$  et  $w = dz/dt$ .

Classiquement en mécanique des fluides on note cette dérivée totale  $\frac{DT}{Dt} = \frac{dT}{dt}$  pour faire bien ressortir que cette dérivée totale n'est pas du tout une dérivée partielle. Sous forme vectorielle on a donc :

$$\boxed{\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(T)}.$$

On a le même calcul pour une fonction vectorielle. Chacune de ses composantes est un scalaire ayant une dérivée lagrangienne donnée par l'équation précédente. D'une façon symbolique on peut alors écrire pour tout vecteur  $\vec{A}$  sa dérivée lagrangienne :

$$\frac{D\vec{A}}{Dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

ou encore sous forme d'opérateur :

$$\frac{D \cdot}{Dt} = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot$$

Par exemple l'accélération lagrangienne (dérivée en suivant la particule de sa vitesse) est donnée par :

$$\boxed{\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}}. \quad (2.4)$$

Le premier terme du membre de droite est le terme d'accélération eulérienne (en un point fixe), le second l'accélération due au déplacement dans l'espace à un instant fixé. Attention à la concision de la notation, ce deuxième terme résume en fait 9 termes de la forme  $v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ . Nous utiliserons ces notions dans les prochains modules, mais nous pouvons déjà annoncer qu'une grande partie des difficultés de la mécanique des fluides vient de ce second terme car il est non-linéaire : si la vitesse est doublée, ce terme est multiplié par 4 !

## Chapitre 3

# Analyse dimensionnelle et similitude

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Théorème <math>\pi</math> ou de Buckingham</b>	<b>17</b>
<b>3.2</b>	<b>Exemple de la traînée d'une sphère</b>	<b>19</b>
<b>3.3</b>	<b>Période des oscillations d'un pendule pesant</b>	<b>22</b>
<b>3.4</b>	<b>"Démonstration" du théorème de Pythagore</b>	<b>22</b>
<b>3.5</b>	<b>Questions et remarques</b>	<b>23</b>
<b>3.6</b>	<b>Notion de similitude</b>	<b>23</b>
3.6.1	Similitude pour une maquette de navire	23
3.6.2	Pourquoi les enfants marchent-ils facilement pieds-nus sur les gravillons ?	23
3.6.3	Pourquoi un animal de 50 m de haut ne peut-il exister sur Terre ?	23
3.6.4	Pourquoi les animaux sautent-ils tous à peu près à la même hauteur ?	24
3.6.5	Pourquoi les sociétés de fourmis n'ont-elles pas inventé le feu ?	25

---

Les mathématiciens et les physiciens théoriciens résolvent des équations adimensionnées dont les paramètres et les coefficients sont des nombres réels ou complexes. Pourtant concrètement le physicien cherche des relations entre des quantités qui ont une dimension ; des forces, des énergies, des viscosités, des tailles ou des masses volumiques par exemple. Ces dimensions sont toutes exprimables dans une base de dimensions, par exemple le Système International (SI), ou simplement masse, longueur et temps dans la plupart des applications en mécanique. Ce choix n'est pas unique, on peut par exemple préférer un système construit avec une force, une énergie, etc. Nous savons qu'une équation, pour avoir un sens, doit être "homogène en dimension". Mais on peut aller un peu plus loin, et prédire à partir d'une hypothèse réaliste sur les paramètres pertinents la dépendance d'une quantité en fonction des autres variables et d'un certain nombre de "nombres sans dimension" dont la mécanique des fluides est si friande.

Présentons maintenant plus formellement la méthode de l'analyse dimensionnelle avant d'étudier un exemple au § 3.2 page 19.

### 3.1 Théorème $\pi$ ou de Buckingham

Traduit de l'article de Bernard CASTAING [5], pages 62-64.

Il semble que l'analyse dimensionnelle ait été utilisée au moins depuis Galilée. Elle est utilisée depuis longtemps pour résoudre des problèmes de mécanique des fluides, et c'est maintenant un outil

courant en physique. [...]

L'idée de base est bien connue. Imaginons qu'une expérience ait été réalisée avec des conditions aux limites particulières et que tout ait été exprimé dans le Système International (SI ou MKSA). Pour l'exprimer en CGS nous multiplions simplement les nombres représentant les longueurs par  $10^2$ , les masses par  $10^3$ , les densités par  $10^{-3}$ . Mais imaginons que nous oublions de le faire et changions simplement le nom des unités. Notre résultat serait celui d'un nouveau problème où les longueurs seraient  $10^2$  fois plus petites, les masses  $10^3$  fois plus petites et les densités  $10^3$  fois trop grandes. En résolvant notre problème, nous avons donc résolu toute une classe de problèmes équivalents. En réalité ce n'est peut-être pas très utile car peu de liquides ont des densités  $10^3$  fois supérieures à celle de l'eau par exemple ! Certaines quantités doivent être maintenues constantes (la vitesse de la lumière par exemple) si elles ont quelques importances.

Formalisons cela en utilisant les travaux de Edgar BUCKINGHAM (Phys. Rev., **14**, 345 (1914)). Soit  $y_1, \dots, y_n$  les paramètres (conditions aux limites, quantités importantes) et  $y$  la quantité inconnue. Nous recherchons une relation mathématique :

$$y = f(y_1, \dots, y_n).$$

Soit  $A_1, \dots, A_m$  les  $m$  dimensions *indépendantes* ( $M$  pour la masse,  $T$  pour le temps,  $\dots$ ). Nous verrons que le nombre de dimensions indépendantes n'est pas déterminé de façon évidente mais supposons qu'il le soit. Alors les dimensions des  $y_i$  s'expriment en fonction des  $A_j$  :

$$[y_i] = A_1^{\alpha_{1i}}, \dots, A_m^{\alpha_{mi}}.$$

L'expression :

$$y_1^{x_1} y_2^{x_2} \dots y_n^{x_n}$$

sera sans dimension si les  $m$  équations :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} x_i = 0$$

sont satisfaites. Nous pouvons alors former  $n - m$  quantités sans dimensions "indépendantes" :  $\pi_1, \dots, \pi_{n-m}$ . Prenons ces quantités comme nouveaux paramètres, et appelons  $y'_1, \dots, y'_m$  les paramètres restants. Ces  $y'_i$  ont des dimensions indépendantes et il existe des exposants  $\beta_i$  tels que :

$$[y] = [y'_1]^{\beta_1} \dots [y'_m]^{\beta_m}.$$

Alors l'expression

$$\pi = y y_1'^{-\beta_1} \dots y_m'^{-\beta_m}$$

est sans dimension et est une fonction de tous les paramètres :

$$\pi = h(y'_1 \dots y'_m, \pi_1, \dots, \pi_{n-m}).$$

Ni  $\pi$ , ni les valeurs de  $\pi_i$  ne dépendent du système d'unité. Nous pouvons donc choisir ces unités pour que tous les  $y'_i = 1$  et :

$$\pi = h(1 \dots 1, \pi_1, \dots, \pi_{n-m}) = g(\pi_1, \dots, \pi_{n-m}).$$

Ceci est le théorème de Buckingham : une quantité inconnue sans dimension peut uniquement dépendre des nombres sans dimension formés à partir des paramètres. Le cas le plus intéressant correspond au



cas où on ne peut former aucun paramètre sans dimension. Alors la fonction  $g$  est une constante  $g_0$  et le problème est entièrement résolu à cette constante multiplicative près :

$$y = g_0 y_1^{\beta_1} \cdots y_m^{\beta_m}.$$

[...]

On peut choisir autant de dimensions indépendantes que l'on veut. Cela introduit simplement des facteurs de conversion qui agissent comme de nouveaux paramètres. Cela n'a pas d'intérêt sauf si l'on sait que ces facteurs ne peuvent pas intervenir dans le problème. Par exemple, on considère habituellement que le temps et une longueur ont des dimensions différentes. Pourtant, à cause de la théorie de la relativité, c'est artificiel et cela introduit un « facteur de conversion » qui est la vitesse de la lumière. En mécanique classique, nous savons que ce paramètre ne va pas intervenir, ce qui donne tout son intérêt à distinguer le temps et l'espace.

• **Attention**, l'analyse dimensionnelle est un outil extrêmement puissant, mais aussi très dangereux ! Si l'on oublie ou si l'on se trompe sur le choix des variables physiques à considérer le résultat devient faux. Le « sens physique » doit permettre de sélectionner les variables indépendantes pertinentes.

### 3.2 Exemple de la traînée d'une sphère

Appliquons maintenant ce théorème sur un premier exemple concret. On cherche à calculer la force de traînée d'une sphère dans un liquide visqueux. On recherche une solution stationnaire  $F_D$  du problème. De quoi peut-elle dépendre ? Certainement du rayon  $R$  de la sphère, de la vitesse  $U$  de déplacement de l'obstacle par rapport au liquide et de la viscosité  $\nu$  du liquide (cette propriété sera décrite dans le module 8) quantité qui différencie par exemple le mouvement dans l'eau du mouvement dans du miel. L'analyse dimensionnelle nous donne :

- dimension de  $R$ , une longueur. Ce que l'on note  $[R] = L$ .
- $[U] = L/T$  où  $T$  est un temps.
- $[\nu] = L^2/T$ .
- $[F_D] = ML/T^2$  où  $M$  est une masse.

Comme il n'y a pas de masse dans les trois premières variables on ne peut pas avoir d'équation du type  $F_D = f(R, U, \nu)$ . Il y a forcément une autre variable contenant une unité de masse qui intervient dans le problème. Peut-être la masse volumique  $\rho$  du fluide. Attention si l'on met ici autre chose comme la masse volumique de la sphère, ou sa masse, ... on peut trouver des résultats justes au niveau des dimensions mais incorrects au point de vue de la physique. L'intuition physique a donc beaucoup d'importance à ce niveau. Formellement on peut tout à fait mettre ici la masse de l'expérimentateur, ou même celle de sa belle-mère, mais ce n'est pas forcément pertinent !

Supposons donc que nous écrivions que  $F_D = f(R, U, \nu, \rho)$  nous aurons donc à satisfaire l'équation aux dimensions  $[F_D] = [R]^\alpha [U]^\beta [\nu]^\gamma [\rho]^\delta$  soit  $ML/T^2 = L^\alpha (L/T)^\beta (L^2/T)^\gamma (M/L^3)^\delta$ . Ce qui nous donne un système de 3 équations et 4 inconnues, avec par exemple comme solution  $\delta = 1, \gamma = 2 - \alpha, \beta = \alpha$  avec  $\alpha$  libre. On peut donc écrire

$$F_D = R^\alpha U^\alpha \nu^{2-\alpha} \rho F(Re)$$

où  $Re = \frac{U 2R}{\nu} = \frac{UD}{\nu}$  est appelé le nombre de Reynolds et c'est le seul nombre sans dimensions que l'on peut fabriquer avec les variables  $R, U, \nu, \rho$  (vérifier le). Pour  $\alpha = 2$  on peut écrire une forme

équivalente plus simple :

$$F_D = \rho U^2 R^2 F'(Re).$$

On définit souvent le coefficient de traînée (sans dimension),  $C_D$  parfois aussi appelé  $C_x$  en français par :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A},$$

où  $A = \pi R^2$  est l'aire de la section de l'obstacle.

Notre analyse dimensionnelle nous prédit que  $C_D = f(Re)$ . C'est en effet ce que l'on observe expérimentalement (figure 3.1). A faible nombre de Reynolds on démontrera (§ 10.2.2) le résultat exact  $C_D = 24/Re$ . Ceci montre que la force de traînée  $F_D$  augmente d'abord comme la vitesse à faible  $Re$  puis comme le carré de la vitesse lorsque  $C_D \approx cste$ , sauf au moment du décrochement appelé crise de traînée pour  $Re \approx 400\,000$ .

Lorsque le Reynolds n'est pas très petit devant l'unité, Oseen a calculé le terme correcteur (valable si  $Re \leq 5$ ) :  $C_D = \frac{24}{Re}(1 + \frac{3}{16}Re)$ .

Il existe ensuite des formules empiriques approchées qui donnent d'assez bon résultats jusqu'à la crise de traînée ( $Re \leq 400\,000$ ) par exemple la relation de White :

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0,4.$$

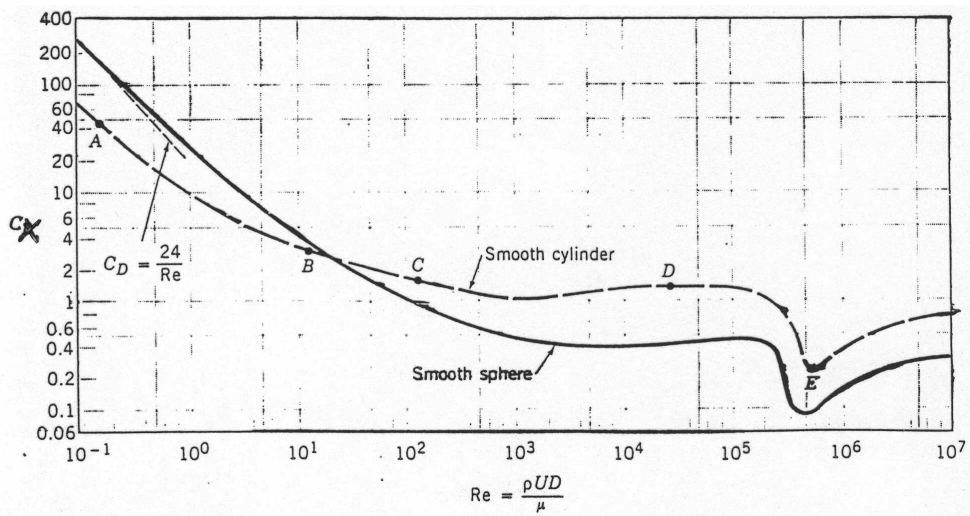


FIG. 3.1 – Evolution de la traînée adimensionnée d'une sphère ou d'un cylindre par unité de longueur en fonction du nombre de Reynolds. Noter les échelles logarithmiques. D'après Réf. [2] page 441.

#### • Applications :

- Calculer de la traînée sur une balle de tennis à 200 km/h.  $R = 33$  mm,  $v_{air} = 15 \cdot 10^{-6} m^2/s$ ,  $\rho_{air} = 1,29 Kg/m^3$ . Comparer au poids de la balle ( $M = 50$  g).

Notons que si la sphère n'est pas lisse (cas d'une balle de golf par exemple, du duvet de la balle de tennis) il apparaît au moins une nouvelle variable sans dimension (par exemple le rapport rugosité/rayon comme sur la figure 3.2).

De même s'il existe plus d'une dimension (ellipsoïde plutôt que sphère par exemple) alors l'analyse dimensionnelle prédit l'existence d'au moins un autre nombre sans dimension, par exemple le rapport grand axe sur petit axe  $a/b$  si on a affaire à une ellipsoïde de révolution. Ensuite le problème peut aussi dépendre de l'angle  $\alpha$  entre l'axe de l'ellipsoïde et l'écoulement. Alors on aura  $C_D = f(Re, a/b, \alpha)$ .

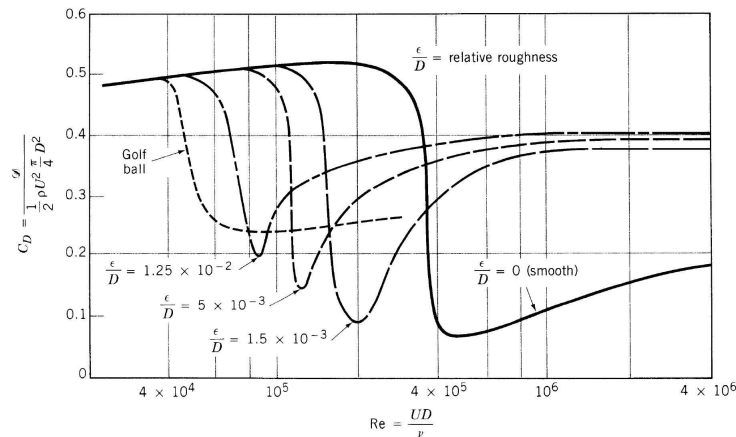


FIG. 3.2 – Effet de la rugosité sur la crise de traînée d'une sphère. D'après Réf. [2].

- Calculer le fardage (force de traînée) dû au mât de 20 mètres de haut d'un voilier dans un vent de 30 Nœuds ( $\approx 60$  km/h) si  $R = 10$  cm (le  $C_D$  d'un cylindre est environ le double de celui d'une sphère dans cette gamme de nombre de Reynolds).
- Calcul de la traînée sur une plaque plane infiniment mince. Pour une plaque mince de largeur  $b$  et de longueur  $l$  (dans le sens de l'écoulement) on pose  $C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = f(Re, b/l)$ , où  $A = b \times l$  et  $Re = Ul/\nu$ . On suppose que  $b \ll l$ . Pour  $Re < 10^5$  on trouve expérimentalement  $C_D = 1,33 Re^{-1/2}$  et pour  $Re > 10^6$  on trouve  $C_D^{1/2} \log(Re C_D) \approx 0,242$  ([4] p. 307). Calculer la force de traînée sur la quille d'un monocoque de type "60 pieds open". On prendra  $b = 3$  m,  $l = 0,5$  m,  $U = 10$  Nœuds,  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup> et  $\nu = 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s. On trouve alors  $C_D \approx 3,7 \cdot 10^{-3}$  et  $F_D = 73$  N. On trouverais certainement nettement plus en tenant compte de l'incidence non nulle de la quille.
- En ces temps de record ... En athlétisme et particulièrement pour un 100 mètres il paraît que l'on ne peut espérer battre un record du monde par temps froid. Ceci est sans doute dû à l'augmentation de la force de traînée avec une baisse de température. En effet de 30°C à 10°C, la masse volumique de l'air  $\rho_{air}$  augmente d'environ 10 % ce qui augmente d'autant la force de traînée  $F_D = \frac{1}{2}\rho U^2 A C_D$ .
- Toujours en athlétisme la plupart des records ne sont validés que si le vent favorable est inférieur à 2 m/s. Regardons l'effet sur la force de traînée d'un vent favorable de 2 m/s. Un coureur de 100 m à une vitesse de l'ordre de 100 m / 10 s = 10 m/s. Il a donc selon qu'il y a du vent ou pas une vitesse relative de 8 ou 10 m/s. Comme la force de traînée  $F_D = \frac{1}{2}\rho U^2 A C_D$  varie comme le carré de la vitesse apparente, la force de traînée avec un vent dans le dos de 2 m/s est près de 40% plus faible que sans vent. C'est donc un énorme avantage.

### 3.3 Période des oscillations d'un pendule pesant

Soit un pendule constitué d'une masse ponctuelle  $m$  pouvant osciller librement sous l'action de la gravité au bout d'une tige de longueur  $l$ . On recherche une expression pour la période  $T$  des oscillations.

1. Si l'on suppose que  $T = f(l)$  uniquement, l'analyse dimensionnelle nous montre que c'est impossible.
2. Si l'on suppose que  $T = f(l, g)$  l'analyse dimensionnelle prédit que  $T \propto \sqrt{l/g}$  ce qui n'est pas mal du tout sachant que le résultat exact pour de petites oscillations est  $T = 2\pi \sqrt{l/g}$ !
3. Si l'on suppose que  $T = f(l, g, a)$  où  $a$  est l'amplitude horizontale des oscillations on trouve  $T = \sqrt{l/g} F(a/l)$ .
4. Si l'on suppose que  $T = f(l, g, m)$  on trouve que  $T$  ne peut pas dépendre de  $m$  sans dépendre d'autres variables faisant intervenir la dimension d'une masse.
5. enfin si l'on suppose que  $T = f(l, g, m, \eta, a)$  où  $\eta$  est la viscosité de l'air, on voit apparaître d'autres nombres sans dimensions possibles.

### 3.4 "Démonstration" du théorème de Pythagore

(D'après [29] page 17.)

Soit un triangle ABC rectangle et appelons B le sommet dont l'angle est le plus petit, et AH la hauteur passant par A et coupant BC en H. Soit  $a$  la longueur du segment BC,  $b$  la longueur de AC et  $c$  celle de AB. La surface du triangle ABC est donc la somme de la surface du triangle ACH et celle du triangle AHB :  $S_{ABC} = S_{ACH} + S_{AHB}$ . De plus appelons  $\alpha$  le plus petit angle du triangle, ici l'angle  $\widehat{ABC}$ . Nous retrouvons ce même angle pour  $\widehat{CAH}$ . Nous supposons enfin que tout triangle rectangle est parfaitement défini par la connaissance de son hypoténuse et par la valeur de son plus petit angle. Pour respecter l'analyse dimensionnelle, la surface de tout triangle rectangle est alors égale au carré de son hypoténuse multiplié par une fonction de ce plus petit angle. Nous avons donc  $S_{ABC} = a^2 f(\alpha)$ , mais aussi  $S_{ACH} = b^2 f(\alpha)$  et  $S_{AHB} = c^2 f(\alpha)$ . Comme  $S_{ABC} = S_{ACH} + S_{AHB}$ , il vient :  $a^2 f(\alpha) = b^2 f(\alpha) + c^2 f(\alpha)$  soit  $a^2 = b^2 + c^2$  puisque  $f(\alpha)$  est une constante non nulle ! Nous avons démontré le théorème de Pythagore grâce à l'analyse dimensionnelle !

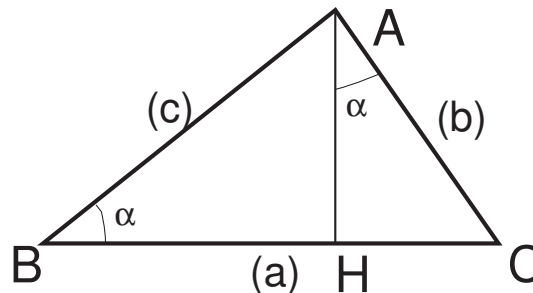


FIG. 3.3 – Démonstration du théorème de Pythagore.

### 3.5 Questions et remarques

– Pourquoi est-ce toujours une loi de puissance qui apparaît entre les variables dans le théorème  $\Pi$  ? Parce que toute fonction peut s'exprimer localement comme la somme d'une série de termes en loi de puissance des différentes variables (développement limité) et que chaque terme doit alors satisfaire l'analyse dimensionnelle.

– Combien doit-on choisir de dimensions indépendantes ? Généralement on en choisit 4 dans le Système International (SI anciennement MKSA, pour mètre, kilogramme, seconde et ampère). Mais c'est un choix relativement arbitraire. Deux dimensions sont indépendantes tant qu'il n'existe pas, dans le problème considéré, de lien physique entre ces deux dimensions. Par exemple masse et énergie ne sont plus des dimensions indépendantes en physique des particules puisque  $E = mc^2$  (surtout si l'on fait  $c = 1$  !). Par contre chaleur et travail peuvent être deux dimensions indépendantes si dans le problème considéré il n'y a pas transformation entre les deux types d'énergie.

### 3.6 Notion de similitude

On dit que deux problèmes sont similaires s'ils sont gouvernés par les mêmes nombres sans dimension. Par exemple s'ils ont le même rapport d'aspect (même rapport de taille). Alors résoudre l'un des problèmes, c'est aussi résoudre l'autre. Prenons quelques exemples.

#### 3.6.1 Similitude pour une maquette de navire

Le sillage d'un bateau et en particulier la traînée que l'eau exerce sur la coque peut être décomposée en plusieurs termes, en particulier la traînée de forme — caractérisé par le coefficient  $C_D = f(Re)$  — et la traînée de vague — caractérisée par un coefficient  $C_{vague} = f(Fr)$  où  $Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$  est le nombre de Froude. La traînée de vague correspond à l'énergie transportée à l'infini par les ondes de surface. Pour faire une maquette en similitude, il conviendrait de choisir une échelle de réduction de toutes les dimensions géométriques et d'avoir le même nombre de Reynolds et le même nombre de Froude pour bien respecter la part relative de traînée de forme et de traînée de vague. Mais on vérifie aisément que c'est impossible, en tout cas en conservant l'eau comme fluide porteur et sans modifier  $\vec{g}$  ! Lorsque l'on fait des essais de traction sur maquette en bassin d'essais de carène il convient de travailler soit en "similitude de Reynolds" soit en "similitude de Froude".

#### 3.6.2 Pourquoi les enfants marchent-ils facilement pieds-nus sur les gravillons ?

Si on suppose les enfants et les adultes homothétiques, leur poids est proportionnel à leur volume  $L^3$  alors que la surface des pieds est proportionnelle à  $L^2$ . En conséquence la pression exercée par les gravillons sur la plante des pieds est proportionnelle à  $L$ . Plus on est grand, plus ça fait mal !

#### 3.6.3 Pourquoi un animal de 50 m de haut ne peut-il exister sur Terre ?

Là aussi si on fait croître de façon homothétique (sans changer la forme) la taille d'un animal, son poids augmente comme  $L^3$  alors que la section de ses fémurs par exemple croît comme  $L^2$ . La contrainte de compression sur chaque fémur augmente donc comme  $L$ . S'il existe une contrainte maximale avant rupture de l'os, il existe une taille maximum pour cette espèce d'animaux.

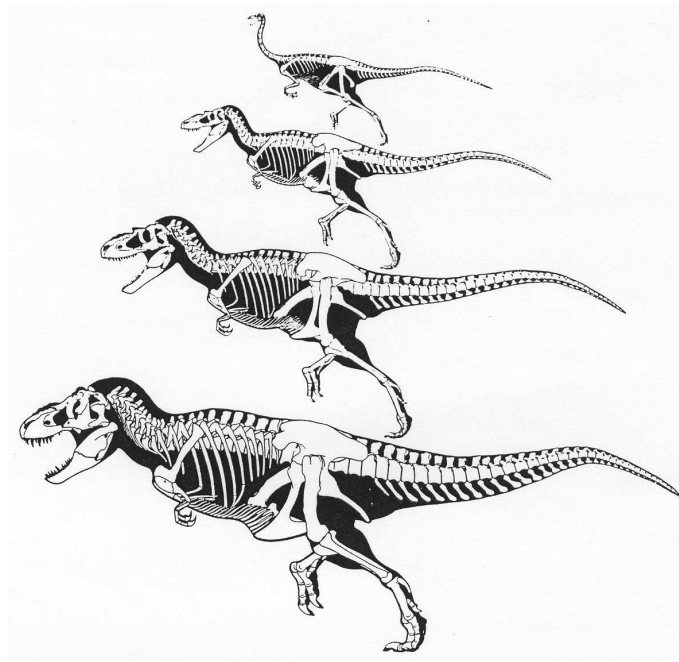


FIG. 3.4 – Comparaison des tailles et donc des rapports d’aspect des squelettes de théropodes. Du plus petit au plus grand, un ornithomimus (165 kg), deux tyrannosaures (750 kg et 2500 kg) et un tyrannosaure rex (6000 kg). D’après [23] p. 126.

En l’occurrence, un fémur de mammouth n’est pas homothétique à un fémur de héron, et la figure 3.4 montre que les os de théropodes (dinosaures sans doute ancêtres des oiseaux) ne sont pas homothétiques lorsque l’on passe du plus petit (160 kg) au plus gros (6000 kg).

### 3.6.4 Pourquoi les animaux sautent-ils tous à peu près à la même hauteur ?

(D’après [27] p. 53 et [23] p. 209). Tous les animaux sautent de l’ordre de 1 mètres, et même si c’est 2m45 pour le champion Sotomayor ce n’est pas 10 mètres ni 10 centimètres. L’ordre de grandeur est donc le mètre. Et ceci est aussi vrai pour une puce qui saute de l’ordre de 400 fois sa hauteur. Pourquoi ?

Le poids varie comme  $L^3$  et l’énergie mécanique à fournir pour atteindre une hauteur  $h$  est  $E = mgh \sim L^3h$ . Or la force que peut développer un muscle, ici les cuisses, est au premier ordre proportionnel à sa section ( $L^2$ ) alors que le travail  $W$  qu’il peut fournir est le produit de la force par le déplacement (ici la contraction du muscle proportionnel à sa longueur  $L$ ), soit  $W \sim L^2 \times L = L^3$ . L’égalité  $E = W$  conduit à une hauteur  $h$  de saut indépendante au premier ordre de la taille de l’animal  $L$  !

Au deuxième ordre, les puces sautent plutôt de l’ordre de 20 cm et les léopards de 2m50. On peut penser au frottement de l’air pour diminuer les performances des puces, mais le calcul montre que cela conduit seulement à une diminution de 10 %. Par contre l’accélération que peuvent supporter les animaux est peut-être en cause. En effet les animaux sauteurs comme les félins ont une poussée très longue (pattes arrières qui se déplient). Si les animaux sautent à la même hauteur  $h$ , ils ont la même vitesse de décollage  $V$  donné par  $\frac{1}{2}mV^2 = mgh$ . D’autre part la durée de la poussée est de

l'ordre de  $\tau = L/V$ . Leur accélération est donc  $a \sim V/\tau \sim V^2/L \sim h/L$ . En sautant à la même hauteur, les animaux ne subissent pas du tout la même accélération, les plus petits sont soumis à la plus forte accélération. On trouve pour une puce une accélération de l'ordre de  $300g$  ce qui doit poser d'important problème aux structures internes !

### 3.6.5 Pourquoi les sociétés de fourmis n'ont-elles pas inventé le feu ?

On peut montrer que la combustion à l'air libre met en jeu des processus de diffusion de l'oxygène qui font que la taille minimum d'une flamme est de l'ordre de 2 à 3 millimètres (c'est d'ailleurs visible au moment où une allumette s'éteint, la taille de la flamme ne diminue pas continuellement jusqu'à zéro). Et une fourmi ne peut pas s'approcher suffisamment d'une flamme si gigantesque à son échelle pour l'alimenter sans se brûler gravement. C'est peut-être pour cela qu'elles n'ont pas "inventé" le feu ! Plus sérieusement c'est pour le même genre de raison qu'une goutte d'eau est mortelle pour une fourmi et qu'elles ne se lavent qu'à sec en se frottant les pattes avec de la poussière. Un fois mouillées elles ne peuvent pas vaincre la tension de surface et sortir de la goutte comme on peut le voir dans le film "Microcosmos" de Francis Perrin.





# Chapitre 4

## Hydrostatique

Version du 23 septembre 2008

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Notion de volume de contrôle . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>4.2</b>	<b>Théorème de Leibnitz . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>4.3</b>	<b>Théorème du transport d'une fonction scalaire . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>4.4</b>	<b>Conservation de la masse . . . . .</b>	<b>28</b>
4.4.1	Démonstration . . . . .	29
4.4.2	Cas particulier d'un fluide incompressible. . . . .	29
<b>4.5</b>	<b>Théorème du transport d'une fonction vectorielle . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>4.6</b>	<b>Application au transport de la quantité de mouvement . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>4.7</b>	<b>Application au sillage d'un cylindre . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>4.8</b>	<b>Transport de l'énergie . . . . .</b>	<b>32</b>

---

Un cas apparemment très simple qu'il faut pourtant savoir résoudre est le cas où il n'y a pas d'écoulement. Dans ce cas  $\vec{v} = \vec{0}$  partout puisque le fluide est "statique" et d'autre part le tenseur des contraintes visqueuses  $[\sigma'] = [0]$  car par définition il n'apparaît que sous écoulement (voir la discussion sur ce point au § 5.5 page 37, et nous omettons ici le cas des fluides à seuil qui ont des comportements solides à faible contrainte). L'équation de Navier-Stokes, issue du principe fondamental de la dynamique (Equ. 5.3 page 39), devient alors simplement :

$$\boxed{\vec{\nabla}(p) = \rho \vec{g}}. \quad (4.1)$$

C'est l'équation de l'hydrostatique qui relie localement le gradient de la pression aux forces volumiques par unité de volume (ici simplement noté  $\vec{g}$ ).

Rappelons que la pression dans ce cas est la seule contrainte existant sur une surface élémentaire et que son origine microscopique est l'impulsion transmise lors des collisions par les molécules du fluide (gaz ou liquide). Elle augmente avec l'agitation thermique et donc avec la température à volume constant. Dans le cas hydrostatique la pression au sein du fluide est une grandeur thermodynamique à l'équilibre.

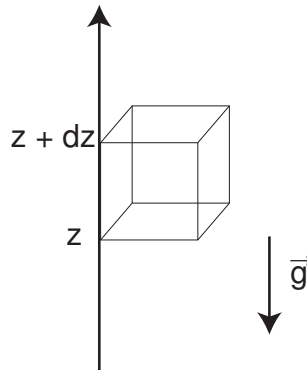


FIG. 4.1 – Volume élémentaire de gaz en équilibre hydrostatique.

Sur une surface quelconque on calcule la force appliquée par la relation :  $\vec{df} = -p dS \vec{n}$  ou plus simplement

$$\vec{df} = -p \vec{dS}.$$

C'est la force appliquée par le fluide vers lequel se dirige le vecteur  $\vec{n}$  sur le milieu d'où sort  $\vec{n}$ .

L'unité officielle de pression dans le Système International (SI) est le Pascal (Pa), c'est-à-dire 1 Newton par mètre carré :  $1 Pa = 1 N/m^2$ . Cette valeur est très faible comparée à la pression atmosphérique. On utilise donc souvent son multiple l'hectopascal (1 hPa = 100 Pa). La pression atmosphérique moyenne au niveau de la mer vaut alors par définition 1 atm = 1013,250 hPa.

Il existe toutefois un très grand nombre d'autres unités de pression encore utilisées, dont l'usage est déconseillé en physique :

- Le bar. Par définition 1 bar =  $10^5$  Pa.
- L'atmosphère : 1 atm = 1013,250 hPa.
- Le torr, en hommage à TORRICELLI et à son manomètre à mercure : 1 torr = 1 mm de mercure, et donc par définition 760 torr = 1 atm.
- Le  $kg/m^2 \approx 10^5$  Pa sur Terre.
- Le PSI, unité anglo-saxones utilisées par exemple pour régler la pression des pneus de vélo. C'est l'abréviation de "Pound per Square Inch", la livre par pouce carré valant ... 45,965 Pa sur Terre.

## 4.1 Equilibre de la pression dans le champ de pesanteur

Considérons un fluide au repos. Chaque particule fluide est en équilibre. Considérons une particule fluide cubique dont les faces basse et haute sont respectivement à l'altitude  $z$  et  $z + dz$ , c'est-à-dire que nous considérons l'axe  $Oz$  dirigé vers le haut et donc opposé au sens de l'accélération de la gravité  $\vec{g}$  (figure 6.1). Les forces de pression sur chaque face s'écrivent  $\vec{df} = -p \vec{dS}$  avec  $\vec{dS}$  dirigé vers l'extérieur du cube (normale sortante).

L'équilibre des forces horizontales (ici uniquement de pression) s'écrit :  $df_x(x) + df_x(x + dx) = 0$ . Soit  $p(x)dS - p(x + dx)dS = -\frac{\partial p}{\partial x} dS dx = 0$ . Et finalement  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ . De même on trouve  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ .

L'équilibre des forces verticales de pression et de gravité s'écrit :

$$df_z(z) + df_z(z + dz) - \rho d\tau g = 0,$$

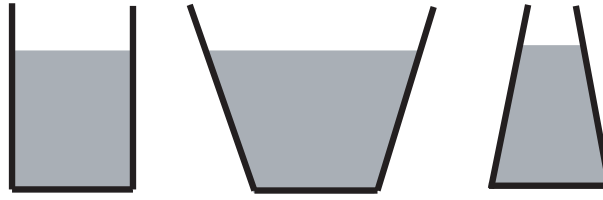


FIG. 4.2 – Paradoxe de Stevin : La pression au fond de ces trois récipients est-elle la même ? Oui ? Pourtant la pression exercée par chacun de ces verres sur le sol est différente. Comment est-ce possible ?

où par convention  $\|\vec{g}\| = g > 0$ . Soit

$$p(z)dS - p(z + dz)dS - \rho dS dz g = - \left( \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) dS dz = 0.$$

Et finalement

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

On peut donc écrire sous forme vectorielle :  $\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$ . On retrouve donc logiquement la relation (6.1) que nous avons simplement déduite de l'équation d'Euler en faisant  $\vec{v} = \vec{0}$ .

#### 4.1.1 Cas d'un fluide de masse volumique constante

Si le fluide est incompressible  $\rho$  ne dépend pas de la pression  $p$ . Si de plus le fluide est de masse volumique homogène (indépendante de la position) alors l'équation de la pression s'intègre facilement et l'on trouve :

$$p(z) = p(0) - \rho g z.$$

Avec  $z$  dirigé vers le haut (si  $z$  était dirigée vers le bas un signe  $+$  remplace le signe  $-$ ). La pression dans le fluide diminue avec l'altitude et augmente avec la profondeur. Par exemple en mer, si on choisit  $z = 0$  en surface  $p(0) = p_{atm}$  et  $z$  dirigé vers le bas  $p(z) = p_{atm} + \rho g z$ . En plongée, à une profondeur de l'ordre de 10 m la pression est égale à deux fois la pression atmosphérique. En apnée le volume de vos poumons est donc pratiquement diminué de moitié ! Par 3200 m de profondeur au large de la Galice, l'épave du tanker "Prestige" est soumise à une pression de 321 fois la pression atmosphérique soit une force équivalente à 3210 tonnes par  $m^2$  de coque.

**Nota :** On appelle parfois *pression statique* la quantité  $p^* = p(z) \pm \rho g z$ . Cette quantité reste constante partout dans un fluide en équilibre hydrostatique.

##### • Applications :

- Paradoxe de Stevin : PASCAL a montré que la pression au fond d'un récipient ne dépend que de la hauteur d'eau et pas de la forme du récipient (figure 6.2). Pourtant la masse de liquide dans chaque récipient est différente et le poids du récipient est réparti sur la même surface. Pouvez-vous expliquer ce paradoxe, appelé paradoxe de Stevin du nom de l'ingénieur flamand Simon STEVIN (1548-1620) de Brugge qui l'a imaginé.
- Le siphon : La figure 6.3 représente un tuyau reliant les deux récipients. Expliquer pourquoi une fois amorcé ce siphon permet de vider le récipient le plus haut dans le récipient le plus bas. Au XVIIème siècle l'explication courante était encore que "la nature a horreur du vide". Pascal a montré qu'un siphon peut pourtant fonctionner à la pression atmosphérique en utilisant deux

liquides de densité différente (par exemple de l'eau salée et colorée et de l'eau pure) (figure 6.4).

- Manomètre en "U" : Dans un tel manomètre rempli d'un liquide (en gris sur la figure 6.5) on mesure la différence de hauteur  $h$  entre les deux branches qui donne la différence de pression :  $P_B - P_A = \rho_{gris}gh$ .
- Vérin hydraulique : Un vérin hydraulique est basé sur le fait qu'un liquide au repos transmet *intégralement* la pression et pas les forces. La figure 6.6 montre un vérin rempli d'huile fermé par deux bouchons étanches de surface  $S_A$  et  $S_B$ . Comme les pressions en A et B sont proches ( $h$  petit), si  $S_A \gg S_B$  alors  $F_A = P_A S_A \gg F_B = P_B S_B$ . On réalise ainsi une très forte démultiplication. Avec un tel vérin un mécanicien peut soulever à la main un Airbus pour changer une roue du train d'atterrissage. C'était aussi le principe des premiers ascenseurs hydrauliques fonctionnant à la pression de l'eau de la ville. Par contre avec un tel système les travaux sont égaux en effet  $W_A = \vec{F}_A \cdot \vec{\Delta l}_A = P_A S_A \Delta l_A$ . Comme  $S_A \Delta l_A = S_B \Delta l_B$  on a  $W_A = W_B$  si  $h \approx 0$ . Il faut donc beaucoup de coup de pompe sur le vérin pour soulever un Airbus !

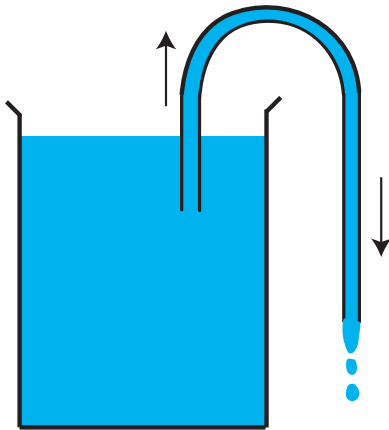


FIG. 4.3 – Schéma d'un siphon

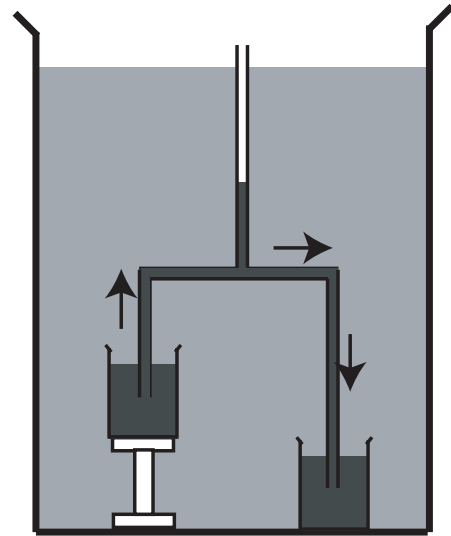


FIG. 4.4 – Siphon à deux liquides de Pascal

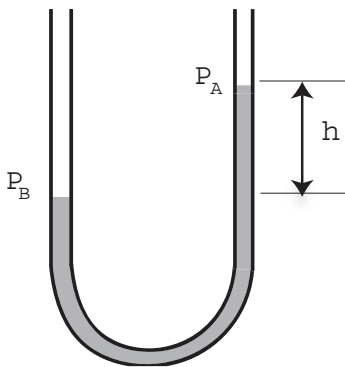


FIG. 4.5 – Schéma d'un manomètre en "U"

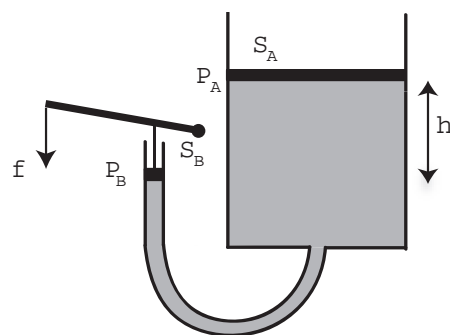


FIG. 4.6 – Schéma d'un vérin hydraulique

- Baromètre à mercure : La figure 6.7 représente l'expérience historique de TORRICELLI de 1644 réalisée à Florence. Au niveau de la mer lorsque  $h > 760$  mm un espace vide apparaît dans le haut d'un tube rempli de mercure (le "vif-argent" à l'époque) puis retourné dans un bac de mercure. La hauteur de mercure dans le tube varie légèrement de jour en jour (variation de la pression atmosphérique) et en altitude (1 cm de moins au sommet de la tour de Pise). En toute rigueur on n'obtient pas le vide mais la phase gazeuse du liquide utilisé à sa pression de vapeur saturante pour la température de l'expérience. Dans le cas du mercure cette pression de vapeur saturante est très faible et Torricelli a donc bien été la première personne à réaliser le vide. Ce résultat a mis longtemps à être accepté par la communauté et PASCAL a refait en 1646 cette expérience le long d'une des tours d'une église de Rouen avec un long tube rempli de vin !

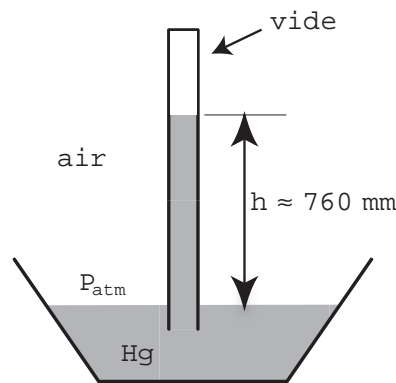


FIG. 4.7 – Expérience de Torricelli permettant la première mesure de la pression atmosphérique.

- Expérience du "crève-tonneau" de Pascal. On raconte que Pascal s'était déclaré capable de faire exploser n'importe quel tonneau avec un long et mince tuyau et un verre d'eau.

#### 4.1.2 Cas d'un fluide de masse volumique variable

L'atmosphère et l'océan sont des exemples de fluides dont la densité varie avec l'altitude. C'est ce que l'on appelle des fluides stratifiés dont nous reparlerons dans le chapitre ?? page ??.

##### Cas général :

Pour un fluide compressible la masse volumique est variable. En général il existe une équation d'état thermodynamique pour ce fluide, par exemple  $f(p, V, T) = 0$  ce qui veut dire que  $\rho = \rho(p, T)$ . Dans ce cas l'équation 6.1 devient :  $\vec{\nabla}(p) = \rho(p, T)\vec{g}$  où  $\vec{g}$  représente l'accélération des forces volumiques (pas forcément uniquement l'accélération de la gravité). Pour que le membre de droite de cette équation dérive d'un gradient il faut que  $\overrightarrow{\text{rot}}(\rho\vec{g}) = 0$  soit :

$$\rho \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{g}) + \vec{\nabla} \rho \wedge \vec{g} = 0.$$

Si les forces volumiques sont conservatives, elles dérivent d'un potentiel et  $\vec{g} = \vec{\nabla}(\phi)$ . On a alors  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{g} = 0$  et il suffit pour avoir un équilibre hydrostatique que  $\vec{\nabla} \rho \wedge \vec{g} = 0$ , soit  $\vec{\nabla} \rho$  parallèle à  $\vec{\nabla} \phi$  c'est-à-dire que les isochores ( $\rho(p, T) = Cste$ ) soit aussi des isopotentiels ( $\phi = Cste$ ). Si  $\vec{g}$  est vertical, les isobares sont horizontales, et il y a équilibre hydrostatique si les surfaces isochores sont aussi horizontales.

### Cas d'un fluide barotrope (cas d'une atmosphère isotherme) :

Si l'on suppose ici que  $\rho$  ne dépend que de la pression et pas de la température (ou alors que  $T = Cste$ ) ce que l'on nomme *un fluide barotrope* : alors  $\rho = f(p)$  et les isochores sont aussi des isobares. Il faut intégrer l'équation caractérisant l'équilibre de la masse de fluide :  $\vec{\nabla} p = \rho(p)\vec{g}$ . Que l'on peut réécrire :

$$dp = \vec{\nabla} p \cdot \vec{dl} = \rho(p)\vec{g} \cdot \vec{dl}$$

soit avec  $z$  dirigé vers le haut :

$$\int_0^z \frac{dp}{\rho(p)} = -gz.$$

Prenons le cas de l'atmosphère terrestre supposé isotherme. Si l'on suppose que le gaz satisfait à l'équation d'état des gaz parfaits  $pV = nRT$  alors  $\rho = \frac{m}{V} = n\frac{M}{V} = \frac{Mp}{RT}$  où  $M$  est la masse molaire du gaz. L'équilibre du gaz s'écrit alors :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz = -\frac{dz}{\lambda}$$

avec  $\lambda = RT/Mg$ . Ce qui donne, si on néglige logiquement les variations de  $g$  avec l'altitude, une variation exponentielle de la pression avec l'altitude  $p(z) = p(0) \exp(-\frac{z}{\lambda})$  avec  $\lambda \approx 8000$  m. Les résultats sont légèrement modifiés dans l'atmosphère réelle qui est non isotherme car en altitude l'air est plus froid donc plus dense. A 5000 mètres la pression de l'air a diminué environ de moitié, ce qui explique le manque d'oxygène ressenti par les alpinistes en haute montagne. Toutefois cette longueur caractéristique de décroissance de la pression étant grande, on pourra toujours en hydrostatique à l'échelle du laboratoire négliger la compressibilité des gaz.

### 4.1.3 Cas d'une atmosphère adiabatique

Une atmosphère est stable d'une part si elle est en équilibre hydrostatique (Equ. 6.1) et d'autre part si cet équilibre est stable. Pour tester la stabilité il faut imaginer le déplacement vers le haut d'une petite masse d'air et montrer que la force de rappel est stabilisante, c'est-à-dire que la nouvelle masse volumique de la masse d'air est plus forte que la masse volumique du fluide environnant. En supposant que le déplacement d'une particule fluide de  $dz$  vers le haut se fait de façon adiabatique (sans échange de chaleur) l'atmosphère marginale sera l'atmosphère adiabatique où partout la force de rappel sera nulle. Etudions cette atmosphère adiabatique.

Calculons  $(d\rho/dz)_{adia}$  en considérant par exemple le fluide comme un gaz parfait, on plutôt calculons  $(dT/dz)_{adia}$  ce qui s'avère plus simple.

On a  $pV^\gamma = Cste$  soit  $\rho/\rho_0 = (p/p_0)^{1/\gamma}$  ou  $T/T_0 = (p/p_0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ . En calculant la dérivée logarithmique de cette dernière relation il vient :

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp}{p},$$

soit

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T}{p} \frac{dp}{dz}.$$

En reportant dans (Equ. 6.1) :

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho T}{p} g.$$

En utilisant le fait que  $pM = \rho RT$ , que  $\gamma = c_p/c_v$  et que  $c_p - c_v = R/M$  il vient donc

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{adia} = -g/c_p \approx -9,8K/km.$$

Une atmosphère réelle sera stable si en chaque point sa température décroît moins vite que celle d'une atmosphère adiabatique.

## 4.2 Equilibre de la pression dans un référentiel non galiléen

Nous avons jusqu'à présent fait les calculs de pression dans le cas où la seule force volumique est la force de gravité. Mais les équations sont les mêmes pour n'importe quelle force volumique (par exemple la force de Laplace pour un fluide conducteur ou la force magnétique pour un fluide magnétique appelé ferrofluide) mais aussi pour n'importe quelle pseudo-force apparaissant dans un référentiel non galiléen. Dans le cas général il faudra écrire :  $\vec{\nabla} p = \rho(\vec{g} - \vec{a}_e - \vec{a}_c)$  c'est-à-dire que le gradient de pression est colinéaire à la *gravité apparente*. L'accélération d'entraînement  $\vec{a}_e$  s'écrit comme la somme de l'accélération de l'origine du référentiel relatif  $O'$ , de l'accélération angulaire et de l'accélération centrifuge, et où  $\vec{a}_c$  est l'accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$$

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}).$$

Comme le fluide est au repos dans le référentiel relatif (hydrostatique) la force de Coriolis est nulle et de même la vitesse angulaire doit être constante. Si  $\rho$  est constant on peut écrire les termes restant sous la forme d'un gradient et l'on obtient :

$$\vec{\nabla} \frac{p}{\rho} = \vec{\nabla}(-gz) - \vec{\nabla} \left( \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \cdot \vec{r} \right) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left( \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right)^2.$$

Soit

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \cdot \vec{r} - \frac{1}{2} \left( \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right)^2 = 0.$$

Finalement, le gradient de pression est colinéaire à la "gravité apparente".

*Nota* : Si l'axe de rotation n'est pas vertical, dans le référentiel tournant  $\vec{g}$  n'est plus un vecteur de direction constante et le fluide n'est donc plus au repos.

### • Exercices :

- Trouver la forme de la surface libre d'un récipient plein d'eau ayant un mouvement horizontal rectiligne uniformément accéléré avec  $a = g/10$ .
- Trouver la forme de la surface libre d'un récipient plein d'eau de forme quelconque en rotation uniforme autour d'un axe vertical à la vitesse angulaire  $\Omega = 10 \text{ rad/s}$ .

## 4.3 La poussée d'Archimède

Considérons l'action des forces de pression appliquées sur un volume totalement immergé dans un liquide. Notons que ce calcul est un cas particulier du calcul général des forces s'exerçant sur une

particule fluide (voir § 5.6). Sur chaque élément de surface nous avons la force normale de pression :  $\vec{df} = -p dS \vec{n}$ . Rappelons que par convention,  $\vec{n}$  est la normale à la surface  $dS$  et cette expression donne alors la force appliquée par le milieu où *pointe* la normale sur le milieu d'où sort la normale. La force totale du fluide environnant sur la surface  $S$  limitant le volume  $V$  est alors :

$$\vec{F} = \vec{F}_S = \oint_S \vec{df} = - \oint_S p dS \vec{n} = - \oint_S p \vec{dS}.$$

Calculons la projection de cette force sur n'importe quelle direction, par exemple  $\vec{e}_x$  :

$$F_x = \vec{F} \cdot \vec{e}_x = - \oint_S (p \vec{e}_x) \cdot \vec{dS}.$$

En appliquant le théorème de la divergence (Green-Ostrogradsky) :  $F_x = - \iiint_V \operatorname{div}(p \vec{e}_x) d\tau$ . Or  $\operatorname{div}(p \vec{e}_x) = \frac{\partial p}{\partial x}$ , donc  $F_x = - \iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} d\tau$ . En refaisant le calcul pour les directions  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  on obtient :

$$\vec{F} = - \iiint_V \vec{\nabla}(p) d\tau.$$

Si maintenant le fluide est au repos, c'est-à-dire en équilibre hydrostatique dans le champ de gravité nous avons :  $\vec{\nabla}(p) = \rho_{\text{fluide}} \vec{g}$  donc :

$$\vec{F} = - \iiint_V \rho_{\text{fluide}} \vec{g} d\tau = -\vec{g} \iiint_V \rho_{\text{fluide}} d\tau = -m_f \vec{g},$$

où  $m_f$  est la masse de fluide qu'occuperait ce volume  $V$ . C'est le célèbre théorème d'Archimède :

*Tout corps plongé dans un liquide reçoit de la part de celui-ci une poussée dirigée de bas en haut, égale au poids du volume du liquide déplacé.*

La démonstration est valable également pour un fluide stratifié où la masse volumique dépend de l'altitude. C'est cette force qui fait s'envoler un ballon gonflé à l'hélium, remonter une bulle d'air dans l'eau ou flotter un tronc d'arbre.

La poussée d'Archimède est aussi à l'origine de la dynamique atmosphérique, océanique et tellurique.

#### Exercices :

- Expliquer pourquoi un cube plus léger que l'eau peut rester posé au fond d'un récipient plein d'eau à condition d'être bien lisse. A quel condition va-t-il remonter ?
- Une balle de ping-pong flotte à la surface d'un seau d'eau placé dans un ascenseur. L'ascenseur démarre, que se passe-t-il pour la balle ?

### 4.3.1 Le poisson et le ludion

Si le poids est supérieur à la poussée d'Archimède, l'objet coule, si c'est le contraire il s'élève. On appelle *poids apparent* la somme du poids et de la poussée d'Archimède. Un ballon dirigeable ou une montgolfière en équilibre ont un poids apparent nul.

On peut se demander comment font les poissons pour flotter entre deux eaux ? Eux aussi compensent exactement leur poids par la poussée d'Archimède. Pour cela ils changent leur volume en gonflant plus ou moins leur vessie natatoire remplie d'air. En augmentant la pression de l'air dans cet organe ils diminuent de volume, augmentent leur poids apparent et descendent. Ils remontent en décompressant le même volume d'air.



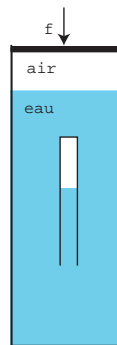


FIG. 4.8 – Schéma de principe d'un ludion

Le *ludion* est un jouet basé sur le même principe. Un tube scellé en haut (par exemple un tube de stylo Bic vide, bouché en haut à la pâte à modeler et lesté en bas par un trombone pour qu'il reste vertical) contient juste la quantité d'air nécessaire pour le faire flotter. On le place dans un récipient d'eau fermé déformable (par exemple une bouteille en plastique ou un tube fermé par une membrane déformable (figure 6.8)). En comprimant la bouteille on augmente la pression de l'eau à l'intérieur ce qui diminue le volume d'air dans le ludion et cause sa lente descente vers le fond. Le but du jeu étant de le maintenir le plus longtemps possible entre deux eaux.

Un sous-marin lui aussi annule son poids apparent mais cette fois sans changer de volume. Il augmente sa masse totale en vidant l'air de ses ballasts et en les remplissant d'eau. Il remonte vers la surface en purgeant ses ballasts, c'est-à-dire en y injectant à nouveau de l'air venant de ses réserves d'air comprimé.

## 4.4 Equilibre des corps flottants

Un navire flotte à la surface entre l'air et l'eau lorsque son poids est équilibré par la poussée d'Archimède sur son volume immergé (la poussée d'Archimède de l'air est négligeable devant celle de l'eau). Ce qui compte c'est bien le volume immergé et non la masse volumique. On arrive même à faire flotter des bateaux taillés dans du granit ! Si une personne monte sur une petite embarcation, la coque s'enfonce jusqu'à ce que le volume supplémentaire immergé équilibre exactement son poids. Du coup la mesure du poids d'un navire (souvent nommé *déplacement* en terme de marine) est équivalente à la mesure de son volume immergé et les cargos possèdent à cet effet des graduations à différents endroits sur la coque pour pouvoir déduire leur masse totale de la position de leur ligne de flottaison (il existe même des graduations pour l'eau douce et d'autres pour l'eau de mer).

Mais pour que l'équilibre soit stable et que le bateau flotte à l'endroit, il ne suffit pas que les deux forces soient égales et opposées. Il faut encore que le moment de ces forces soient égaux et opposés. Le poids est une force qui s'applique au centre de masse de l'objet considéré mais qu'en est-il de la force de flottaison ?

### 4.4.1 Centre de carène

La poussée d'Archimède est l'intégrale d'une force de surface, mais on peut tout de même chercher son point d'application que l'on appelle indifféremment *centre de poussée* ou *centre de carène*

et que nous noterons C. En ce point le moment des forces de pression est nul.

$$\vec{M}_O = \oint \vec{OM} \wedge d\vec{f} = - \oint p \vec{OM} \wedge d\vec{S} = - \iiint \text{rot}(p \vec{OM}) d\tau = \vec{OC} \wedge \vec{f}_{\text{Archi}}.$$

Ce point correspond au barycentre de la masse de liquide déplacée c'est donc aussi le centre du volume immergé pour un liquide de masse volumique constante. La connaissance de la position de ce centre de poussée est fondamentale pour la stabilité des navires. Toutefois, autant le centre de gravité d'un navire que nous noterons G a une position fixe tant que des masses ne se déplacent pas à l'intérieur du bateau, autant le centre de carène peut se déplacer car dès que le bateau va s'incliner ce n'est plus la même surface qui est mouillée et donc soumise à la pression de l'eau.

Une condition *suffisante* d'équilibre stable est que le centre de gravité soit au-dessous du centre de carène (figure 6.9a). Mais ce n'est pas une condition *nécessaire* et la plupart des navires, en particulier les paquebots ou les porte-conteneurs ont leur centre de gravité bien au-dessus du centre de carène ! Comment font-ils ?

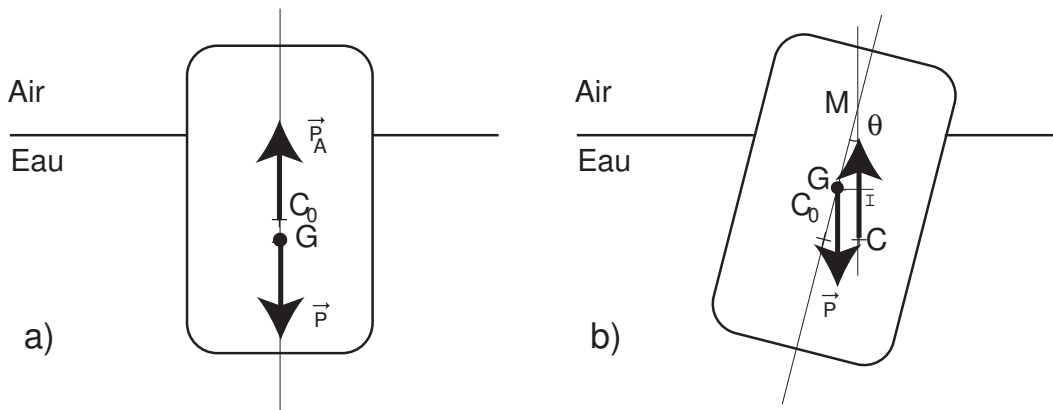


FIG. 4.9 – Equilibre d'un corps flottant. a) Centre de poussée  $C_0$  au-dessus du centre de gravité G. b) Position du nouveau centre de poussée C et du métacentre M lors d'une inclinaison de  $\theta$ .

#### 4.4.2 Notion de métacentre

Un équilibre stable est par définition un état où un petit écart à la position de départ conduit à une force ou à un couple de rappel vers la position de départ. Considérons donc notre coque inclinée sur le côté d'un angle  $\theta$  (figure 6.9b). Le navire étant incliné le volume immergé et donc le centre de carène sont déplacés dans le sens du mouvement, ici vers la droite (de  $C_0$  en C). Le couple de redressement exercé par le poids appliqué en G et par la poussée d'Archimède appliquée en C est donc :

$$\vec{M}(\theta) = \vec{P} \wedge \vec{IG} = mg GM \sin \theta$$

où M est à l'intersection de la verticale passant par  $C_0$  lorsque  $\theta = 0$  et de la verticale passant par C lorsque  $\theta \neq 0$ . Ce couple est stabilisant, même si G est au-dessus de C du moment qu'il reste à gauche de la verticale de C. Dans la limite où  $\theta$  tend vers 0, M tend vers  $M_0$ . Le point  $M_0$  est appelé *métacentre* et il correspond au centre de courbure en  $C_0$  de la courbe décrite par C lorsque  $\theta$  varie. L'équilibre est stable si  $M_0$  est situé au-dessus de G. Pour une discussion plus complète on peut lire la présentation très ludique de ce sujet pourtant assez technique dans l'article [25].

On voit donc qu'il existe deux façons de stabiliser un corps flottant, soit en descendant le centre de gravité en lestant le bateau, c'est ce qui est appelé la stabilité de poids, soit en montant le métacentre en élargissant la coque, ce qui est appelé la stabilité de forme. Les bateaux de la coupe de l'Amérique et les trimarans illustrent de façon extrême ces deux possibilités.

La connaissance du couple de redressement  $\mathcal{M} = f(\theta)$  est très importante pour un architecte naval car cette courbe permet de déterminer le couple de rappel maximum, l'angle de stabilité maximum ainsi que l'angle de chavirage.

**Exercice :** Mettez un glaçon dans un verre d'eau. Il flotte. Pourquoi ? Le glaçon fondant plus vite dans sa partie immergée, expliquer ses mouvements successifs de bascule. A propos, pourquoi le niveau de l'eau reste inchangé lorsque le glaçon fond ? Pourtant on parle de montée des eaux lors des réchauffements climatiques. Comparer les différentes hypothèses suivantes : - dilatation de l'eau, - glaçon d'eau douce dans une mer salée, - glacier reposant sur les continents.



# Chapitre 5

## Fluides parfaits et équation d'Euler

### Sommaire

---

5.1	Notion de tenseur cartésien de rang 2 . . . . .	35
5.2	Le tenseur des contraintes $[\sigma]$ ( <i>stress tensor</i> ) . . . . .	36
5.3	Symétries du tenseur des contraintes . . . . .	37
5.4	Calcul de la contrainte dans une direction quelconque $\vec{\sigma}(\vec{n})$ . . . . .	37
5.5	Le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$ . . . . .	37
5.6	Principe fondamental de la dynamique et divergence de $[\sigma']$ . . . . .	38

---

Si dans l'équation de Navier-Stokes démontrée au § 5.6 page 38,

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \vec{\text{div}}[\sigma'],$$

on néglige les contraintes de surface (autres que la pression) exercées sur le volume de contrôle, alors  $\vec{\text{div}}[\sigma'] = \vec{0}$  et l'on obtient l'équation d'Euler, établie par Léonhard EULER en 1755 :

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g}}. \tag{5.1}$$

Cette équation est valable pour les fluides dits « parfait », ceux pour lesquels on néglige les effets de la viscosité. Ceci est en général justifiable loin des parois et si le nombre de Reynolds (que nous définirons au § 9.1) de l'écoulement est élevé.

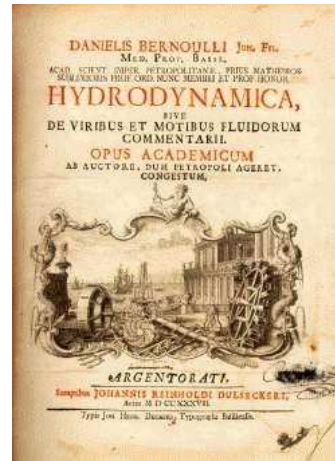
Le problème est bien posé si l'on connaît de plus les conditions aux limites sur  $\vec{v}$  et sur  $p$  et si l'on écrit la conservation de la masse,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$ .

### 5.1 Equation de Bernoulli

Un fluide parfait n'ayant par définition pas de viscosité, il ne peut pas dissiper d'énergie. On peut donc à partir de l'équation d'Euler trouver une équation de conservation de l'énergie, appelée équation de Bernoulli.



FIG. 5.1 – Portrait de Léonhard EULER (1707-1783)

FIG. 5.2 – Portrait de Daniel BERNOULLI (1700-1782) et première page de son traité « Hydrodynamica » publié en 1738. Bibliographie détaillée sur le site <http://www.bibmath.net/bios/index.php3>.

**Démonstration :** Voyons d'abord la démonstration classique de cette équation, nous verrons ensuite des généralisations possibles. On suppose donc :

1. un fluide de masse volumique constante ( $\rho = Cste$ )
2. un écoulement stationnaire ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ )
3. que les forces volumiques dérivent d'un potentiel :  $\vec{g} = -\vec{\nabla}(\Phi)$ . Dans le cas de la force de gravité  $\Phi = gz$  avec l'axe  $z$  dirigé vers le haut.

Alors l'équation d'Euler (Eq. 7.1) peut s'écrire :

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}(p + \rho gz)$$

Nous pouvons alors utiliser une relation du formulaire pour transformer partiellement le membre de gauche en un gradient. On a en effet l'identité :

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{B} + \vec{B} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

Si on l'écrit pour le vecteur  $\vec{A} = \vec{B} = \vec{v}$  on obtient :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}.$$

L'équation d'Euler s'écrit alors :

$$\boxed{\vec{\nabla} \left( \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2 \right) = \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}}. \quad (5.2)$$

Nous allons montrer que la quantité  $C = \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2$ , appelé parfois la « charge », reste constante sur une ligne de courant.

Par définition du gradient nous avons :

$$dC = \vec{\nabla}(C) \cdot \overrightarrow{dl} = (\vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \cdot \overrightarrow{dl}.$$

Donc si  $\overrightarrow{dl}$  est colinéaire à  $\vec{v}$ , ce qui est le cas le long d'une ligne de courant, le terme de droite est nul et  $dC = 0$ . Ceci prouve bien que  $C = C_{ste}$  sur une ligne de courant (il n'y a pas de « perte de charge »). Toutefois cette constante peut-être différente pour chaque ligne de courant.

Le même raisonnement permet de montrer que  $C$  est aussi une constante sur une ligne de vorticité (on appelle *vorticité* la quantité  $\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}$ ).

Si l'écoulement est irrotationnel (ou potentiel), c'est-à-dire si  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$  alors la constante  $C$  est la même sur toutes les lignes de courant.

- Le terme  $p$  est appelé *pression statique* (ou locale).
- Le terme  $\rho g h$  est appelé *pression hydrostatique*.
- Le terme  $\frac{1}{2}\rho v^2$  est appelé *pression dynamique*.
- $p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2$  est appelé *pression totale* ou pression de stagnation ou encore pression d'arrêt. En effet la charge étant constante sur une ligne de courant, cette pression totale est aussi la pression que l'on mesure en un point où la vitesse est nulle.

## 5.2 Généralisation de l'équation de Bernoulli

### 5.2.1 Cas d'un fluide barotrope

Si le fluide est compressible, mais que la masse volumique  $\rho$  en un point de l'écoulement ne dépend que de la pression  $p$  et pas de la température par exemple, on dit que le fluide est *barotrope* (cas d'une transformation isotherme ou adiabatique pour un gaz parfait par exemple). Dans ce cas on peut montrer que le terme  $\frac{\vec{\nabla}(p)}{\rho}$  peut se mettre sous la forme d'un gradient :

$$\frac{\vec{\nabla}(p)}{\rho} = \vec{\nabla} \left( \int \frac{dp}{\rho(p)} \right).$$

En effet par définition du gradient on a :  $\vec{\nabla} \left( \int \frac{dp}{\rho(p)} \right) \cdot \overrightarrow{dl} = d \left( \int \frac{dp}{\rho(p)} \right) = \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{\vec{\nabla} p}{\rho(p)} \cdot \overrightarrow{dl}$ . Et si l'écoulement est stationnaire et si les forces volumiques dérivent d'un potentiel, la charge peut se mettre sous la forme :  $C = \int \frac{dp}{\rho(p)} + gz + \frac{1}{2}v^2$ .

### 5.2.2 Cas d'un écoulement instationnaire mais irrotationnel

Si l'écoulement est instationnaire (mais incompressible et que les forces volumiques dérivent d'un potentiel), l'équation d'Euler peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2 \right) = \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = 0.$$

Si l'écoulement est *irrotationnel* ( $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ ), cela veut dire que  $\vec{v}$  dérive d'un potentiel et l'on a  $\vec{v} = \vec{\nabla}(\Phi)$  et donc  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ . On peut généraliser l'équation de Bernoulli à chaque instant par :

$$C(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2.$$

La charge  $C(t)$  ne dépend pas de la position mais uniquement du temps. A chaque instant  $C = C_{ste}$  dans toute la zone irrotationnelle. On peut d'ailleurs faire disparaître cette constante en redéfinissant le potentiel de vitesse comme  $\Phi' = \Phi - \int_0^t C(t)dt$ . Vérifiez-le.

### 5.2.3 Effet Coanda

Réécrivons l'équation d'Euler pour un écoulement stationnaire en négligeant les effets de gravité :

$$\rho \left( \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) = \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}(p).$$

Si les lignes de courant sont courbées on peut utiliser le référentiel tangent et l'on note  $\vec{n}$  le vecteur unitaire dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire au point considéré et  $\vec{t}$  le vecteur tangent. L'accélération s'écrit alors comme la somme d'une accélération tangente  $\frac{dv}{dt}$  (dérivée du module de la vitesse) et d'une accélération centripète  $\frac{v^2}{R}$  ( $R$  est le rayon de courbure local de la trajectoire) :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}.$$

L'équilibre de la composante radiale du gradient de pression et de la force centrifuge s'écrit donc :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{R}.$$

C'est ce que l'on appelle l'effet « Coanda ». La pression augmente lorsque on s'éloigne du centre de courbure des lignes de courant. On peut utiliser cette relation pour expliquer la figure 7.3 où une balle est maintenue par une force dirigée vers le jet courbé. Cette force est aussi très nettement mesurable si l'on approche le dos d'une cuillère d'un filet d'eau sous un robinet. Cet effet Coanda n'est pas sans relation avec l'effet Magnus et l'effet de portance sur une aile décrits aux § 7.3.4 et 7.3.5.

## 5.3 Quelques applications de l'équation de Bernoulli

### 5.3.1 Anémomètre à tube de Pitot

Cet appareil, inventé par Henri PITOT au XVIII<sup>e</sup> siècle, permet à peu de frais de mesurer la vitesse moyenne d'un écoulement (figure 7.4).





FIG. 5.3 – Effet Coanda

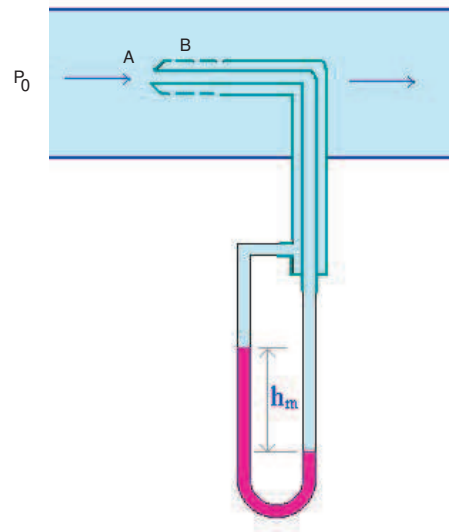


FIG. 5.4 – Anémomètre à tube de Pitot

Supposons un écoulement uniforme de vitesse  $U_\infty$  et à la pression  $P_\infty$  loin de l'obstacle. Le tube de Pitot étant profilé il perturbe peu l'écoulement. Une fois les niveaux des liquides équilibrés dans le manomètre il n'y a plus d'écoulement à l'intérieur du tube et les lois de l'hydrostatique s'appliquent  $P_A - P_B = \rho_m g h_m$  où  $\rho_m$  est la masse volumique du liquide manométrique.

Sur la ligne de courant venant de l'infini et passant par le point de stagnation A on a  $U_A = 0$  soit :

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_A$$

Cette même ligne de courant après A est défléchie le long du tube et passe au point B, donc on a aussi :

$$P_B + \frac{1}{2}\rho U_B^2 = P_A = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2.$$

On supposera que la vitesse en B est déjà revenue à sa valeur à l'infini,  $U_B = U_\infty$ , alors cette équation nous montre que la pression en B est aussi égale à la pression  $P_\infty$ .

La différence entre la pression de stagnation mesuré en A et la pression à la paroi mesurée en B est donc proportionnelle au carré de la vitesse :  $\Delta P = P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$ , soit finalement :

$$U_\infty = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\rho_m g h_m}{\rho}}.$$

Le tube de Pitot fonctionne également si le fluide n'est pas vraiment parfait à condition d'avoir un écoulement rapide (nombre de Reynolds élevé) pour que l'épaisseur des couches limites visqueuses soit faible. Nous verrons dans le chapitre 12 que dans ce cas le gradient de pression transverse à la couche limite est négligeable et que l'on peut bien confondre  $P_B$  et  $P_\infty$ .

### 5.3.2 Effet Venturi et débitmètre de Venturi

Considérons une conduite dont la section est localement et progressivement diminuée (figure 7.5). Une mesure de la chute de pression entre l'entrée du tube et l'endroit où la section est la plus faible va

permettre, à condition de connaître les sections, de calculer le débit passant dans la conduite, et cela sans pièce mobile !

En régime stationnaire  $p + \frac{1}{2}\rho U^2$  est constant sur les lignes de courant. Donc si on suppose de plus que la vitesse est uniforme dans toute section de la conduite (ce qui est réaliste pour un fluide parfait), on a si on appelle respectivement A, B et C, les trois points de mesure

$$P_A + \frac{1}{2}\rho U_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho U_B^2 = P_C + \frac{1}{2}\rho U_C^2$$

Comme de plus on conserve le débit volumique  $Q = Q_A = Q_B = Q_C$  soit  $U_A S_A = U_B S_B = U_C S_C$ , et donc on peut relier la différence de pression entre A et B à la vitesse et donc au débit  $Q$  :

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho(U_B^2 - U_A^2) = \frac{1}{2}\rho U_A^2 \left[ \left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2 - 1 \right]$$

soit

$$Q = S_A \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho} \left( \frac{S_B^2}{S_A^2 - S_B^2} \right)}.$$

La mesure de  $P_A - P_B$  et la connaissance de  $S_A$ ,  $S_B$ , et de la masse volumique  $\rho$  permettent de déterminer le débit.

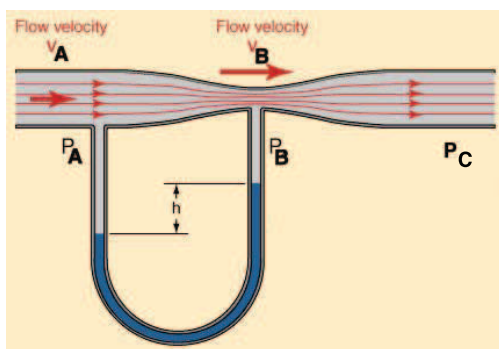


FIG. 5.5 – Débitmètre de Venturi

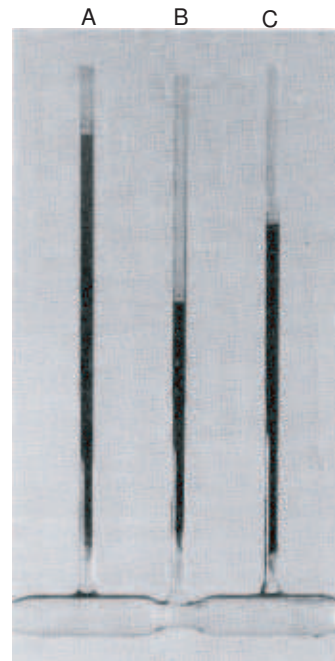


FIG. 5.6 – Démonstration de l'effet Venturi. D'après [28] p. 120.  $P_A > P_C > P_B$ .

Parfois la pression  $P_B$  est tellement faible au niveau de la contraction que l'on y observe des bulles de cavitation (dégagement de vapeur au sein du liquide si  $P_B$  devient inférieur à la pression de vapeur saturante du liquide).

Cet effet Venturi est utilisé dans les *trompes à eau* pour diminuer la pression de l'air dans une enceinte, ou pour projeter de la peinture avec un aérographe.

**Exercice :** refaire l'étude du débitmètre de Venturi pour un fluide compressible.

Notons que dans la figure 7.6, la pression en C est plus faible que la pression en A. Ceci est due aux pertes de charges dans le rétrécissement, pertes de charge qui n'existent que parce que le fluide n'est pas vraiment parfait et qu'il y a dissipation d'énergie. Une autre cause possible est que le rétrécissement est un peu trop brusque et qu'il se forme un jet en sortie (l'écoulement n'est alors plus homogène dans la section en C).

L'*artériosclérose* est une maladie où le diamètre des artères est localement diminué par des dépôts de graisse. L'effet Venturi explique en partie l'évolution grave de cette maladie.

### 5.3.3 Expérience de Torricelli

L'expérience de Torricelli consiste à vider un récipient par un petit trou situé à la profondeur  $H$  sous la surface du liquide (figure 7.7). Si le récipient est large on peut négliger le caractère instationnaire de l'écoulement ( $h$  diminue doucement) et sur une ligne de courant reliant un point de la surface à un point dans le trou on a :  $P_{atm} + \rho gh + 0 = P_{atm} + 0 + \frac{1}{2}\rho U^2$  soit :

$$U = \sqrt{2gh}.$$

Une clepsydre (récipient rempli d'eau utilisé il y a bien longtemps pour mesurer les durées) étant basé sur ce principe, elle se vide de plus en plus lentement, contrairement à un sablier qui s'écoule lui à vitesse constante.

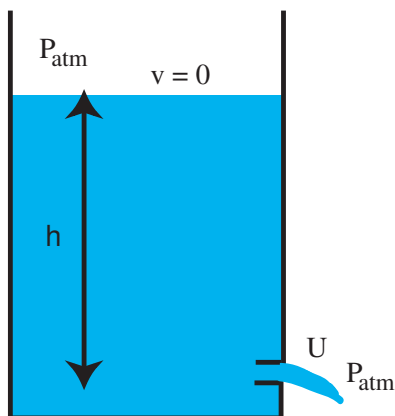


FIG. 5.7 – Expérience de Torricelli

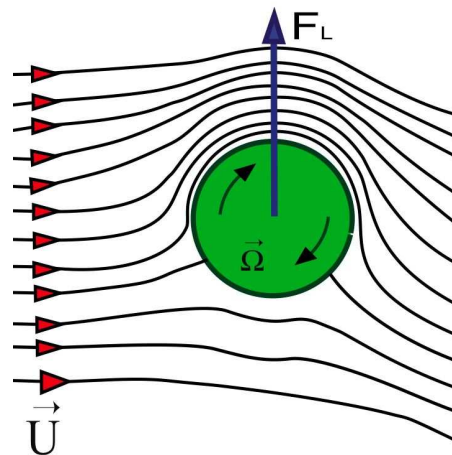


FIG. 5.8 – Exemple de portance acquise par effet Magnus d'une balle tournant sur elle-même.

**Exercice :** En appliquant la conservation du débit, trouver l'équation régissant  $h(t)$  pour un récipient cylindrique de section  $S$  et de section du trou  $s$ . Montrer en particulier que le temps de vidange vaut  $\frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ , où  $h_0$  est la hauteur initiale de remplissage au-dessus du trou. Quelle doit-être la forme du récipient  $S(h)$  pour que l'écoulement se fasse à vitesse constante ?

### 5.3.4 Effet Magnus

Le nom d'effet Magnus vient du nom du physicien allemand Heinrich Gustav Magnus (1802-1870) qui a décrit ce phénomène en 1852. Dans de nombreux sports on « lifte » ou on « brosse » les

balles, c'est-à-dire qu'on leur donne une rotation sur elles-mêmes qui a pour effet de courber leur trajectoire. La encore cet effet peut-être décrits par le théorème de Bernoulli.

Prenons une balle tournant sur elle-même avec une vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$  négative (figure 7.8). Dans le référentiel du centre de masse de cette balle il existe un écoulement d'air de gauche à droite d'intensité  $\vec{U}$ . A cause de l'existence de couches limites au voisinage de la balle (zones où la viscosité du fluide se fait sentir, voir § 12 page 109) et de la condition de non-glissement du fluide au voisinage de la surface de la balle (§ 9.2.1 page 78) le fluide va aller plus vite que  $\vec{U}$  juste au-dessus de la balle (les vitesses s'ajoutent) et légèrement moins vite juste au-dessous (les vitesses se soustraient). La relation de Bernoulli nous dit alors que la pression va être un peu plus forte au-dessous qu'au-dessus de la balle avec pour conséquence une force dirigée ici de bas en haut (cas d'une balle brossée) appelée portance  $\vec{F}_L$ . Ici nous avons une portance positive qui fait monter la balle.

On peut montrer que  $\vec{F}_L \propto \vec{U} \wedge \vec{\Omega}$ . Une autre façon de décrire les choses est que, comme nous le verrons dans l'étude de la portance sur une aile d'avion, il existe une portance parce qu'apparaît une circulation du vecteur vitesse  $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$  autour de l'objet.

Une autre application classique de l'effet Magnus est la propulsion par cylindres tournants imaginée par Anton FLETTNER et pour la première fois utilisée sur le Baden Baden en 1926. L'idée a ensuite été perfectionnée pour l'Alcyone, bateau de J.-Y. COUSTEAU. Dans ce cas la dissymétrie entre les couches limites est contrôlée par aspiration asymétrique des couches limites plutôt que par la rotation du cylindre.

### 5.3.5 Portance d'une aile

Les deux figures suivantes représentent respectivement l'écoulement et les forces locales agissant sur une aile portante sous faible incidence. L'équation de Bernoulli permet d'évaluer assez simplement la portance sur une telle aile (pour plus de détail, voir le chapitre 11).

Si on compare deux lignes de courant passant respectivement juste au-dessous (zone 1) et juste au-dessus (zone 2) d'une aile de longueur  $L$  et d'envergure  $a$ , on peut écrire :

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2$$

et

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2$$

soit :

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(U_2^2 - U_1^2) = \frac{1}{2}\rho(U_2 - U_1)(U_2 + U_1).$$

Au premier ordre on peut écrire  $U_2 + U_1 \approx 2U_\infty$  et la portance peut s'écrire :

$$Portance \approx \int_0^L a (P_1 - P_2) dl \approx a\rho U_\infty \left[ \int_0^L (U_2 - U_1) dl \right] = -a\rho U_\infty \Gamma$$

où  $\Gamma$  est la circulation autour de l'aile calculée dans le sens trigonométrique. Ce calcul est très approximatif mais le résultat est exact comme nous le verrons au chapitre 11 page 99 !

Notons que dans ce type d'approche, basée sur l'équation d'Euler et la conservation de l'énergie, il n'existe pas de force de traînée puisqu'il n'y a pas de viscosité (voir § 7.4 page suivante). En effet sans viscosité il n'existe pas de vorticité, ni de couche limite, ni de décollement de couche limite, un phénomène pourtant capital pour expliquer le décrochage d'une aile.

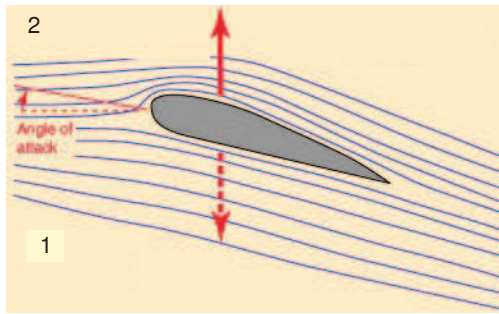


FIG. 5.9 – Portance sur une aile en incidence. La portance exercée par l'air sur l'aile est égale et opposée à l'action de l'aile déviant l'air vers le bas.

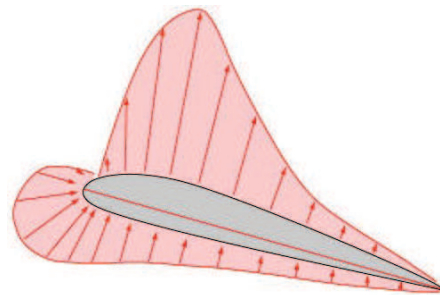


FIG. 5.10 – Répartition réelle de pression autour d'une aile.

### 5.3.6 Amplification des vagues par le vent

L'apparition des vagues sous l'action du vent peut se comprendre comme une instabilité (l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, voir ?? page ??) dont l'effet déstabilisant s'explique par l'équation de Bernoulli. En effet si on considère une interface air-eau légèrement déformée et que l'on décrit les lignes de courant dans le référentiel qui se déplace avec les vagues (afin de pouvoir appliquer l'équation de Bernoulli stationnaire), le vent est accéléré au-dessus des crêtes, la pression y est donc plus faible. De même la vitesse du vent décroît au niveau des creux, la pression y est plus forte. Le même raisonnement peut être fait dans l'eau. En conséquence l'amplitude de la déformation initiale de l'interface croît. Ce sont les forces de gravité et de tension de surface qui vont limiter l'amplitude des vagues.

### 5.3.7 Jet incident sur une plaque

**Exercice :** Calculer la force appliquée par un jet d'eau (bidimensionnel et horizontal), d'épaisseur  $h$  rencontrant une plaque plane inclinée d'un angle  $\alpha$  vis-à-vis de la verticale. Montrer que la force par unité de largeur perpendiculaire à la plaque  $F_{\perp}$  vaut :

$$F_{\perp} = \rho U^2 h \cos \alpha.$$

## 5.4 Paradoxe de d'Alembert

On nomme paradoxe de d'Alembert le fait que dans le cadre de l'équation d'Euler il n'existe pas de force de traînée sur un obstacle (force dans le sens de l'écoulement appliqué par le fluide sur l'obstacle) bien qu'on puisse calculer une portance. Les forces de traînée existent pourtant bien dans la réalité, mais elles sont dues en grandes parties à l'existence de couches limites (éventuellement décollées) qui changent la distribution de pression autour de l'obstacle par rapport au cas du fluide parfait.

Dans le cas d'une aile, le flux de quantité de mouvement est défléchi ce qui donne une portance, par contre il n'y a pas de perte de quantité de mouvement ce qui correspondrait à une force de traînée et à une dissipation d'énergie.



# Chapitre 6

## La viscosité des fluides

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Equilibre de la pression dans le champ de pesanteur</b>	<b>42</b>
6.1.1	Cas d'un fluide de masse volumique constante	43
6.1.2	Cas d'un fluide de masse volumique variable	45
6.1.3	Cas d'une atmosphère adiabatique	46
<b>6.2</b>	<b>Equilibre de la pression dans un référentiel non galiléen</b>	<b>47</b>
<b>6.3</b>	<b>La poussée d'Archimède</b>	<b>47</b>
6.3.1	Le poisson et le ludion	48
<b>6.4</b>	<b>Equilibre des corps flottants</b>	<b>49</b>
6.4.1	Centre de carène	49
6.4.2	Notion de métacentre	50

---

Un fluide parfait n'a pas de viscosité, c'est-à-dire que deux veines de fluides vont pouvoir s'écouler côte à côte à des vitesses différentes sans interagir. Pour un fluide réel, à cause de l'agitation moléculaire d'origine thermique, il y a des collisions entre molécules des deux veines et donc échange progressif de quantité de mouvement. La viscosité est le coefficient qui mesure cette diffusion de la quantité de mouvement.

### 6.1 Tenseur des déformations $[\epsilon]$ (*strain tensor*)

Lorsqu'on tire avec une force constante sur une barre de métal, elle commence par s'allonger. Ensuite la longueur de la barre reste constante (sauf en cas de fluage) et l'on peut alors définir l'allongement relatif d'un vecteur  $\overrightarrow{AB}$  aligné avec l'axe de traction par la quantité :

$$\vec{\epsilon}(\overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{AB}}{\|AB\|}.$$

A cette déformation longitudinale s'ajoutent des déformations transverses de compression. Si maintenant la contrainte à lieu dans une direction quelconque, on peut connaître la déformation d'un volume élémentaire si on connaît les 9 coefficients  $\epsilon_{ij}$  et donc le *tenseur des déformations*  $[\epsilon]$  (appelé *strain tensor* en anglais). Le tenseur des déformations est la réponse du solide à une contrainte appliquée.

Dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire [13] il y a proportionnalité entre le tenseur des déformations  $[\epsilon]$  et le tenseur des contraintes  $[\sigma]$ , c'est-à-dire qu'il existe un tenseur de rang 4 tel que :

$$\epsilon_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl}.$$

Heureusement les propriétés d'isotropie du matériau permettent de ramener les  $9 \times 9 = 81$  coefficients du tenseur  $[A]$  à seulement deux coefficients : le module d'Young,  $E$ , (s'exprime en GPa par exemple) qui caractérise la raideur du matériau et le coefficient de Poisson,  $\mu$ , (sans dimension  $0 < \mu < \frac{1}{2}$ ) qui caractérise sa diminution de volume sous compression.

## 6.2 Tenseur des taux de déformation (rate of strain tensor) ou tenseur des gradients de vitesse $[G]$

Pour un fluide soumis à une contrainte constante, la déformation se poursuit indéfiniment, contrairement au cas du solide où elle s'arrête au bout d'un temps fini. Par contre, la « vitesse de déformation » va être fonction de l'intensité de la contrainte. On nomme cette vitesse de déformation, *taux de déformation*. On peut donc définir un tenseur des taux de déformation  $[\dot{\epsilon}]$ , dérivée par rapport au temps du tenseur des déformations, qui n'est rien d'autre qu'un tenseur que nous avons déjà rencontré au chapitre 5, le *tenseur des gradients de vitesse* :  $[\dot{\epsilon}] = [G] = \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right]$ .

$$[\dot{\epsilon}] = \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon] = [G].$$

Le tenseur  $[G]$  décrit la variation spatiale du vecteur vitesse au voisinage d'un point. En effet la différence de vitesse entre un point  $\vec{r}$  et un point  $\vec{r} + \vec{dr}$  s'écrit :

$$\vec{v}(\vec{r} + \vec{dr}) - \vec{v}(\vec{r}) = \vec{dv} = [G] \cdot \vec{dr},$$

car

$$dv_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = \vec{\nabla} (v_i) \cdot \vec{dr}. \quad (6.1)$$

La dimension des coefficients  $G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  est l'inverse d'un temps (par exemple des  $s^{-1}$ ).

### 6.2.1 Décomposition d'un tenseur

Tout tenseur peut être décomposé en la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique. Pour le tenseur des gradients de vitesse, il suffit d'écrire :

$$[G] = [e] + [w] \quad (6.2)$$

avec

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.3)$$

et

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (6.4)$$

Par construction le tenseur  $[e]$  est un tenseur symétrique ( $e_{ij} = e_{ji}$ ) et  $[w]$  un tenseur antisymétrique ( $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ ).



### 6.2.2 Partie symétrique de $[G]$ ou tenseur $[e]$ des déformations pures

Le tenseur  $[e]$  (Equ. 8.3) étant symétrique est caractérisé par 6 coefficients indépendants.

Notons déjà que  $trace [e] = trace [G] = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div}(\vec{v})$ . Pour un fluide incompressible on a donc,  $trace [e] = 0$ .

Le tenseur  $[e]$  étant symétrique dans une base orthonormée il est en chaque point diagonalisable. Dans la base orthonormée construite localement sur ses vecteurs propres il s'écrit donc :

$$[e] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Il n'y a maintenant plus que trois coefficients (les valeurs propres) mais cette base locale est définie par trois autres coefficients (par exemple les trois angles d'Euler), ce qui redonne bien les 6 coefficients de départ. Si l'écoulement est incompressible,  $a + b + c = 0$ . Il y a donc de façon générique soit une direction contractante ( $a < 0$ ) et 2 directions dilatantes ( $b$  et  $c > 0$ ), soit l'inverse (figure 8.1).

Un tel écoulement qui n'induit pas de rotation de la particule fluide, est dit de *déformation pure*.

En conclusion, les termes symétriques du tenseur des gradients de vitesse  $[G]$  correspondent à des déformations pures.

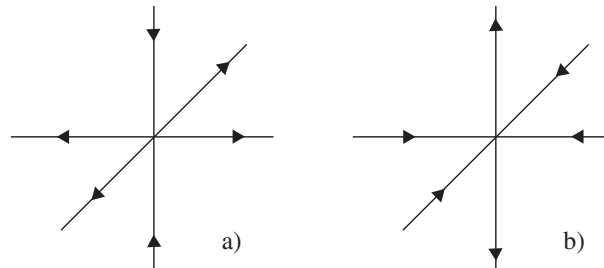


FIG. 6.1 – Les deux cas génériques d'une déformation pure d'un écoulement incompressible 3D dans sa base orthonormée locale des vecteurs propres. a) une direction contractante, b) une direction dilatante.

• **Exercices à deux dimensions :**

- Etudier les déformations d'un carré pendant  $dt$  (figure 8.2a) si  $[G] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ .
- De même étudier les déformations d'un carré pendant  $dt$  si  $[G] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ .

### 6.2.3 Partie antisymétrique de $[G]$ ou tenseur $[\omega]$ des rotations pures

La partie antisymétrique de  $[G]$  s'écrit :  $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ . Il est caractérisé par trois coefficients,

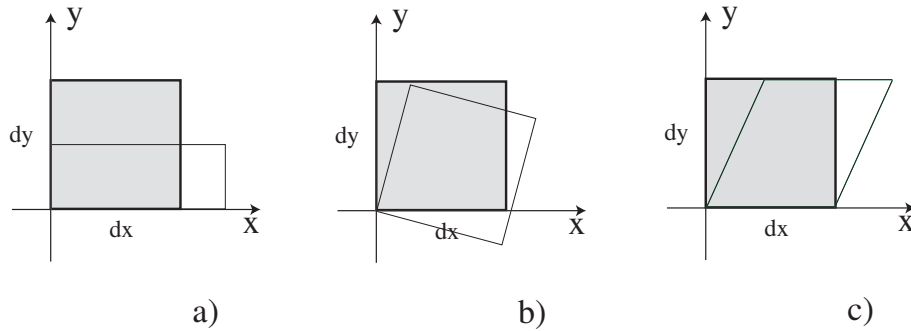


FIG. 6.2 – Trois cas de transformation d'une particule fluide dans un écoulement bidimensionnel.

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Construisons le **vecteur**  $\vec{\omega} = \{\omega_k\}$  ayant pour composantes  $\omega_k = -\epsilon_{ijk} \omega_{ij}$  où  $\epsilon_{ijk}$  vaut 0, -1 ou +1 selon que deux des indices sont égaux, qu'ils sont dans le sens indirect ou qu'ils sont dans le sens direct. Donc

$$\begin{cases} \omega_1 = -\omega_{23} + \omega_{32} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \omega_2 = \omega_{13} - \omega_{31} = \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \omega_3 = \omega_{21} - \omega_{12} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{cases}.$$

On constate donc que  $\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{v})$ . Le vecteur  $\vec{\omega}$  s'appelle le vecteur **vorticité** de l'écoulement, il caractérise la rotation locale des particules fluides. C'est un vecteur très important pour l'étude de la dynamique des tourbillons (voir chapitre 11).

On a donc  $\vec{dv} = [G] \cdot \vec{dl} = [e] \cdot \vec{dl} + [\omega] \cdot \vec{dl}$ . En utilisant l'équation 8.5, on a :

$$[\omega] \cdot \vec{dl} = \frac{1}{2} (\vec{\omega} \wedge \vec{dl}).$$

Donc si  $[e] = 0$ , on a  $\vec{dv} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \wedge \vec{dl}$ , ce qui correspond à une *rotation locale pure* de vecteur rotation instantanée  $\frac{1}{2} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}$ .

Il est important de noter qu'une rotation pure ne déforme pas la particule fluide et il n'y a pas de mouvements relatifs des particules à l'intérieur. Elle ne dissipe donc pas d'énergie.

Rappelons qu'un mouvement quelconque d'une particule fluide est la somme d'une translation pure ( $\vec{dv} = \vec{0}$ ), d'une rotation pure ( $\vec{dv} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \wedge \vec{dl}$ ) et d'une déformation pure ( $\vec{dv} = [e] \cdot \vec{dl}$ ). Seule la déformation pure dissipe de l'énergie. On peut facilement l'illustrer en faisant tourner côte à côte un œuf dur et un œuf cru. Le second est beaucoup plus difficile à mettre en rotation. Pourquoi ?

• **Exercices à deux dimensions :**

- Etudier les déformations d'un carré pendant  $dt$  (figure 8.2b) si  $[G] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ .
- Etude d'un cisaillement simple (qui n'est pas une déformation pure), l'écoulement de Couette plan :  $[G] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Tracer le profil de vitesse de cet écoulement, calculer sa vorticité et son taux de déformation. Application à la déformation d'un carré pendant  $dt$  (figure 8.2c).

### 6.3 Equation constitutive des fluides newtoniens

Nous avons vu au chapitre 7 que le seul terme qui va dissiper de l'énergie dans l'écriture du principe fondamental de la dynamique (équation 5.3 page 39) est le terme qui fait intervenir le tenseur des contraintes visqueuses  $\vec{\text{div}}[\sigma']$ . Or ni la translation globale de la particule fluide, ni sa rotation en bloc ne déforme la particule fluide (pas de mouvement relatif à l'intérieur). Seules les déformations pures dissipent de l'énergie, et donc le tenseur des contraintes visqueuses ne peut dépendre que de la partie symétrique du tenseur des déformations. Ce que l'on écrit :

$$[\sigma'] = f([e]).$$

On appelle **fluides newtoniens** les fluides pour lesquels le tenseur des contraintes visqueuses dépend **uniquement** et **linéairement** des valeurs **instantanées** des déformations. Soit :

$$\sigma'_{ij} = A_{ijkl}e_{kl},$$

où nous utilisons la convention d'Einstein (sommation implicite de tous les indices redoublés).  $[A]$  est alors un tenseur de rang 4. Si le milieu est isotrope (invariant dans les directions 1, 2 et 3), on peut montrer de façon générale [13] qu'un tel tenseur, au lieu d'avoir 81 coefficients indépendants, n'en a que trois,  $A$ ,  $A'$  et  $B$  et s'écrit :

$$A_{ijkl} = A \delta_{ik} \delta_{jl} + A' \delta_{il} \delta_{jk} + B \delta_{ij} \delta_{kl}.$$

$\delta_{ij}$  est l'indice de Kroneker (il vaut zéro si  $i \neq j$  et 1 si  $i = j$ ). Comme le tenseur des contraintes visqueuses est symétrique, ( $\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$ ) on en déduit  $A = A'$ .

$$\sigma'_{ij} = A(\delta_{ik}\delta_{jl}e_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}e_{kl}) + B\delta_{ij}\delta_{kl}e_{kl} = A(e_{ij} + e_{ji}) + B\delta_{ij}e_{ll} = 2Ae_{ij} + B\delta_{ij}e_{ll},$$

en effet le tenseur  $[e]$  est symétrique. On pose en général  $A = \eta$  et  $B = \zeta - \frac{2}{3}\eta$ . La constante  $\eta$  est appelée la viscosité de cisaillement et  $\zeta$  (zéta) la viscosité de volume. Alors :

$$\sigma'_{ij} = 2\eta(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{ll}) + \zeta\delta_{ij}e_{ll}. \quad (6.6)$$

Le premier terme est de trace nulle (en effet  $\delta_{ll} = 3$ ), le deuxième terme fait apparaître la trace du tenseur  $[e]$  ( $\text{trace}[e] = e_{ll}$ ) qui caractérise la compressibilité de l'écoulement. Or  $\text{trace}[e] = \text{trace}[G] = \text{div}(\vec{v})$ . Donc **pour un fluide incompressible**,  $\text{div}(\vec{v}) = e_{ll} = 0$ , et donc  $[\sigma'] = 2\eta[e]$ , soit :

$$\boxed{\sigma'_{ij} = 2\eta e_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}. \quad (6.7)$$

## 6.4 Divergence du tenseur des contraintes visqueuses

Partons de la relation 8.6. La composante  $i$  du vecteur divergence du tenseur des contraintes visqueuses s'écrit (voir § 5.6) :

$$\left\{ \overrightarrow{\text{div}} [\sigma'_{ij}] \right\}_i = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = 2\eta \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \delta_{ij} \frac{\partial e_{ll}}{\partial x_j}.$$

Or  $e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ , donc :

$$\left\{ \overrightarrow{\text{div}} [\sigma'_{ij}] \right\}_i = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \eta \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right).$$

$$\left\{ \overrightarrow{\text{div}} [\sigma'_{ij}] \right\}_i = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \left( \zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right).$$

$$\left\{ \overrightarrow{\text{div}} [\sigma'_{ij}] \right\}_i = \eta \nabla^2 v_i + \left( \zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} [\text{div}(\vec{v})].$$

Soit vectoriellement :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{div}} [\sigma'] = \eta \overrightarrow{\nabla}^2(\vec{v}) + \left( \zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \overrightarrow{\nabla} [\text{div}(\vec{v})]} \quad (6.8)$$

## 6.5 Equation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien

A partir du Principe Fondamental de la Dynamique nous avons trouvé (Eq. 5.3) :

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\nabla}(p) + \rho \vec{g} + \overrightarrow{\text{div}} [\sigma']$$

De l'équation 8.8 on déduit directement l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien éventuellement compressible :

$$\boxed{\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\nabla}(p) + \rho \vec{g} + \eta \overrightarrow{\nabla}^2 \vec{v} + \left( \zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \overrightarrow{\nabla} [\text{div}(\vec{v})]} \quad (6.9)$$

La viscosité  $\eta$  est appelé la viscosité de cisaillement ou aussi la viscosité dynamique (elle est parfois notée  $\mu$  et s'exprime en Pa.s). La viscosité de volume  $\zeta$  est en général faible, elle intervient par exemple dans l'atténuation du son dans un fluide. Dans le cas où le fluide est incompressible ( $\text{div}(\vec{v}) = 0$ ) on obtient **l'équation de Navier-Stokes** d'un fluide newtonien **incompressible** :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\nabla}(p) + \vec{g} + \nu \overrightarrow{\nabla}^2 \vec{v}} \quad (6.10)$$

Où  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  est appelé la viscosité cinématique (unité classique, le  $m^2 s^{-1}$ ). Comme la viscosité dynamique, c'est une propriété du fluide et pas de l'écoulement. La viscosité dynamique caractérise la viscosité de cisaillement par unité de masse contrairement à  $\eta$  qui est la viscosité de cisaillement par unité de volume.

## 6.6 Signification physique de la viscosité

Le coefficient de viscosité correspond au coefficient de diffusion de la quantité de mouvement. C'est grâce à la viscosité que le mouvement d'une couche de fluide peut induire des mouvements dans les couches voisines (voir films du CD [17]) et les exemples du § 10.1.6.

Le coefficient de viscosité caractérise la dissipation d'énergie. On peut montrer que la puissance dissipée par frottement interne n'existe que si la particule fluide est déformée. La puissance dissipée par unité de volume s'écrit :

$$\epsilon = -2\eta e_{ij}^2 = -\eta/2 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

avec une sommation implicite sur tous les indices redoublés et plus explicitement :

$$\epsilon = -2\eta \sum_i \sum_j e_{ij}^2 = -\eta/2 \sum_i \sum_j \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Cette puissance est dissipée en chaleur dans le fluide, d'où le signe moins.

## 6.7 Mesure de la viscosité

Il existe de nombreux appareils pour mesurer la viscosité. On distingue les *viscosimètres* utilisés pour les fluides newtoniens, qui font une mesure comparative et doivent donc être étalonnés, des *rhéomètres* qui mesurent directement les contraintes et les taux de déformation. On réalise en général des écoulements rhéologiques, c'est-à-dire des écoulements où un seul terme du tenseur des gradients de vitesse est non nul et il faut de plus qu'il soit constant en temps et homogène en espace. On appelle taux de cisaillement, traditionnellement noté  $\dot{\gamma}$ , ce coefficient. Par exemple  $\dot{\gamma} = \partial v_x / \partial y$ .

### 6.7.1 Quelques viscosimètres simples

Avec un viscosimètre à tube capillaire on mesure le temps d'écoulement d'un liquide visqueux à travers un tube mince (figure 8.3). Ce temps est proportionnel à la viscosité. On fait de même dans un viscosimètre à chute de bille, où cette fois l'on mesure le temps de chute d'une bille à travers un tube préalablement rempli du liquide à tester (figure 8.4). Dans la méthode de la *louche percée* utilisée dans l'industrie de la peinture, on mesure le temps de vidange d'une louche percée d'un trou calibré.

### 6.7.2 Quelques exemples de rhéomètre

Dans un rhéomètre on cherche à réaliser des écoulements particuliers, où les déformations sont homogènes en espace et constantes en temps. Pour mesurer la viscosité de cisaillement on utilise des écoulements où il n'existe qu'une seule composante du tenseur des gradients de vitesse : par exemple la géométrie de Couette cylindrique (§ 10.1.2) ou la géométrie du cône/plan (figure 8.5).

La figure 8.6 montre que la viscosité est une propriété des fluides qui dépend fortement de la température, mais différemment pour un gaz ou un liquide ! Dans un liquide les viscosités dynamique et cinématique diminuent avec la température (loi de Andrade,  $\log(\eta) \approx A + \frac{B}{T}$ ). Pour un gaz au contraire elles augmentent avec la température (l'agitation moléculaire augmentant, la diffusion de la quantité de mouvement augmente aussi).

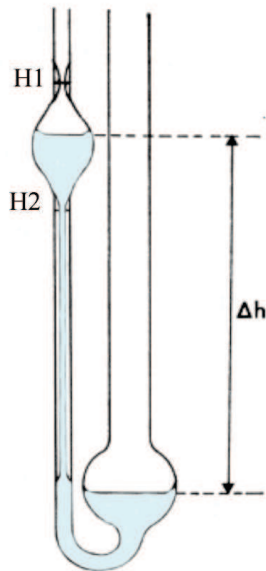


FIG. 6.3 – Viscosimètre à tube capillaire.



FIG. 6.4 – Viscosimètre à chute de bille.

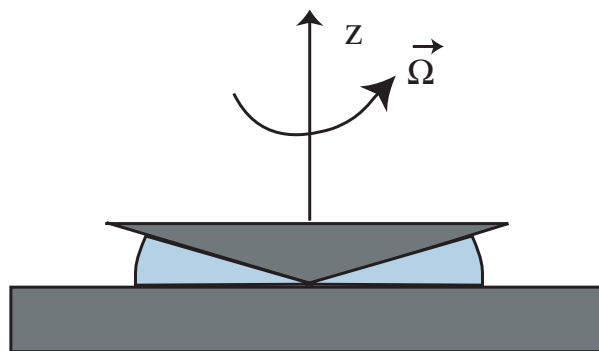


FIG. 6.5 – Principe du rhéomètre cône/plan. Il peut fonctionner soit à contrainte imposée (couple imposé) soit à cisaillement imposé ( $\vec{\Omega} = Cste$ ) et il permet de plus de mesurer les contraintes normales  $\sigma_{zz}$ , ce qui est utile pour un fluide élastique.

	Viscosité dynamique $\eta$ (Pa.s)	Viscosité cinématique $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ (m <sup>2</sup> /s)
Eau (20°C)	10 <sup>-3</sup>	1,006 10 <sup>-6</sup>
Air (20°C)	18,2 10 <sup>-6</sup>	15,1 10 <sup>-6</sup>
Glycérine (20°C)	1,49	1180 10 <sup>-6</sup>
Mercure (20°C)	1,55 10 <sup>-3</sup>	0,116 10 <sup>-6</sup>
CO <sub>2</sub> (20°C, 1 atm.)	14,7 10 <sup>-6</sup>	8,03 10 <sup>-6</sup>
H <sub>2</sub> (20°C, 1 atm.)	8,83 10 <sup>-6</sup>	105 10 <sup>-6</sup>

TAB. 6.1 – Tableau donnant les viscosités de quelques fluides à 20°C.

## 6.8 Quelques exemples de fluides non-newtoniens

Pour certains fluides,  $[\sigma'] \neq 2\eta[e]$  et il faut alors modéliser le comportement réel par d'autres équations dites *équations constitutives*. Parmi ces fluides on peut citer les peintures, les shampoings, l'aligot (mélange purée/tomme de l'Aubrac), les gels coiffants, la silliputy ... Avec un rhéomètre on doit alors étudier la variation de la viscosité apparente avec l'intensité du taux de cisaillement  $\eta = f(\dot{\gamma})$ . Pour un fluide rhéofluidifiant (le plus couramment rencontré) la viscosité est une fonction décroissante de la contrainte (figure 8.7). Pour d'autres fluides, notamment les solutions de polymères à chaînes flexibles, de l'énergie peut être stockée sous forme élastique, donnant lieu à des comportements visco-élastiques inattendus tel que le gonflement (figure 8.8) ou l'effet Weissenberg (figure 8.9).

La plupart des fluides sont rhéo-fluidifiants (leur viscosité décroît sous cisaillement) mais certaines suspensions de particules sont rhéo-épaississantes (la viscosité croît avec la contrainte). C'est le cas d'un mélange eau-Maïzena, comme le montre la très belle vidéo suivante : <http://chezmatthieu.blogspot.com/2006/11/pool-filled-with-non-newtonian-fluid.html> !

**Pour en savoir plus :** *Comment s'écoulent les fluides complexes*, Daniel Boon, séminaire disponible en vidéo téléchargeable sur <http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=664> (23 février 2006).

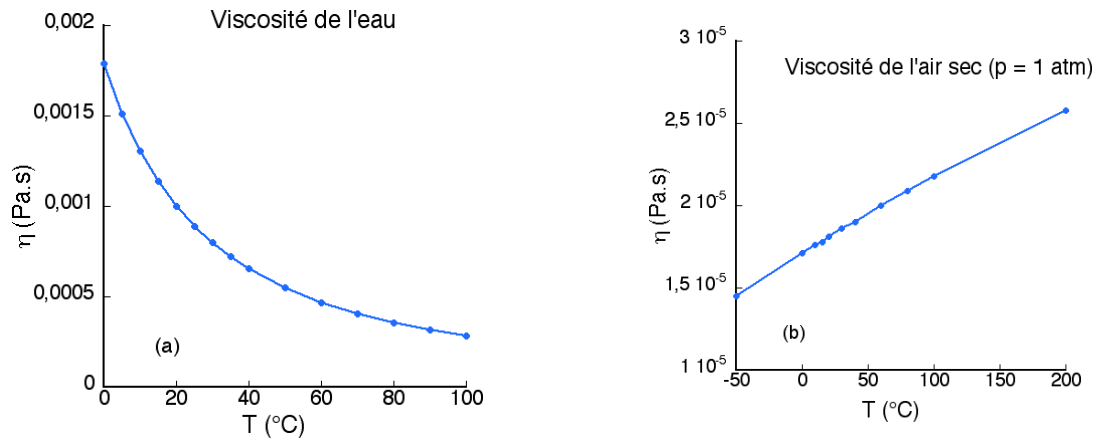


FIG. 6.6 – Courbes montrant l'évolution de la viscosité dynamique  $\eta$  de l'eau (a) et de l'air sec (b) en fonction de la température, à une pression de 1 atm. (D'après [3] p. 594-597).

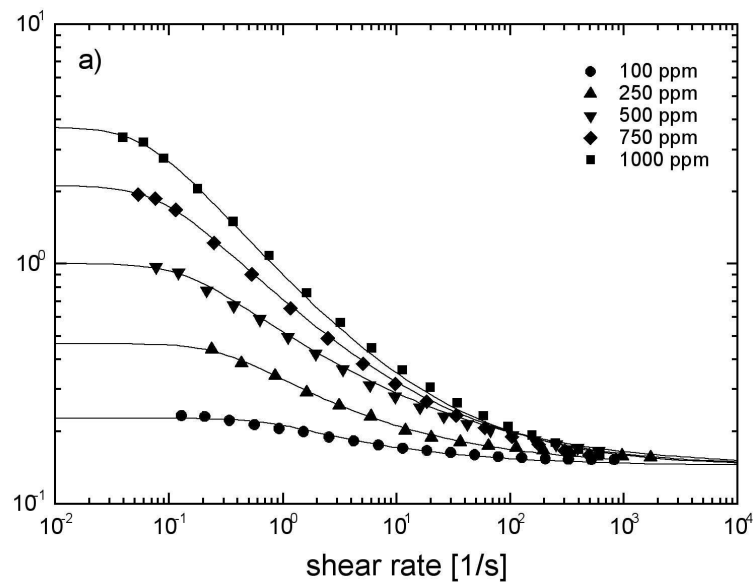


FIG. 6.7 – Rhéogramme montrant pour différentes concentrations en polymère la diminution de la viscosité dynamique apparente  $\eta$  avec le taux de cisaillement  $\dot{\gamma} = \partial v_x / \partial y$ .





FIG. 6.8 – Ecoulement d'un fluide visco-élastique montrant le gonflement progressif d'un jet à la sortie d'un tube lorsque le taux de cisaillement augmente ( $\dot{\gamma} = 24$  puis  $60$  puis  $240 \text{ s}^{-1}$ ), ce qui démontre l'existence de contraintes normales dans ce fluide. (Photos L. Pauchard, FAST Orsay.)



FIG. 6.9 – Illustration de « l'effet Weissenberg » lorsqu'un fluide élastique monte le long d'un cylindre en rotation (<http://web.mit.edu/nnf/>).



# Chapitre 7

## L'équation de Navier-Stokes

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Equation de Bernoulli</b>	<b>54</b>
<b>7.2</b>	<b>Généralisation de l'équation de Bernoulli</b>	<b>55</b>
7.2.1	Cas d'un fluide barotrope	55
7.2.2	Cas d'un écoulement instationnaire mais irrotationnel	56
7.2.3	Effet Coanda	56
<b>7.3</b>	<b>Quelques applications de l'équation de Bernoulli</b>	<b>57</b>
7.3.1	Anémomètre à tube de Pitot	57
7.3.2	Effet Venturi et débitmètre de Venturi	58
7.3.3	Expérience de Torricelli	59
7.3.4	Effet Magnus	60
7.3.5	Portance d'une aile	60
7.3.6	Amplification des vagues par le vent	61
7.3.7	Jet incident sur une plaque	61
<b>7.4</b>	<b>Paradoxe de d'Alembert</b>	<b>61</b>

---

### 7.1 Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible

Dans le chapitre précédent, nous avons montré (équation 8.10) que l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p) + \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}} \quad (7.1)$$

Le premier terme s'appelle le terme instationnaire, le second le terme inertiel. A droite on a successivement les forces de pression, les forces de volume et les forces visqueuses. Cette équation, écrite par unité de masse, est dimensionnée mais on peut chercher à l'adimensionner.

On adimensionne les variables par :

$$t = \hat{t}T, \quad x_i = \hat{x}_i L, \quad v = \hat{v} V_0, \quad p = \hat{p} P_0, \quad \vec{g} = \vec{\hat{g}} G,$$

où les termes en majuscule sont des constantes dimensionnées et les termes avec un chapeau les variables sans dimension. On peut remplacer dans l'équation de Navier-Stokes et l'on obtient :

$$\frac{V_0}{T} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \hat{t}} + \frac{V_0^2}{L} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{P_0}{\rho L} \vec{\nabla}(\hat{p}) + G \vec{\hat{g}} + \frac{\nu V_0}{L^2} \vec{\nabla}^2(\vec{v}).$$

Soit si on fait apparaître un coefficient unité devant le terme inertiel :

$$\frac{L}{V_0 T} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \hat{t}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{P_0}{\rho V_0^2} \vec{\nabla}(\hat{p}) + \frac{LG}{V_0^2} \vec{\hat{g}} + \frac{\nu}{V_0 L} \vec{\nabla}^2(\vec{v}).$$

Considérons d'abord le cas particulier d'une sphère de rayon  $L$  se déplaçant à une vitesse constante  $V_0$  dans un fluide au repos.  $L$  et  $V_0$  sont les seules échelles du problème et il n'y a pas d'échelle indépendante de temps et de pression. Enfin supposons que la gravité n'intervienne pas dans cet exemple. Du coup on peut choisir  $T_0 = L/V_0$  et  $P_0 = \rho V_0^2$ .

On obtient l'équation adimensionnée de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \hat{t}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla}(\hat{p}) + \frac{1}{Re} \vec{\nabla}^2(\vec{v}). \quad (7.2)$$

On appelle **nombre de Reynolds** le rapport :

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu} = \frac{\rho V_0 L}{\eta}. \quad (7.3)$$

*N.B.* : Dans le cas où la sphère est fixe dans l'écoulement, le terme instationnaire peut disparaître.

Il ne reste plus dans l'équation de la dynamique qu'un seul nombre sans dimension. La structure de l'écoulement ne dépend alors que de la valeur du nombre de Reynolds  $Re$ . On a en particulier deux cas limites :

- $Re \rightarrow 0$ , les effets visqueux sont dominants,
- $Re \rightarrow \infty$ , les effets inertiels dominent.

Le terme de Reynolds peut aussi s'écrire comme le rapport du terme (dimensionné) d'inertie sur le terme visqueux :

$$Re = \frac{\text{terme inertiel}}{\text{terme visqueux}} = \frac{\|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}\|}{\|\nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}\|} = \frac{V_0^2/L}{\nu V_0/L^2} = \frac{V_0 L}{\nu}.$$

### 7.1.1 Quelques valeurs de nombres de Reynolds

On peut facilement estimer des ordres de grandeur pour quelques écoulements :

- Une paramécie nageant dans l'eau :  $Re \approx 10^{-2}$ .
- Un goutte de pluie tombant dans l'air :  $Re \approx 1000$ .
- Sillage d'un marcheur :  $Re \approx 30\,000$ .
- Sillage d'une voiture :  $Re \approx 4 \times 10^6$ .
- Sillage d'un avion :  $Re \approx 2 \times 10^8$ .

## 7.1. ADIMENSIONNEMENT DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES POUR UN FLUIDE NEWTONIEN INCOM

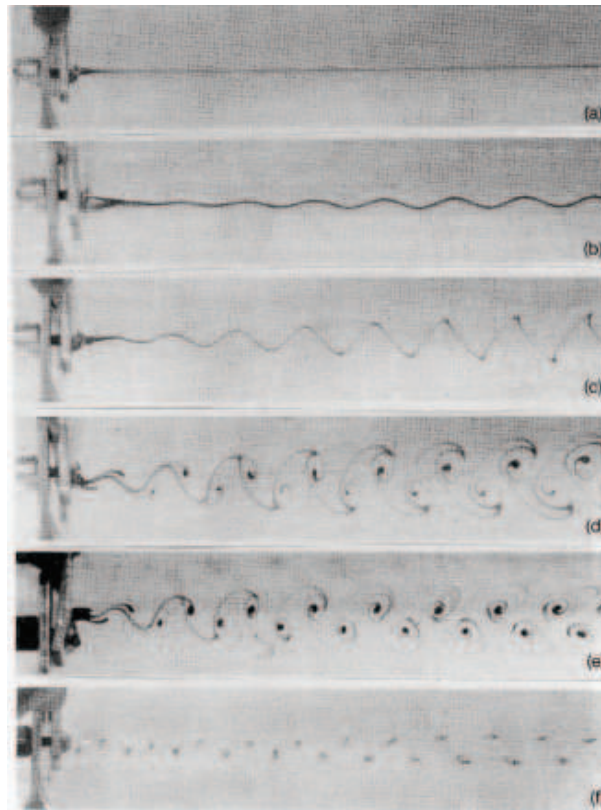


FIG. 7.1 – Visualisation du sillage d'un cylindre par émission d'encre à travers un orifice dans le cylindre. Ce sillage serait le même pour différents diamètres, différents fluides ou différentes vitesses du moment que le nombre de Reynolds  $Re$  est le même. Le nombre de Reynolds prend de haut en bas les valeurs 30, 40, 47, 55, 67 et 100. Pour  $Re > 50$  on visualise une allée de tourbillons alternés émis par le cylindre, dite *allée de tourbillons de Bénard-von Kármán*. (D'après [28] p. 25).

- La limite  $Re \rightarrow \infty$  est mathématiquement une limite singulière, car l'équation différentielle aux dérivées partielles passe alors du second au premier ordre de dérivation en espace. L'équation de Navier-Stokes est d'ordre 2 pour la dérivation en espace alors que l'équation d'Euler est d'ordre 1 en espace. Par exemple, dans le cas du sillage de la sphère, pour un fluide parfait comme il n'y a plus aucun paramètre sans dimension dans l'équation d'Euler, la solution ne doit plus dépendre d'aucun paramètre et doit en particulier être la même quelque soit la vitesse de la sphère. Une autre conséquence de ces ordres des dérivées dans les équations est que l'on a besoin de plus de conditions aux limites pour résoudre l'équation de Navier-Stokes que pour résoudre l'équation d'Euler.

- A cause du terme  $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ , l'équation de Navier-Stokes, comme l'équation d'Euler, sont des équations non-linéaires. En conséquence on ne peut utiliser ni le théorème de superposition ni le théorème d'unicité : pour les mêmes conditions aux limites il existe des solutions multiples. Certaines de ces solutions peuvent être stables, d'autres instables, et c'est uniquement l'ensemble des solutions qui satisfait aux symétries du problème.

### 7.1.2 Quelques autres nombres sans dimension

Reprenons l'adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes. S'il apparaît dans les conditions du problème, une pression propre  $P_0$ , un temps caractéristique des phénomènes instationnaires  $T$ , des effets de la gravité (ondes de surface par exemple), des tailles différentes en  $x$ ,  $y$  ou  $z$ , l'équation de Navier-Stokes fait alors apparaître d'autres nombres sans dimension :

- Le nombre de Strouhal :  $St = \frac{\text{fréquence imposée}}{\text{fréquence naturelle}} = \frac{1/T}{V_0/L} = \frac{L}{V_0 T}$ .
- Le nombre de Froude :  $Fr = \left[ \frac{\text{forces d'inerties}}{\text{forces de gravité}} \right]^{1/2} = \frac{V_0}{\sqrt{gL}}$ . L'exposant 1/2 permet de comparer directement la vitesse de l'objet aux vitesses des ondes de gravité en eau peu profonde (voir TD Ressaut Hydraulique).
- Le nombre d'Euler :  $Eu = \frac{\text{forces de pression}}{\text{forces inertielles}} = \frac{P_0/\rho L}{V_0^2/L} = \frac{P_0}{\rho V_0^2}$ .

L'équation de Navier-Stokes adimensionnée s'écrit alors :

$$St \frac{\partial \vec{v}}{\partial \hat{t}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -Eu \vec{\nabla}(\hat{p}) + Fr^{-2} \vec{g} + \frac{1}{Re} \vec{\nabla}^2(\vec{v}).$$

Si de plus l'obstacle n'est pas une sphère,  $L_x \neq L_y \neq L_z$  on peut aussi introduire des rapports d'aspect géométriques,  $L_x/L_z$  ou  $L_y/L_z$ .

## 7.2 Les conditions aux limites cinématiques et dynamiques

Il existe deux types de conditions aux limites que l'on doit préciser pour résoudre les équations du mouvement : les conditions aux limites cinématiques (sur la vitesse) et les conditions aux limites dynamiques (sur les forces).

### 7.2.1 Les conditions cinématiques

#### Cas d'une surface solide immobile

- Si le matériau est non poreux, alors les particules fluides ne peuvent pénétrer dans le solide et la composante de la vitesse normale à la paroi doit être nulle (pas de flux de matière) :  $Q = \int \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$ , et ce quelque soit  $d\vec{S}$ . Soit :

$$\boxed{\vec{v}_\perp = \vec{0}}.$$

La vitesse normale à une paroi solide est nulle.

- Si le fluide est parfait (pas de viscosité, équation d'Euler), il n'y a pas d'autre condition cinématique car il peut exister des gradients de vitesse infinis entre le liquide et le solide, et dont la vitesse tangentielle à la paroi peut prendre n'importe quelle valeur.
- Si le fluide est réel (visqueux), on observe expérimentalement que les molécules de fluide au voisinage de la paroi sont en moyenne immobiles, surtout si la surface est un peu rugueuse ou si les molécules sont adsorbées sur la paroi. La vitesse tangentielle d'une particule fluide (vitesse mésoscopique) est donc nulle. C'est ce que l'on appelle *la condition de non glissement sur un paroi solide*.

$$\boxed{\vec{v}_{//} = 0}.$$

Notons toutefois que cette condition classique de non glissement n'est pas évidente à petite échelle. Plus précisément si on note  $\lambda$  le libre parcours moyen des molécules entre deux collisions, à une distance  $z$  inférieure à  $\lambda$  de la paroi, la moitié des particules vont vers la paroi et n'ont pas encore eu de collisions avec elle. Ces molécules ont donc toujours une composante parallèle à la surface solide  $V_S = v_{//}(z = \lambda)$  alors que l'autre moitié des molécules s'éloignent de la paroi après l'avoir frappée. Si lors du choc il y a eu une adsorption temporaire des molécules sur la paroi (collision non spéculaire), il y a après le choc *en moyenne* perte de la vitesse tangentielle,  $V_S = 0$ . En faisant la moyenne de ces deux contributions on a donc finalement au voisinage de la paroi :  $V_S = \frac{1}{2}v_{//}(z = \lambda)$ . Il existe bien une vitesse de glissement à la paroi et c'est uniquement le prolongement du profil de vitesse qui s'annule à l'intérieur du solide, à une distance  $b \approx \lambda$  (Fig. 9.2). La relation de continuité du gradient de vitesse donne alors :

$$V_S = b \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}.$$

Cela dit, dans la plupart des applications réelles le libre parcours est inférieur à 1 micromètre et la distinction reste académique. Notons toutefois quelques exceptions notoires : la microfluidique où les fluides se déplacent dans des microcapillaires où un glissement sur  $1 \mu m$  n'est pas négligeable, le cas des gaz très dilués (régime de Knudsen) où le libre parcours n'est pas petit devant la taille de l'objet, ce qui augmente fortement l'effet du glissement du fluide à la paroi. On retrouve aussi de telles vitesses de glissement pour certains écoulements de polymères concentrés ou même pour des écoulements granulaires denses.

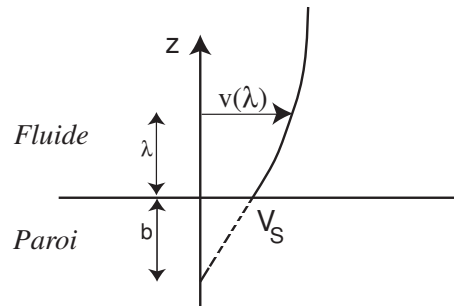


FIG. 7.2 – Détail d'un profil de vitesse près d'une paroi mettant en évidence la vitesse de glissement  $V_S = b \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}$  où  $b$  est de l'ordre du libre parcours moyen des molécules du fluide.

### Cas d'une surface solide mobile

Si la paroi se déplace les conditions aux limites sont physiquement les mêmes, mais il faut écrire la nullité des vitesses normales et tangentielles à la paroi *dans le référentiel de la paroi*, et donc égalité des vitesses normales (fluide parfait) ou égalité des vecteurs vitesses (fluide visqueux) dans le référentiel fixe :

$$v_{\perp \text{fluide}} = v_{\perp \text{paroi}} \text{ pour un fluide parfait}$$

$$\vec{v}_{\text{fluide}} = \vec{v}_{\text{paroi}} \text{ pour un fluide réel}$$

### Cas d'une interface fluide déformable

Là encore il faut écrire une condition sur les vitesses au niveau de l'interface (figure 9.3). Tout d'abord les vitesses normales doivent être égales sinon il apparaît un espace entre les deux fluides (ou un recouvrement) :

$$(v_1)_\perp = (v_2)_\perp$$

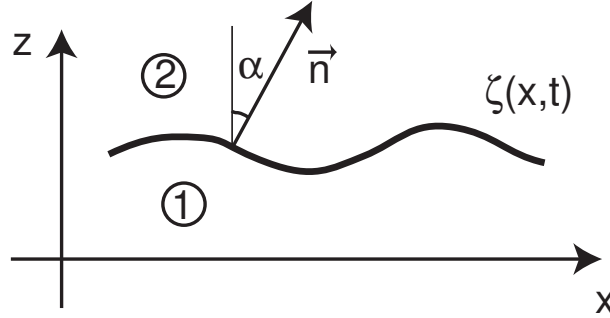


FIG. 7.3 – Interface déformée  $\zeta(x, t)$  entre deux fluides et normale locale  $\vec{n}$ .

Le calcul de cette vitesse normale fait intervenir l'équation de l'interface  $\zeta(x, t)$ . Le vecteur normal à l'interface a pour composantes  $\vec{n} = (\sin \alpha, \cos \alpha)$  où  $\tan \alpha = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}$  (figure 9.3). En égalisant les composantes normales des vitesses de l'interface et des fluides 1 et 2,  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot \vec{n} = \vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n}$ , il vient :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \cos \alpha = v_{1x} \sin \alpha + v_{1z} \cos \alpha = v_{2x} \sin \alpha + v_{2z} \cos \alpha,$$

soit en divisant pour  $\cos \alpha$ ,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -v_{1x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_{1z} = -v_{2x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_{2z} \quad (7.4)$$

On peut aussi retrouver cette équation en écrivant qu'une particule fluide de l'interface reste à l'interface. En effet une particule  $M_1$  de coordonnées  $(x_1, y_1)$  dans le fluide 1 est à l'interface si la distance  $h = y_1 - \zeta(x_1, t)$  est nulle. Elle reste sur l'interface si  $dh(x_1, y_1, t) = 0$  soit si  $dh = dy_1 - \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx_1 - \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt = 0$ , c'est-à-dire si  $\frac{dy_1}{dt} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx_1}{dt} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$ . Comme  $\frac{dy_1}{dt} = V_{1z}$  et  $\frac{dx_1}{dt} = V_{1x}$  et en faisant le même raisonnement pour une particule du milieu 2 on retrouve les équations 9.4.

Si de plus les deux fluides sont visqueux, la condition d'égalité des vitesses tangentielles à l'interface,  $(v_1)_\parallel = (v_2)_\parallel$ , conduit à l'égalité des vecteurs vitesses à l'interface :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 .$$

### 7.2.2 Les conditions dynamiques

L'idée de base est de faire un bilan des forces qui s'appliquent à un petit volume qui entoure l'interface, puis de faire tendre la hauteur de ce volume vers zéro. Comme la masse devient nulle il faut que la somme des forces appliquées à ce petit volume soit nulle. Rappelons l'expression du tenseur des contraintes :  $[\sigma] = -p[I] + [\sigma'] = [-p\delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)]$ .



### Cas des fluides parfaits

Il n'existe pas d'autre force que les forces de pression dans chacun des fluides ( $[\sigma'] = 0$ ), avec éventuellement des forces interfaciales s'il existe une courbure de l'interface et une tension de surface (voir chapitre ??). Il n'existe alors que des conditions sur les pressions à la paroi :

- pour une surface solide :  $P_{fluide} = P_{paroi}$
- pour une interface fluide plane :  $P_{fluide1} = P_{fluide2}$
- pour une interface fluide courbée :

$$P_{fluide1} = P_{fluide2} + \gamma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \quad (7.5)$$

où  $R$  et  $R'$  sont les deux rayons de courbure de la surface et  $\gamma$  la tension de surface (voir chapitre ??). C'est la loi de Laplace, qui montre que la pression est plus élevée du côté concave de la surface.

### Cas des fluides réels

Il faut maintenant égaliser les contraintes tangentielles *et* les contraintes normales. Considérons successivement les trois cas suivants : une surface solide, une interface fluide plane, une interface fluide courbée.

- Cas d'une surface solide.

Montrons d'abord que dans le tenseur des gradients de vitesse, de nombreux termes sont nulles sur une paroi solide. En effet si la paroi est perpendiculaire à la direction  $Oz$ , au voisinage d'un point  $x$  on a  $\vec{v}(x + dx) = \vec{v}(x) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx$ . Comme la vitesse à la paroi est nulle en  $x$  et aussi en  $x + dx$  on en déduit :  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = 0$ . On montre de même  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = 0$ . En utilisant l'incompressibilité du fluide,  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ , on en déduit que  $\partial v_z / \partial z = 0$  au niveau de la paroi. Donc seules les composantes  $\frac{\partial v_x}{\partial z}$  et  $\frac{\partial v_y}{\partial z}$  peuvent ne pas être nulles et la contrainte à la paroi a alors pour composantes  $\sigma_{xz} = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$ ,  $\sigma_{yz} = \eta \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)$  et  $\sigma_{zz} = -p$ .

- Cas d'une interface entre deux liquides sans effet de tension de surface.

En présence de deux fluides non miscibles, on doit écrire à l'interface

$$[\sigma_1] \cdot \vec{n} = [\sigma_2] \cdot \vec{n}.$$

Dans le cas particulier où il n'y a qu'une vitesse composante de la vitesse selon  $x$ , l'égalité des contraintes tangentielles s'écrit :

$$\boxed{\eta_1 \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} = \eta_2 \frac{\partial v_{2x}}{\partial z}}. \quad (7.6)$$

Les pentes des profils de vitesse de part et d'autre de l'interface sont donc dans le rapport inverse des viscosités. La pente est la plus faible dans le fluide le plus visqueux (voir figure 9.2.2 page suivante).

On appelle « surface libre » une surface sur laquelle la contrainte tangentielle est nulle. Cette condition de surface libre est souvent justifiée à l'interface entre l'air et l'eau car la viscosité dynamique de l'air est très faible devant celle de l'eau. La condition de contrainte nulle impose que la pente du profil de vitesse soit nulle. Il existe donc un maximum de la vitesse à la surface libre (figure 9.2.2).

Condition à une surface libre :

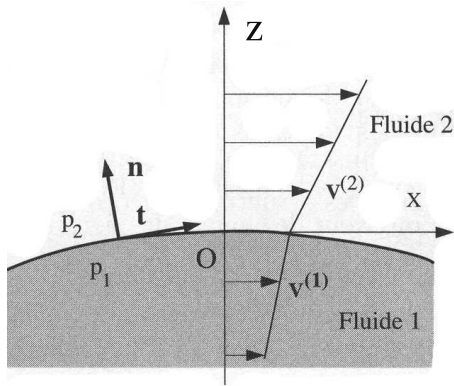


FIG. 7.4 – Conditions aux limites cinématiques à une interface fluide.

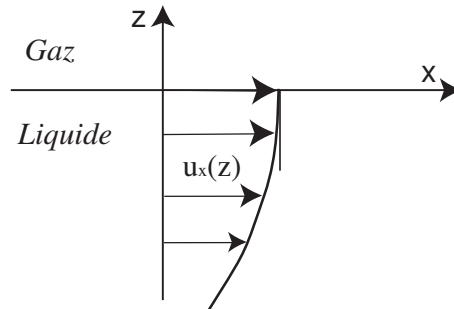


FIG. 7.5 – Profil de vitesse au voisinage d'une surface libre, c'est-à-dire si la contrainte du gaz sur le liquide peut être négligée.

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0}. \quad (7.7)$$

- Cas d'une interface entre deux liquides avec tension de surface

S'il existe une tension de surface, par rapport au cas précédent il se rajoute une contrainte normale proportionnelle à la courbure de l'interface (comme dans le cas de deux fluides parfaits, donné par la loi de Laplace (Equ. ??)) plus éventuellement une contrainte tangentielle s'il existe un gradient de tension de surface. Un tel gradient existe sous l'action d'un gradient de température, ou d'un gradient de concentration en produit tensioactif. On parle alors d'effet Marangoni (voir [15] p. 155 ou [3] p. 69).

### 7.2.3 Tableau récapitulatif des conditions aux limites

Voici un tableau résumant les différentes conditions aux limites, pour un fluide parfait et pour un fluide réel.

Interface	Fluide parfait (Euler)	Fluide visqueux (Navier-Stokes)
Paroi solide	$(v_{\perp})_{fluide} = (v_{\perp})_{paroi}$ $p_{fluide} = p_{paroi}$	$\vec{v}_{fluide} = \vec{v}_{paroi}$ $p_{fluide} = p_{paroi}$ $\sigma_{xz} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}$
Interface plane	$(v_{\perp})_1 = (v_{\perp})_2$ $p_1 = p_2$	$\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ $p_1 = p_2$ $\eta_1 \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_1 = \eta_2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_2$
Interface déformée avec tension de surface	$(v_{\perp})_1 = (v_{\perp})_2$ $P_1 = P_2 + \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$	$\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ $(\sigma_{ij}n_j)_1 - (\sigma_{ij}n_j)_2 = -\gamma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) n_i + \left\{ \vec{\nabla} \gamma \right\}_i$



# Chapitre 8

## Solutions laminaires de l'équation de Navier-Stokes

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Tenseur des déformations <math>[\epsilon]</math> (<i>strain tensor</i>)</b> . . . . .	<b>63</b>
<b>8.2</b>	<b>Tenseur des taux de déformation (rate of strain tensor) ou tenseur des gradients de vitesse <math>[G]</math></b> . . . . .	<b>64</b>
8.2.1	Décomposition d'un tenseur . . . . .	64
8.2.2	Partie symétrique de $[G]$ ou tenseur $[e]$ des déformations pures . . . . .	65
8.2.3	Partie antisymétrique de $[G]$ ou tenseur $[\omega]$ des rotations pures . . . . .	66
<b>8.3</b>	<b>Equation constitutive des fluides newtoniens</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>8.4</b>	<b>Divergence du tenseur des contraintes visqueuses</b> . . . . .	<b>68</b>
<b>8.5</b>	<b>Equation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien</b> . . . . .	<b>68</b>
<b>8.6</b>	<b>Signification physique de la viscosité</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>8.7</b>	<b>Mesure de la viscosité</b> . . . . .	<b>69</b>
8.7.1	Quelques viscosimètres simples . . . . .	69
8.7.2	Quelques exemples de rhéomètre . . . . .	69
<b>8.8</b>	<b>Quelques exemples de fluides non-newtoniens</b> . . . . .	<b>71</b>

---

Dans ce chapitre nous allons parler des écoulements laminaires (par opposition à turbulents), c'est-à-dire des écoulements où le fluide s'écoule en « lame » parallèles. Ce sont en général les écoulements que l'on observe quand le fluide est peu sollicité c'est-à-dire lorsque le nombre de Reynolds n'est pas trop élevé.

### 8.1 Les écoulements parallèles

) On appelle écoulements *parallèles* des écoulements unidirectionnels et invariants le long de l'écoulement. Ce sont des écoulement "1C1D" ( $\vec{v} = \{u(y), 0, 0\}$ ) ou "1C2D" ( $\vec{v} = \{u(y, z), 0, 0\}$ ). Cette propriété impose automatiquement  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = 0$ , le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes disparaît donc. De plus, on a obligatoire par construction la conservation de la masse  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ . Voyons quelques exemples.

### 8.1.1 Écoulement de Couette plan

On cherche l'écoulement établi (indépendant du temps) entre deux plaques parallèles dont l'une se déplace dans son plan à la vitesse  $U_0$ . On suppose  $\vec{v} = \{u(y), 0, 0\}$  et l'on néglige la gravité. L'équation de Navier-Stokes se ramène alors à :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Comme  $u$  ne dépend pas de  $x$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x}$  n'en dépend pas non plus. C'est une constante qui ne peut dépendre ni de  $y$  ni de  $z$  puisque  $p$  n'en dépend pas ( $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$ ). Cette constante sera nulle s'il n'y a pas de gradient de pression imposé à l'infini par les conditions aux limites. Nous le supposons et on trouve, en tenant compte des conditions aux limites  $u = 0$  en  $y = 0$  et  $u = U_0$  en  $y = h$  :

$$u(y) = \frac{U_0}{h}y.$$

Le gradient de vitesse est constant partout dans l'écoulement (figure 10.1). C'est un écoulement de cisaillement pur (somme d'un écoulement de déformation pure et de rotation pure).

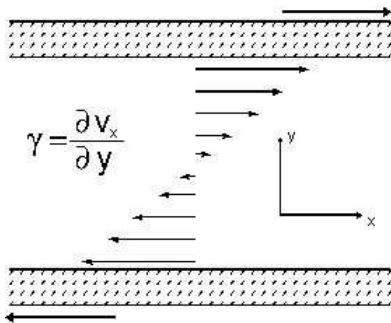


FIG. 8.1 – Géométrie et profil de vitesse de l'écoulement de Couette plan, ici avec deux vitesses de paroi égales et opposées.

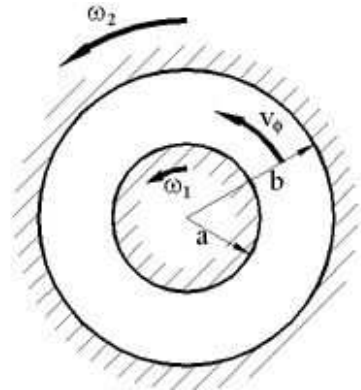


FIG. 8.2 – Géométrie de Couette cylindrique.

### 8.1.2 Écoulement de Couette circulaire

Cherchons maintenant l'écoulement axisymétrique purement azimutal existant entre deux cylindres coaxiaux. Le même raisonnement nous conduit à l'équation  $\nu \vec{\nabla}^2 \vec{v} = 0$ . En coordonnées cylindriques on trouve alors :

$$v_\theta = Ar + \frac{B}{r} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_\theta^2}{r}.$$

Les valeurs de  $A$  et  $B$  sont données par les conditions aux limites cinématiques aux parois en  $r = R_1$  et  $r = R_2$  (figure 10.2).

### 8.1.3 Écoulement de Poiseuille plan

Supposons maintenant que nous ayons deux plaques parallèles et immobiles et qu'en appliquant un gradient de pression on crée un écoulement visqueux selon la direction  $x$ . Le même système d'équation que pour le calcul de l'écoulement de Couette plan nous montre que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = C_{ste} = -\frac{P_{entrée} - P_{sortie}}{L} = -G.$$

$G$  est le gradient de pression imposé. On en déduit que le profil de vitesse est parabolique :

$$\boxed{u(y) = \frac{G}{2\eta}y(h - y)} \quad (8.1)$$

Ce profil parabolique porte le nom d'écoulement de Poiseuille ou de Hagen-Poiseuille (Figure 10.3).

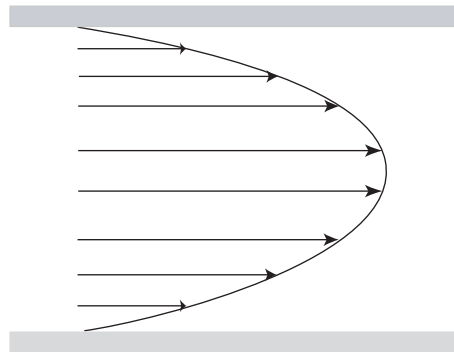


FIG. 8.3 – Profil parabolique de Poiseuille entre deux plaques ou dans une conduite circulaire.

Le débit volumique par unité de largeur dans la troisième dimension est donc donné par :

$$Q_v = \int_0^h u(y)dy = \frac{h^3}{12\eta}G. \quad (8.2)$$

### 8.1.4 Écoulement sur un plan incliné

**Exercice** : Calculer le profil de vitesse d'une couche de fluide d'épaisseur  $h$  coulant sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Montrer en particulier que la condition de surface libre impose que le profil de vitesse est une demi parabole.

### 8.1.5 Écoulement de Poiseuille en conduite circulaire

**Exercice** : Refaire le calcul du profil de Poiseuille pour une conduite de section circulaire. On montrera que

$$\boxed{u(r) = \frac{G}{4\eta}(R^2 - r^2)} \quad (8.3)$$

et que le débit volumique vaut :

$$Q_v = \frac{\pi R^4}{8\eta} G. \quad (8.4)$$

Attention, une des conditions aux limites est donnée par le fait que l'on ne veut pas de vitesse infinie sur l'axe ( $r = 0$ ).

Ainsi à gradient de pression constant, si le diamètre du tube diminue d'un facteur 2, le débit est divisé par 16 ! Cette forte non-linéarité explique la difficulté d'équilibrer les réseaux de distribution d'eau par exemple. De même il faut 10 000 tubes de 1 mm de rayon pour faire s'écouler le même débit sous la même différence de pression que dans un tube de rayon 1 cm. Jean-Louis Marie POISEUILLE était d'ailleurs un médecin physiologiste qui s'est intéressé dans les années 1850 aux écoulements sanguins.

On peut aussi calculer les contraintes visqueuses appliquées sur les parois du tube,  $\sigma'_{zr} = -GR/2$  et en déduire que les forces appliquées par le liquide sur une longueur de tube sont logiquement égales à la différence des forces de pression appliquées entre ses deux extrémités.

La relation 10.4 n'est valable que si l'écoulement reste laminaire. Au-dessus d'un certain nombre de Reynolds de l'ordre de quelques milliers ce n'est plus vrai. Il apparaît d'autres composantes de la vitesse et un régime turbulent. C'est en étudiant cette transition que O. Reynolds a montré que cette transition était gouvernée par un nombre sans dimension qui porte maintenant son nom. La turbulence de l'écoulement augmente la dissipation d'énergie et donc le gradient de pression, c'est-à-dire la différence de pression entre l'entrée et la sortie aussi appelée en hydraulique la *perte de charge* (figure 10.4).

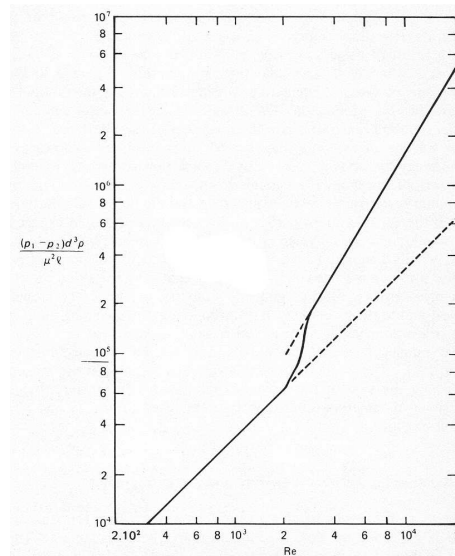


FIG. 8.4 – Transition laminaire/turbulent de l'écoulement de Poiseuille. Variation du gradient de pression moyen adimensionné  $G \frac{d^3 \rho}{\eta^2}$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re$ . Lignes pointillées : écoulement laminaire ( $G \frac{d^3 \rho}{\eta^2} = 32 Re$ ) ou complètement turbulent. Ligne continue : un exemple de cas réel. D'après [28] p. 20.



### 8.1.6 Solutions instationnaires

#### Mise en mouvement d'une plaque

Supposons maintenant que dans un milieu infini on mette brutalement une plaque en mouvement dans son plan. Si les effets de la gravité sont négligeables et si l'écoulement est invariant dans la direction du mouvement (il n'y aura donc pas de gradient de pression longitudinal), l'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla^2 u. \quad (8.5)$$

On reconnaît là une équation de diffusion. Le coefficient de diffusion de la quantité de mouvement est  $\nu$ , la viscosité cinématique. On peut adimensionner cette équation

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} = \frac{\nu \tau}{\delta^2} \hat{\nabla}^2 \hat{u}.$$

On trouve alors que le temps caractéristique de diffusion sur une distance  $\delta$  est :

$$\boxed{\tau = \frac{\delta^2}{\nu}}. \quad (8.6)$$

Dans le cas du démarrage brutal de la plaque à la vitesse  $U_0$  dans un fluide au repos, on trouve par intégration la solution de l'équation de diffusion :

$$u(y) = U_0 \left[ 1 - \operatorname{erf} \left[ \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right] \right]$$

où  $\operatorname{erf}$  est la **fonction « erreur »** (intégrale d'une gaussienne :  $\operatorname{erf}(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X \exp(-x^2) dx$ ).

#### Mise en mouvement d'un fluide entre deux parois

Dans le cas de l'écoulement de Couette plan il faut un temps  $\tau \sim h^2/\nu$  pour que le profil linéaire s'établisse (figure 10.5). Soit une longueur de déplacement de la plaque  $X = U_0 \tau \sim Re h$ .

Dans un tube, pour obtenir un profil parabolique il faut attendre un temps  $\tau \sim R^2/\nu$ , c'est-à-dire une distance depuis l'entrée du tube  $X \approx Re R$ . C'est-à-dire que dès que le nombre de Reynolds est élevé la *longueur d'entrée* avant l'établissement du profil parabolique est loin d'être négligeable (figure 10.6). Expérimentalement on trouve plutôt  $X \approx Re R/30$ .

## 8.2 Les écoulements à très faibles nombre de Reynolds

### 8.2.1 Equation de Stokes

Dans les écoulements strictement parallèles le terme  $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$  est géométriquement nul. Si le nombre de  $Re$  est très faible (effets important de la viscosité) le terme inertiel peut être négligé même si l'écoulement n'est pas du tout parallèle.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p) + \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}. \quad (8.7)$$

C'est en quelque sorte la limite opposée à l'équation d'Euler.

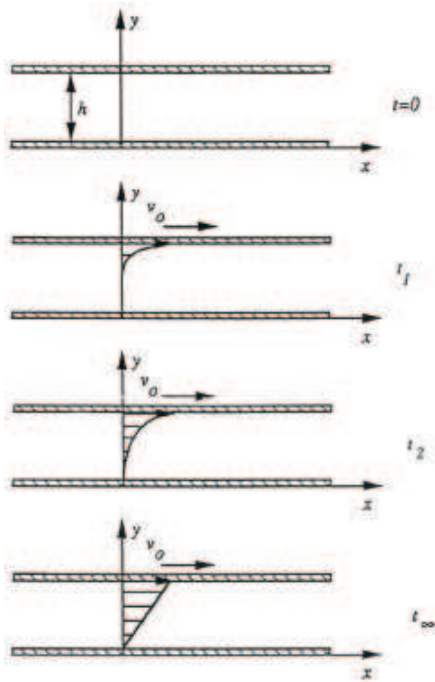


FIG. 8.5 – Écoulement instationnaire en géométrie de Couette plan. Evolution du profil de vitesse entre deux plaques parallèles infinies. La plaque supérieure est mise en translation à vitesse uniforme à l'instant  $t = 0$ .

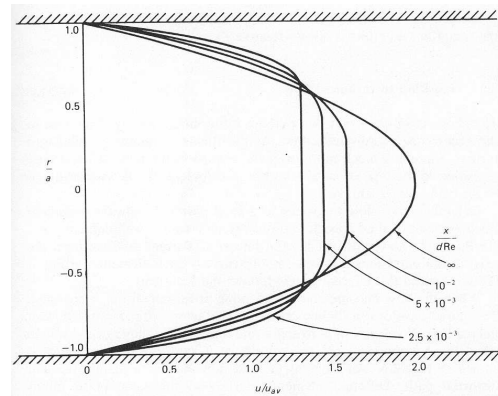


FIG. 8.6 – Profils de vitesse laminaires à diverses distances de l'entrée d'une conduite circulaire. D'après [28], p. 15.

Nous supposons dans la suite que la seule force volumique est la force de gravité. On peut alors introduire le potentiel  $\Phi = \vec{g} \cdot \vec{r}$  (alors  $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$ ). De plus nous supposons que le nombre de Stokes qui compare le terme instationnaire aux termes visqueux est très petit :

$$St = \frac{\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\|}{\|\nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}\|} = \frac{L^2}{\nu T} \ll 1.$$

Formellement le nombre de Stokes apparaît comme le produit du nombre de Strouhal déjà rencontré (§ 9.1.2) et du nombre de Reynolds. On obtient alors l'équation de Stokes :

$$\boxed{\vec{\nabla} (p + \rho\Phi) = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}}. \quad (8.8)$$

Cette équation est exacte en toute rigueur pour un écoulement stationnaire et si  $Re \rightarrow 0$ . Une des propriétés des écoulements de Stokes est l'absence d'inertie. Dès que les causes du mouvement disparaissent, l'écoulement s'arrête sans délai. Ces écoulements dissipent extrêmement rapidement leur énergie cinétique.

Il existe d'autres formes équivalentes de l'équation de Stokes :

– Première variante :

$$\boxed{\vec{\nabla} (p + \rho\Phi) = -\eta \text{rot}(\vec{\omega})}. \quad (8.9)$$

En effet  $\vec{\nabla}^2 \vec{v} = \vec{\nabla} (\text{div}(\vec{v})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}))$ , or  $\text{div}(\vec{v}) = 0$  pour un fluide incompressible et l'on écrit  $\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})$  la vorticité.

– Deuxième variante en prenant la divergence de l'équation précédente :

$$\boxed{\nabla^2(p + \rho\Phi) = 0} . \quad (8.10)$$

En effet on a  $\nabla^2(p + \rho\Phi) = \text{div}(\vec{\nabla}(p + \rho\Phi))$  et  $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})) = 0$ .

La pression satisfait donc à une équation de Laplace à très faible nombre de Reynolds.

– Troisième variante :

$$\boxed{\vec{\nabla}^2(\vec{\omega}) = 0} . \quad (8.11)$$

En effet  $\vec{\nabla}^2(\vec{\omega}) = \vec{\nabla} [\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}))] - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\omega})) = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\omega})) = \frac{1}{\eta} \overrightarrow{\text{rot}} [\vec{\nabla}(p + \rho\Phi)] = 0$ . Ceci montre qu'à très faible nombre de Reynolds, il n'y a plus transport de la vorticité. La vorticité est dans un état d'équilibre et ne diffuse plus.

L'équation de Stokes étant linéaire il y a unicité de la solution une fois connues les conditions aux limites. De plus on montre que l'écoulement de Stokes est celui qui minimise la dissipation d'énergie (cf [15] p. 443-452).

### 8.2.2  coulement autour d'une sphère : force de Stokes

Nous allons montrer, dans la limite des nombres de Reynolds tendant vers 0, que la force de traînée visqueuse exerc e sur une sphère de rayon  $R$  par un fluide s'écoulant à la vitesse  $\vec{U}$  s'écrit :

$$\boxed{\vec{F}_{St} = 6\pi\eta R\vec{U}} \quad (8.12)$$

C'est ce que l'on appelle la force de Stokes (1851).

#### Démonstration

Les hypothèses sont  $Re \ll 1$  et écoulement stationnaire  $St \ll 1$ . Nous pouvons alors utiliser l'équation de Stokes (Equ. 10.8) :

$$\vec{\nabla}(p + \rho\Phi) = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}.$$

Nous allons travailler en coordonnées sphériques avec une sphère immobile dans un écoulement homogène de vitesse à l'infini  $U$ , dirigé selon  $Oz$  (figure 10.7). Nous supposons un écoulement axisymétrique autour de  $Oz$  (nous aurons alors  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ ) et que  $u_\varphi = 0$ . L'écoulement est alors 2C2D stationnaire et s'écrit en coordonnées sphériques :  $\vec{u} = u_r(r, \theta) \vec{e}_r + u_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta$ .

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{0} & \text{en } r = R \\ \vec{u} = U \hat{z} & \text{en } r \rightarrow \infty \end{cases}$$

Soit  $u_r = u_\theta = 0$  en  $r = R$  et  $u_r = U \cos \theta$  et  $u_\theta = -U \sin \theta$  en  $r \rightarrow \infty$ .

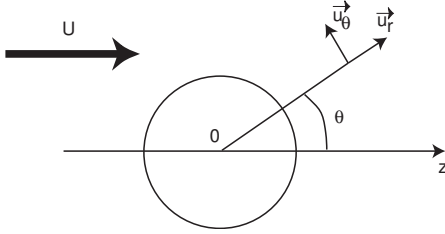
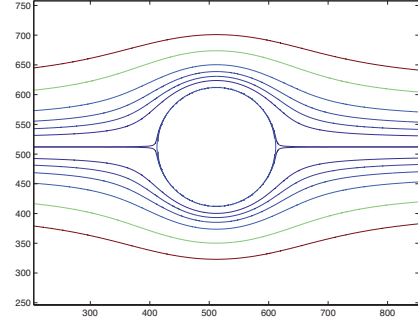
FIG. 8.7 – Coordonnées sphérique autour d'une sphère. L'écoulement est selon  $Oz$ .

FIG. 8.8 – Lignes de courant autour d'une sphère immobile pour un écoulement de Stokes.

En introduisant la fonction de Stokes en coordonnées sphériques (Equation 2.3) on peut résoudre le problème (figure 10.8) et l'on trouve  $\Psi = U \sin^2 \theta \left( \frac{L}{r} + Mr^2 + C \frac{r}{2} \right)$  avec  $L$ ,  $M$  et  $C$  trois constantes à déterminer pour satisfaire les conditions aux limites. On trouve alors

$$\Psi = -\frac{1}{2}U r^2 \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right).$$

On trouve finalement le champ de vitesse partout autour de la sphère (cf. [1] p. 223, [15] p. 465) :

$$\begin{cases} p(r, \theta) &= P_0 - \frac{3}{2} \frac{\eta U R}{r^2} \cos \theta \\ u_r(r, \theta) &= U \cos \theta \left[ 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right] \\ u_\theta(r, \theta) &= -U \sin \theta \left[ 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right] \end{cases} \quad (8.13)$$

Ces équations montrent que le champ de vitesse décroît très doucement à grande distance (en  $1/r$ ). Ce qui fait que l'écoulement est très influencé par des parois même lointaines ou d'autres particules en mouvement (cas de la sédimentation de particules).

A partir du champ de vitesse nous pouvons maintenant calculer les composantes du tenseur des contraintes  $[\sigma]$  en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} &= 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - p \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - p \\ \sigma_{\phi\phi} &= 2\eta \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - p \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} &= \eta \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{\theta\phi} = \sigma_{\phi\theta} &= \eta \left( \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \\ \sigma_{r\phi} = \sigma_{\phi r} &= \eta \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) \right) \end{cases} \quad (8.14)$$

Le fluide étant incompressible,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ . De plus, sur la sphère  $u_r = u_\theta = u_\phi = 0$  et  $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ . On en déduit les contraintes sur la sphère :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = -p \\ \sigma_{\theta\theta} = -p \\ \sigma_{\phi\phi} = -p \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \eta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ \sigma_{\theta\phi} = \sigma_{\phi\theta} = 0 \\ \sigma_{\phi r} = \sigma_{r\phi} = 0 \end{array} \right. \quad (8.15)$$

On peut ensuite calculer la composante selon l'axe  $Oz$  de la contrainte :  $\sigma_z = ([\sigma] \cdot \vec{n}) \vec{e}_z = \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta$ , et l'on trouve :  $\sigma_z = \frac{3\eta U}{2R}$  en tout point de la sphère (quelque soit  $\theta$ ).

Et donc  $F_z = \oint \sigma_z dS = \sigma_z 4\pi R^2 = 6\pi\eta RU$ . C'est la force de Stokes exercée par un fluide visqueux sur une sphère.

*Exercice :*

- Vérifier que la force transverse (portance) est bien nulle comme l'impose ici la symétrie de l'écoulement.

- Montrer que pour une bulle sphérique (surface libre) :  $\vec{F}_z = -4\pi\eta R\vec{U}$ .

### Coefficient de traînée $C_D$

Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds on introduit souvent le coefficient de traînée  $C_D$  (sans dimension). Il est défini par

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 S} \quad (8.16)$$

où  $S$  est la section de l'objet et  $F_D$  la force de traînée (*drag* en anglais, d'où le D). En identifiant ici avec l'expression de la force de Stokes, on trouve :

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad (8.17)$$

où le nombre de Reynolds est calculé sur le diamètre ( $2R$ ) de la sphère. La figure 10.9 montre que l'expression de la force de Stokes est une bonne approximation de la force de traînée jusqu'à  $Re \sim 1$ . Au delà, la correction analytique d'Oseen permet d'écrire à l'ordre suivant ( $Re < 5$ ) :

$$C_D = \frac{24}{Re} \left[ 1 + \frac{3}{16} Re \right] \quad (8.18)$$

A plus haut nombre de Reynolds encore on peut trouver d'autres formules empiriques pour  $C_D$  (§ 3.2).

### 8.2.3 La sédimentation

Une sphère unique placée dans un fluide va sédimenter si sa densité est supérieure à la densité du fluide. Après une phase initiale d'accélération elle va ensuite sédimenter à sa vitesse limite de chute. La valeur du nombre de Reynolds calculé avec cette vitesse de chute va permettre de savoir si c'est

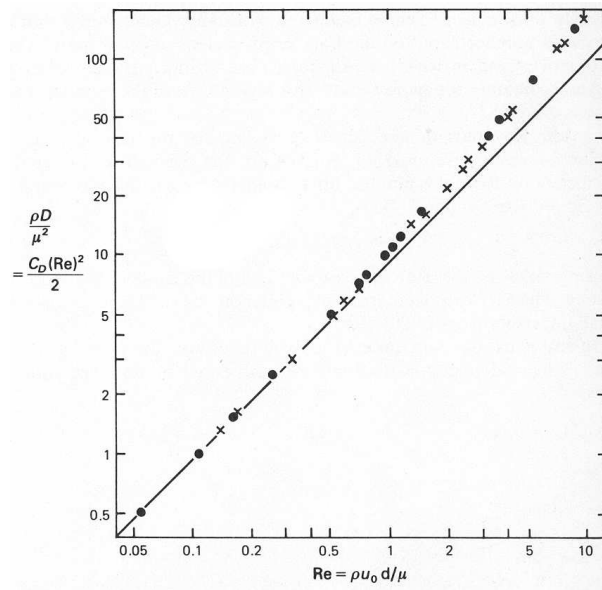


FIG. 8.9 – Traînée sur une sphère à faible nombre de Reynolds (attention  $C_D$  est ici multiplié par  $\pi/4$ ). D'après Réf. [28] p. 111.

un vitesse de chute visqueuse ou inertielle. Dans le premier cas il y a égalité entre le poids apparent (poids corrigé de la poussée d'Archimède) et la force de Stokes :

$$g(\rho_s - \rho_f)\frac{4}{3}\pi R^3 = 6\pi\eta R V_{Stokes},$$

soit

$$V_{Stokes} = \frac{2}{9} \frac{\Delta\rho g}{\eta} R^2, \quad (8.19)$$

avec  $\Delta\rho = \rho_s - \rho_f$ . Cette vitesse limite de chute est dite vitesse limite de Stokes. Elle est proportionnelle au carré du rayon, donc les grosses particules sédimentent plus vite. Ce résultat reste vrai même si les particules ne sont pas parfaitement sphériques.

En réalité, les toutes petites particules ( $\sim 1 \mu m$ ) dites **particules colloïdales** ou **particules browniennes** ne sédimentent pratiquement pas à cause de l'agitation thermique (la vitesse aléatoire moyenne devient supérieure à la vitesse de sédimentation).

Pour que le nombre de Reynolds de chute soit petit et que l'on puisse utiliser la formule de la force de Stokes il faut :

$$Re = \frac{2R V_{Stokes}}{\nu} = \frac{4}{9} \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{g R^3}{\nu^2} \ll 1,$$

soit :

$$R \ll \left( \frac{9}{4} \frac{\rho}{\Delta\rho} \frac{\nu^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Si maintenant beaucoup de particules sédimentent ensemble, le calcul de la vitesse de sédimentation se complique nettement (il n'est d'ailleurs pas résolu à ce jour). En effet il existe des interactions collectives (à  $N$  corps) car le champ de vitesse autour d'une particule décroît lentement (en  $1/r$ ) et des effets dus à la taille finie du récipient (effet de paroi). De fait la sédimentation d'un grand

nombre de particules crée un contre-écoulement du fluide vers le haut qui ralentit leur chute (une jolie démonstration en est l'effet Boycott observé lorsque l'on incline le récipient). La vitesse est alors une fonction de la concentration en particules :

- A faible Reynolds, Albert Einstein (1905) a donné le premier terme correctif à la vitesse limite de chute dépendant de la concentration  $c$  en particules :  $V_{lim} \approx V_{Stokes} [1 - 6,55 c]$ .
- Au-delà on utilise la loi empirique de Richardson-Zaki,  $V_{lim} = V_{Stokes} [1 - c/c_{max}]^n$  où  $n \approx 5$ , mais dépend du nombre de Reynolds et  $c_{max}$  est la compacité maximum, de l'ordre de 54 % pour un empilement aléatoire lâche de sphères identiques.

#### 8.2.4 La réversibilité et la vie aux faibles nombres de Reynolds

Si  $Re \ll 1$  les termes inertiels sont négligeables et l'équation de la dynamique se réduit à l'équation 10.7. Si de plus l'écoulement est stationnaire (ou à un nombre de Stokes très petit) on retrouve l'équation 10.8. Cette équation  $\vec{\nabla} \cdot (p + \rho\Phi) = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}$  est une équation **réversible**, ce qui a d'importantes conséquences. En effet, la transformation  $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$  transforme  $(p + \rho\Phi)$  en  $-(p + \rho\Phi)$ .

Voyons quelques exemples et contre-exemples :

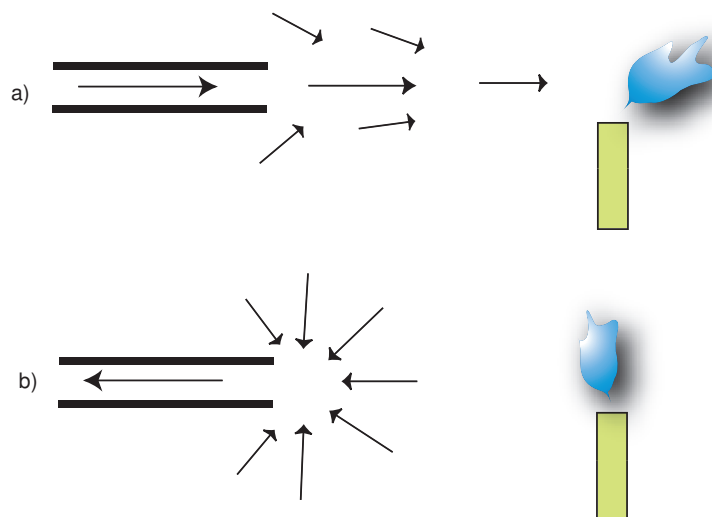


FIG. 8.10 – Un exemple d'irréversibilité des écoulements, ou pourquoi il est plus facile d'éteindre une bougie en soufflant (a) qu'en aspirant (b) !

- Cas d'une bille tombant à côté d'un mur vertical. La réversibilité impliquant que le mouvement vers le bas est identique à un mouvement vers le haut, la bille doit tomber parallèlement à la paroi. A faible Reynolds et en régime stationnaire une bille n'est ni repoussée ni attirée par la paroi.
- Si maintenant on regarde le mouvement d'une bille s'approchant d'une paroi horizontale, ou s'en éloignant, ces mouvements ne sont pas identiques car dans les deux cas il y a des forces d'accélération (instationnarité) donc des effets de masse ajoutée et des forces d'histoire.
- Expérience de G.I. Taylor. Une tâche de colorant dans un fluide visqueux placé dans l'espace entre deux cylindres d'un montage de Couette circulaire est déformée par l'écoulement. Mais quelques tours en sens contraire reconstituent la forme initiale de la tâche (aux effets de diffusion moléculaire près) si la viscosité du liquide est suffisamment forte.

- Chaos lagrangien. On peut avoir le mélange de deux fluides dans un écoulement à faible nombre de Reynolds, mais uniquement près des points cols, là où les termes instationnaires sont importants.

L'article de Purcell [24] est une excellente lecture introductive au sujet de la réversibilité des écoulements et de sa conséquence pour la vie animale aux faibles nombres de Reynolds. Je vous en recommande vivement la lecture.

### 8.3 Les écoulements quasi-parallèles : les équations de la lubrification

Dans les écoulements de Stokes ( $Re \ll 1$ ) (voir § 10.2.1) et dans les écoulements parallèles (voir § 10.1), le terme inertiel  $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$  de l'équation de Navier-Stokes est soit négligeable soit exactement nul. Dans de nombreux cas l'écoulement est *presque* parallèle, c'est-à-dire qu'une composante de la vitesse domine devant les autres et que les angles entre les parois sont faibles. Ces écoulements dits *lubrifiés* sont parfois appelés *écoulements rampants* (*creeping flow* en anglais).

Comme les lignes de courants sont parallèles aux parois, elles font un angle  $\theta$  faible avec l'axe des  $x$  (figure 10.11). On peut alors calculer des *ordres de grandeur* (noté ODG) des différents termes des équations du mouvement.

Prenons le cas de l'écoulement à deux dimensions (2C2D) entre deux parois :  $\vec{u} = (u_x(x, y), u_y(x, y), 0)$  et appelons  $U$  l'ODG des vitesses horizontales et  $e_0$  l'ODG des épaisseurs. Comme l'écoulement est laminaire, les lignes de courant sont pratiquement parallèles aux parois et donc presque parallèles à l'axe des  $x$ , on a :  $u_x \approx U$  et  $u_y \approx U\theta$ .

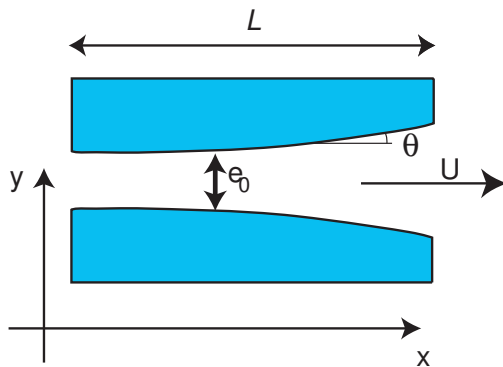


FIG. 8.11 – Schéma d'un écoulement quasi-parallèle lubrifié.

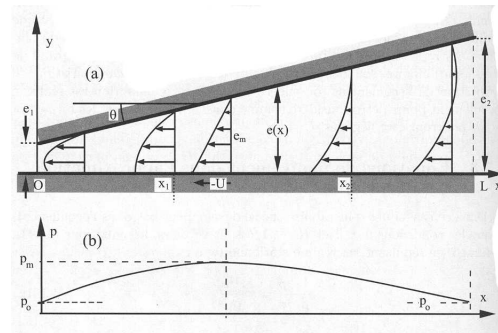


FIG. 8.12 – Schéma du palier lubrifié lorsque le plan inférieur se déplace de droite à gauche. (a) Profils de vitesse, (b) profil de pression. (D'après [15] p. 228).

Comme nous le verrons, l'écoulement étant localement la superposition d'un écoulement de Poiseuille ou de Couette, on peut estimer ses dérivées transverses :

$$\begin{cases} ODG\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \frac{U}{e_0} \\ ODG\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = \frac{U\theta}{e_0} \end{cases}$$

En dérivant encore un fois ces expressions selon  $y$ , il vient :

$$\begin{cases} ODG\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) = \frac{U}{e_0^2} \\ ODG\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right) = \frac{U\theta}{e_0^2} \end{cases}$$



### 8.3. LES ÉCOULEMENTS QUASI-PARALLÈLES : LES ÉQUATIONS DE LA LUBRIFICATION 83

La conservation de la masse nous donne

$$ODG\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) = ODG\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = \frac{U\theta}{e_0}$$

Pour les dérivées secondes, on a en dérivant l'équation de continuité :

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \sim \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}$$

et

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \sim \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \sim \frac{U\theta}{e_0^2}.$$

Reportons ces termes dans la projection selon  $x$  de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y}\right) u_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right).$$

ODG  $\left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \sim \frac{U^2 \theta}{e_0}$ . Pour calculer l'ODG du terme visqueux il nous manque encore l'ODG du terme  $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$ . Nous avons  $\frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U\theta}{e_0}$ , et en supposant une échelle de variation horizontale  $L$  il vient :  $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \sim \frac{U\theta}{e_0 L}$ .

Du coup  $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$  si  $e_0 \theta / L \ll 1$  ce qui est vérifié jusqu'à l'ordre 2. Alors ODG  $\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) \sim \frac{U\theta}{e_0^2}$ .

Les termes inertiels seront alors négligeables devant les termes visqueux si

$$U^2 \theta / e_0 \ll \nu U / e_0^2$$

soit

$$(U e_0 / \nu) \theta = Re \theta \ll 1,$$

où  $Re$  est un nombre de Reynolds construit sur la vitesse  $U$  et la largeur  $e_0$ . Cette équation est un compromis entre la condition des écoulements parallèles ( $\theta = 0$  et  $Re$  en principe quelconque<sup>1</sup>) et la condition des écoulements de Stokes ( $Re \ll 1$  et  $\theta$  quelconque).

En étudiant ensuite la projection de Navier-Stokes sur  $y$  on peut montrer que

$$\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x}.$$

On obtient alors le système suivant pour résoudre l'écoulement :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

à condition de pouvoir négliger les termes instationnaires ce qui est le cas si le nombre de Stokes est petit ( $St = \frac{e_0^2}{\nu T} \ll 1$ ). On peut alors intégrer l'équation de Navier-Stokes pour  $u_x$  selon  $y$  (variation rapide) en négligeant les variations de  $p$  avec  $y$  puis on intègre en  $x$ . Tout se passe comme si localement l'écoulement était parallèle. On trouve donc toujours, selon les conditions aux limites de pression et de vitesse, une superposition locale d'un écoulement de Couette et de Poiseuille.

<sup>1</sup>Dans la pratique inférieur à quelques milliers car sinon l'écoulement peut devenir instable et transiter brutalement vers un état turbulent, c'est-à-dire où la vitesse fluctue fortement dans le temps en un point donné

### 8.3.1 Calcul d'un palier lubrifié

On considère le mouvement horizontale d'un bloc au-dessus d'un plan, ce bloc faisant un petit angle  $\theta$  avec le plan (figure 10.12).

**Exercice :** Montrer que si l'on note respectivement  $e_1$  et  $e_2$  les épaisseurs minimum et maximum de la couche  $\theta = (e_2 - e_1)/L$ , on a pour les forces tangentielle et normale :

$$\begin{aligned} F_T &= - \left[ 6 + 2 \ln \left( \frac{e_2}{e_1} \right) \right] \frac{\eta U}{\theta} \\ F_N &= 6 \left[ \ln \left( \frac{e_2}{e_1} \right) - 2 \right] \frac{\eta U}{\theta^2} \end{aligned} \quad (8.20)$$

En particulier montrer que  $\frac{F_N}{F_T} \sim 1/\theta$  est grand, ce qui est recherché dans les paliers lubrifiés pour supporter de lourdes charges sans consommer trop de puissance. C'est le même phénomène qui sustente les planches de bois qui servent à glisser dans quelques centimètres d'eau sur les plages à marée basse, ou qui cause l'aquaplaning sur une route mouillée.

# Chapitre 9

## La portance sur une aile

### Sommaire

---

<b>9.1 Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible</b> . . . . .	<b>75</b>
9.1.1 Quelques valeurs de nombres de Reynolds . . . . .	76
9.1.2 Quelques autres nombres sans dimension . . . . .	77
<b>9.2 Les conditions aux limites cinématiques et dynamiques</b> . . . . .	<b>78</b>
9.2.1 Les conditions cinématiques . . . . .	78
9.2.2 Les conditions dynamiques . . . . .	80
9.2.3 Tableau récapitulatif des conditions aux limites . . . . .	82

---

Pour tout objet dans un écoulement uniforme, on définit la **force de traînée**  $\vec{D}$  (drag en anglais) comme la force dans l'axe de l'écoulement, et la **portance**  $\vec{L}$  (lift en anglais) comme la force perpendiculaire à cet axe. On définit aussi des coefficients adimensionnés de traînée et de portance par :

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A} \quad (9.1)$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A} \quad (9.2)$$

où  $D$  et  $L$  représentent respectivement l'intensité des forces de traînée et de portance et  $A$  est une surface représentant l'obstacle. Pour une aile c'est souvent la surface de l'aile.

Une aile en incidence dans un écoulement (figure 11) présentera de la portance uniquement s'il existe une circulation  $\Gamma$  non nulle autour d'elle. Mais sa portance sera maximum pour un angle d'incidence donné que si l'aile n'a pas décroché, c'est-à-dire si l'écoulement est laminaire sur le bord de fuite, c'est ce que l'on appelle la condition de Kutta (figure 11c). La circulation prend alors une valeur particulière  $\Gamma_{Kutta}$ .

La figure 11 montre que pour avoir une portance il faut que la vitesse de l'écoulement soit plus faible sous l'aile (coté appelé l'**intrados**) qu'au-dessus de l'aile (coté **extrados**). En conséquence, en supposant le fluide parfait, le théorème de Bernoulli nous dit que la pression sera plus forte sous l'aile et plus faible au-dessus de l'aile comme le montre la figure 11.

Attention, on trouve parfois dans la littérature un argument faux : « comme le fluide qui passe de chaque coté de l'aile doit arriver en même temps au bord de fuite, le fluide sur l'extrados doit aller

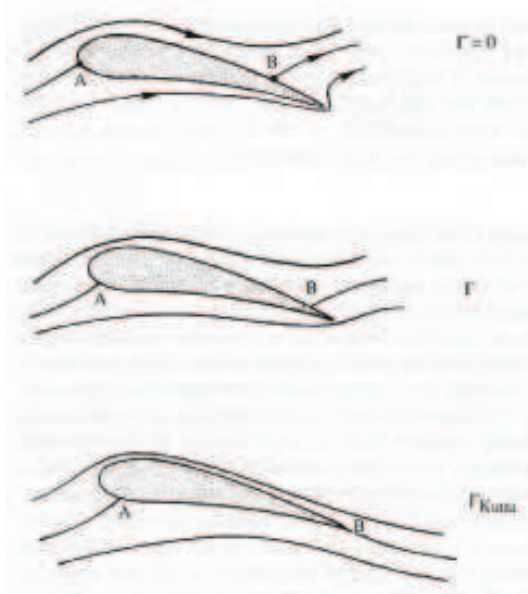


FIG. 9.1 – Circulation  $\Gamma$  et condition de Kutta au bord de fuite d'une aile. D'après [20] p. 553.

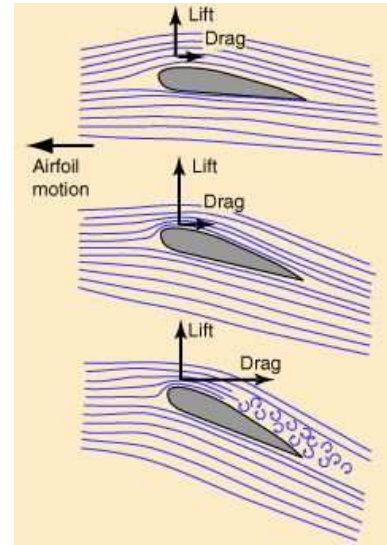


FIG. 9.2 – Ecoulement à différentes incidences. Si l'incidence est trop grande (de l'ordre de  $15^\circ$ ) l'aile décroche

plus vite que sur l'extrados ». Il n'y a aucune raison pour que le fluide mette le même temps pour parcourir chaque côté de l'aile et d'ailleurs il ne le fait pas comme le montre la figure 11.3.

Un calcul complet montre que pour un fluide parfait la portance  $\vec{L}$  par unité de longueur pour un écoulement supposé bidimensionnel est donné par la relation :

$$\vec{L} = \rho \vec{U}_\infty \wedge \vec{\Gamma},$$

où  $\vec{\Gamma}$  est un vecteur dirigé dans le plan perpendiculaire à l'écoulement et d'intensité égale à la circulation  $\Gamma$  (voir § ?? page ??). Une démonstration simplifiée a déjà été présentée au § 7.3.5. Notons que pour un fluide parfait la traînée est exactement nulle (c'est le paradoxe de d'Alembert). Ce n'est qu'à cause de l'existence de couches limites visqueuses que des forces de cisaillement s'exercent sur la surface de l'aile (traînée visqueuse) et que l'intégrale des forces de pression a une composante dans la direction de l'écoulement (traînée de forme et traînée induite). Toutefois la traînée est heureusement pour nos avions d'un ordre de grandeur plus faible que la portance.

Pour un écoulement à haut nombre de Reynolds, les couches limites sont minces, et les gradients de pression transverses à ces couches limites sont faibles. En conséquence le résultat pour la portance issu de l'hypothèse de fluide parfait reste correct au premier ordre pour des fluides réels.

Voici à titre de comparaison l'écoulement autour d'un cylindre en rotation dans un fluide parfait (figure 11.6).

## 9.0.2 Etude du décrochage

Un avion en vol horizontal à son poids équilibré par la portance. Cette portance suppose qu'il existe une certaine circulation autour de ses ailes. Mais la persistance de l'irrotationalité impose que cet avion en décollant laisse sur la piste un tourbillon de circulation contraire à celle localisée autour des ailes. Cette propriété est illustrée par la figure 11.7. On peut d'ailleurs en faire l'expérience avec un cuillère mise en mouvement rapidement dans un bol de café ou de chocolat.

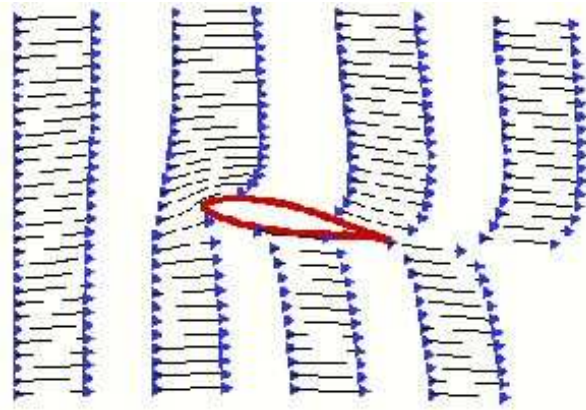


FIG. 9.3 – Simulation d'écoulement autour d'une aile, montrant que le fluide va plus vite au-dessus de l'aile et que les 2 veines de fluides n'arrivent pas en même temps au bord de fuite.

- **Tourbillons de bout d'aile.** Comme nous avons vu qu'un tube de vorticité ne peut s'arrêter au milieu de nulle part si le fluide est parfait, le vortex laiss e sur la piste de décollage est en fait reli e à la circulation existant autour des ailes par deux *vortex de bout d'aile* qui sont visibles sur la figure 11.8. Ces deux vortex contrarotatifs sont la signature d'un fort écoulement descendant derrière l'avion. Cet écoulement — appel e *downwash* en anglais — est une conséquence du principe d'action et réaction. Si l'air exerce une force vers le haut sur l'avion, la portance, l'avion exerce sur l'air une force vers le bas. C'est pourquoi il est dangereux pour un petit avion de croiser le sillage d'un gros porteur, et c'est aussi pourquoi les oiseaux migrateurs préfèrent voler en "V" afin de profiter du courant ascendant g n r e par un des vortex de bout d'aile de l'oiseau qui le précède !

- En vol horizontal, sur un avion de ligne la portance crée par le choix d'un angle d'incidence des ailes et de la vitesse de croisière équilibre le poids. Les moteurs de l'avion dissipent alors une puissance égale au produit de la force de traînée par la vitesse de translation de l'avion.

- Un planeur par contre, sans courant d'air ascendant, ne peut pas voler en vol horizontal. Il doit perdre de l'altitude pour avoir de la vitesse et donc de la portance. Son angle de descente est donn e par  $\tan \alpha = D/L$ . Son angle minimum de descente correspond au maximum du rapport portance sur traînée. On appelle **finesse** le maximum de ce rapport :  $f = L/D$ . Le tableau suivant donne quelques valeurs typiques de finesse.

	finesse
Moineau	4
parapente	8
deltaplane	12
aigle	12
Boeing 747	15
Albatros	20
Planeur	< 60

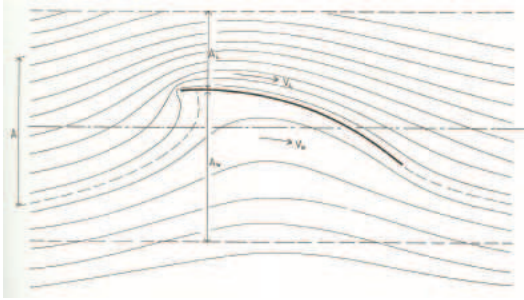


FIG. 9.4 – Ecoulement autour d'un profil mince. D'après [19] p. 43.

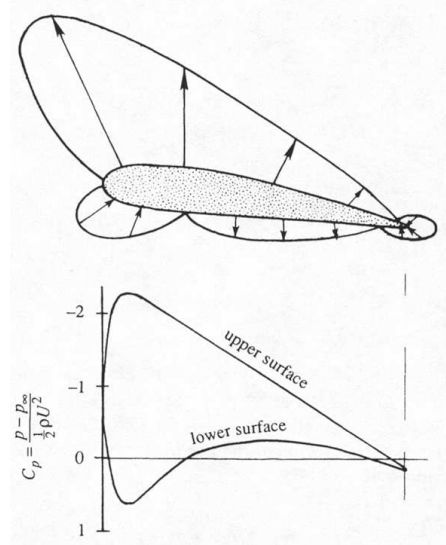


FIG. 9.5 – Distribution de pression autour d'une aile. D'après [20] p. 552.

### 9.0.3 Utilisation de la polaire Eiffel

Pour améliorer les profils d'aile il est important de connaître la portance et la traînée pour tout les angles d'incidence, et aussi pour différents nombres de Reynolds (figure 11.9). Pour une plaque plane sous faible incidence (inférieure à  $15^\circ$ ) on montre que  $C_L = 2\pi \sin \alpha$  et que  $C_D \approx 0$  (théorie de Kutta-Joukowski).

La polaire Eiffel est la courbe  $L = f(D)$  où chaque point correspond à un angle d'incidence. Cette courbe permet de trouver facilement la finesse de l'aile.

### 9.0.4 Cas d'un voilier

Un voilier utilise aussi des forces de portance pour avancer avec ou contre le vent. Pour lui la portance ne sert pas à équilibrer le poids (la poussée d'Archimède s'en charge). Par contre il a deux sortes d'ailes : ses voiles et sa quille. Les premières subissent l'écoulement du vent apparent (vent relatif mesuré dans le référentiel du bateau) avec son intensité et sa direction. Sa quille ou sa dérive subit elle l'écoulement de l'eau lié à la vitesse du bateau et à son angle de dérive. L'équilibre des forces de portance et de traînée, mais aussi des couples de retournement appliqués par ces forces, font tout le plaisir et la subtilité de la voile ! Par exemple les bateaux modernes peuvent aller plus vite que le vent réel (mesuré par un bateau immobile) et ce dans toutes les directions !

Les figures suivantes illustrent deux cas classiques : la remontée au près (figure 11.10) et la descente au portant (figure 11.11).

Notons que pour un voilier, en plus de la traînée de friction visqueuse (lié à la surface mouillée), de la traînée de pression (lié à la forme de la coque), de la traînée induite (lié à l'angle de dérive de la coque) il faut ajouter la traînée de vague (énergie consommée dans la génération des vagues).

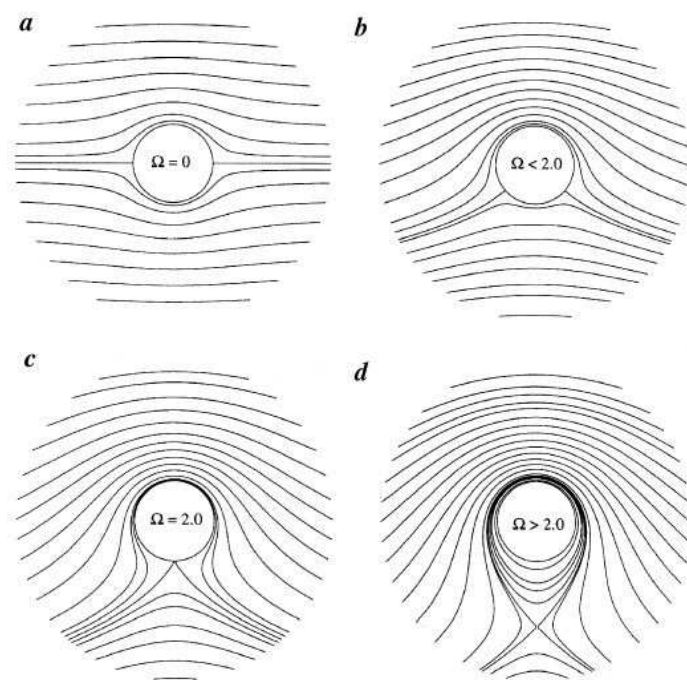


FIG. 9.6 – Ecoulement irrotationnel d'un fluide parfait autour d'un cylindre en rotation une vitesse angulaire (a) nulle, (b) souscritique, (c) critique et (d) supercritique.

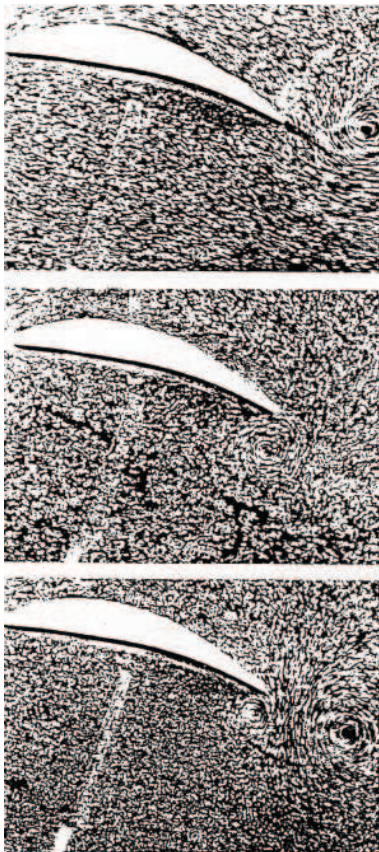


FIG. 9.7 – Apparition de la portance par émission de vortex : (a) démarrage de l'aile et émission d'un tourbillon positif au niveau du bord de chute créant une circulation négative sur l'aile, (b) arrêt de l'aile qui relâche un tourbillon négatif, (c) deux tourbillons de sens contraires sont formés par le démarrage et l'arrêt de l'aile.



FIG. 9.8 – Visualisation des vortex de bout d'aile



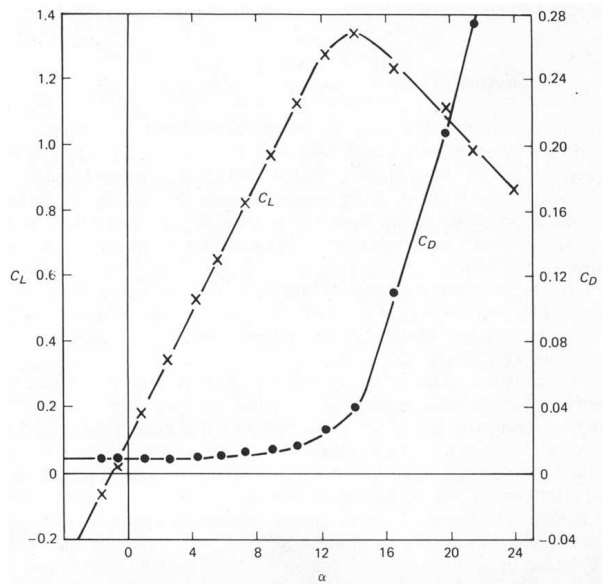


FIG. 9.9 – Variation de la portance et de la traînée d’une aile en fonction de l’incidence. D’après [28] p. 154.

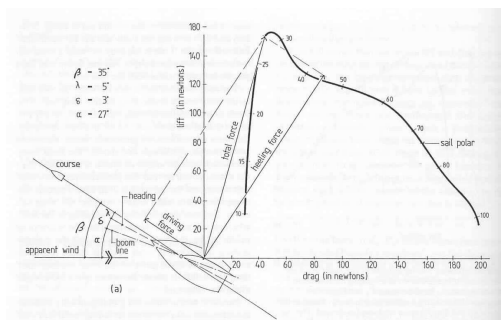


FIG. 9.10 – Portance sur une grand-voile au près. D’après [19] p. 62.

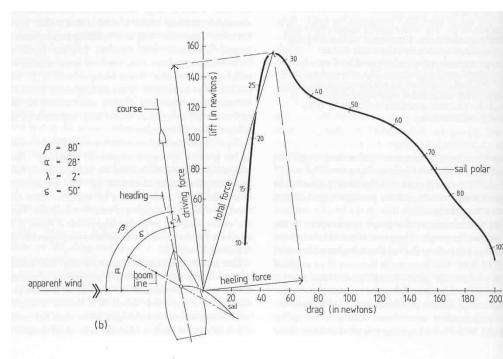


FIG. 9.11 – Portance sur une grand-voile au large. D’après [19] p. 62.

## 9.1 Nage et vol animal

De très nombreux animaux se déplacent à hauts nombres de Reynolds. Ils utilisent donc des forces de portance, soit sur des ailes, soit sur des nageoires.

### 9.1.1 Les oiseaux

Une analyse dimensionnelle pour les oiseaux, supposés à peu près homothétiques, montre que leur poids croît comme leur taille au cube ( $\sim l^3$ ), la surface de leurs ailes comme  $l^2$ . Comme la portance est proportionnelle à leur vitesse de vol au carré ( $U^2$  car  $C_D \approx C_{ste}$ ), on en déduit que le poids doit varier comme le cube de la vitesse de vol. C'est ce que montre la figure 11.12.

Une bonne référence sur les différents mécanismes du vol : vol plané, vol battu, vol stationnaire, accompagné de très belles photos, [7].

### 9.1.2 Les poissons

Les poissons se déplacent en propulsant de l'eau vers l'arrière grâce à leurs nageoires latérales et caudale (figure 11.13). Comme les voiliers ils n'ont pas à lutter contre la gravité. Par contre les mouvements des nageoires sont instationnaires ce qui rend plus délicat leur étude, on ne sait pas encore très bien estimer les rendements de leurs mouvements. Un thon par exemple a un mouvement alterné de sa nageoire caudale qui émet des tourbillons de sens contraires correspondant à une **allée de von Kármán**. Toutefois ces tourbillons ont un sens opposé à celui qu'ils auraient si le poisson, immobile ou mort, était tiré dans de l'eau au repos. En propulsion normale, un jet d'eau est dirigé vers l'arrière, ce qui par conservation de la quantité de mouvement totale, pousse le poisson vers l'avant. On pourra par exemple consulter le site du MIT (<http://web.mit.edu/towtank/www/Tuna/tuna.html>) où une équipe a réalisé un robot en forme de thon.

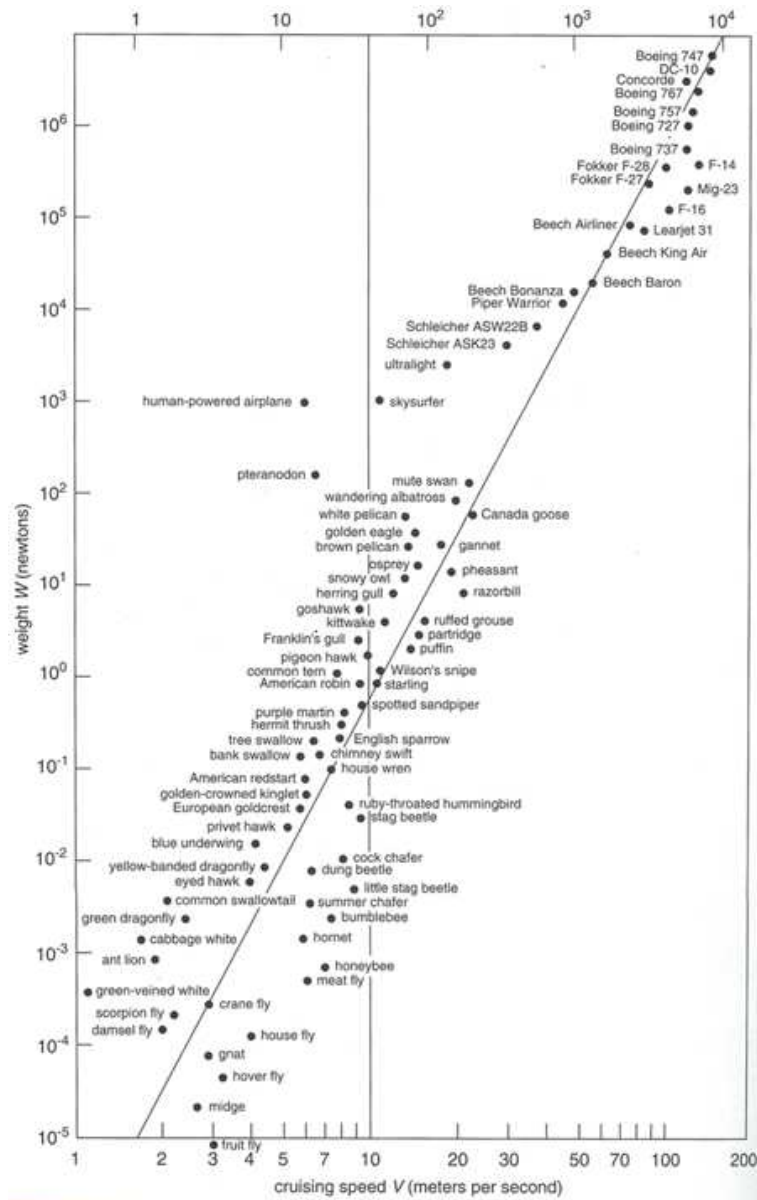


FIG. 9.12 – Loi d'échelle entre le poids et la vitesse de vol des animaux et objets volants. D'après [26] p. 12.

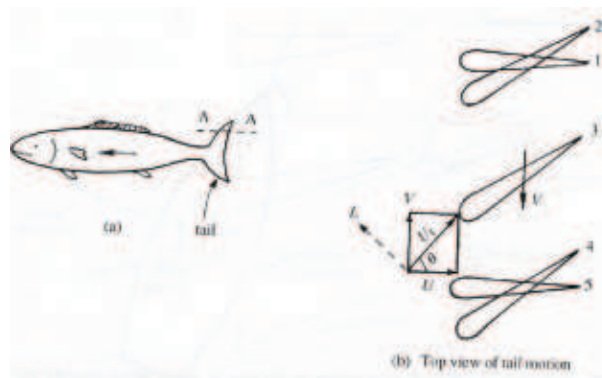


FIG. 9.13 – Etude de la portance sur une nageoire de poisson. D'après [20] p. 573.

# Chapitre 10

## La couche limite

### Sommaire

---

<b>10.1 Les écoulements parallèles</b> . . . . .	<b>85</b>
10.1.1 Ecoulement de Couette plan . . . . .	86
10.1.2 Ecoulement de Couette circulaire . . . . .	86
10.1.3 Ecoulement de Poiseuille plan . . . . .	87
10.1.4 Ecoulement sur un plan incliné . . . . .	87
10.1.5 Ecoulement de Poiseuille en conduite circulaire . . . . .	87
10.1.6 Solutions instationnaires . . . . .	89
<b>10.2 Les écoulements à très faibles nombre de Reynolds</b> . . . . .	<b>89</b>
10.2.1 Equation de Stokes . . . . .	89
10.2.2 Ecoulement autour d'une sphère : force de Stokes . . . . .	91
10.2.3 La sédimentation . . . . .	93
10.2.4 La réversibilité et la vie aux faibles nombres de Reynolds . . . . .	95
<b>10.3 Les écoulements quasi-parallèles : les équations de la lubrification</b> . . . . .	<b>96</b>
10.3.1 Calcul d'un palier lubrifié . . . . .	98

---

On pourra lire avec profit les documents suivants : [15] p. 507, [4] p. 321, [20] p. 299 et [6] tome II p. 86, et le chapitre correspondant dans le CD [17].

### 10.1 Introduction

La compréhension du comportement des couches limites date du début du XXème siècle. Les travaux de Prandtl ont permis une avancée majeure dans l'histoire de la mécanique des fluides.

Nous avons déjà évoqué quelques phénomènes de couches limites lors de l'établissement de l'écoulement de Poiseuille ou de Couette, ou du démarrage d'une plaque plane au § 10.1.6. Il existe alors deux domaines : l'un loin des parois où l'écoulement n'est pas encore modifié et où la viscosité n'a aucune influence, l'autre près de la paroi où la quantité de mouvement diffuse en racine du temps à cause de la viscosité. En passant d'une description temporelle à une description spatiale on voit apparaître deux échelles de longueur très distinctes, une grande dans le sens de l'écoulement et une petite dans la direction transverse à la paroi. L'étude de la couche limite laminaire, par exemple sur une plaque plane comme schématisée sur la figure 12.1, est le but de ce chapitre.

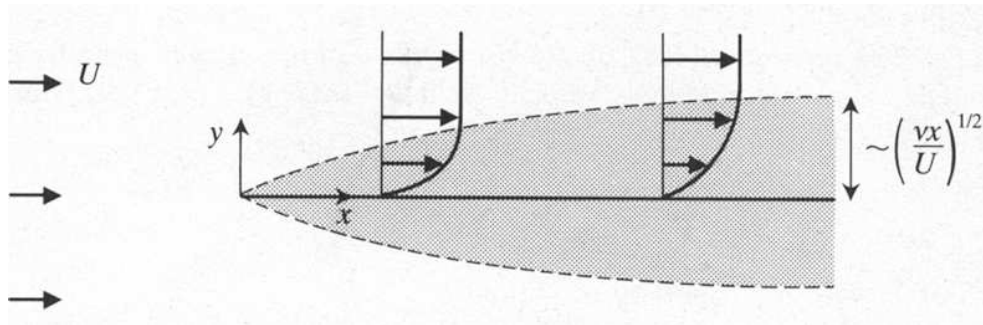


FIG. 10.1 – Ecoulement de couche limite au voisinage d’une plaque plane. D’après [1] p. 49.

### 10.1.1 Définitions de l’épaisseur de couche limite

On peut définir plusieurs échelles caractérisant l’épaisseur des couches limites présentes à haut nombre de Reynolds près des parois solides.

– *Épaisseur  $\delta_{0,99}$  de la couche limite*

Cette épaisseur  $\delta_{0,99}(x)$  correspond à la distance de la plaque où la vitesse longitudinale atteint 99% de la vitesse à l’infini  $U_e$ .

$$u[x, \delta_{0,99}(x)] = 0,99 U_e .$$

Pour un écoulement uniforme sur une plaque plane on trouve :  $\delta_{0,99}(x) \approx 5\sqrt{\nu x/U_e}$ .

– *Épaisseur de déplacement  $\delta^*$*

L’épaisseur de déplacement correspond au déplacement latéral de la paroi qu’il faudrait effectuer dans un écoulement uniforme pour avoir le même débit massique dans l’hypothèse d’un fluide parfait (glissement à la paroi). C’est aussi le déplacement latéral des lignes de courant entre l’amont et l’aval. Ce déplacement latéral étant dû à l’existence d’une petite vitesse transverse dans et hors de la couche limite. Pour un fluide incompressible le débit massique s’écrit :

$$Q/\rho = \int_0^\infty u(y)dy = \int_{\delta^*}^\infty U_e dy ,$$

en appelant  $U_e$  la vitesse longitudinale loin de la paroi.

Un petit schéma montre que l’on a égalité des aires et donc :

$$U_e \delta^* = \int_0^\infty (U_e - u) dy .$$

On peut donc finalement écrire :

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty (1 - u(x, y)/U_e) dy .$$

Pour un écoulement uniforme arrivant sur une plaque plane on trouve :  $\delta^*(x) \approx 1,73\sqrt{\nu x/U_e}$ .

– *Épaisseur de quantité de mouvement  $\delta^{**}$*

Cette épaisseur est construite avec le flux de quantité de mouvement :

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_e} (1 - u/U_e) dy.$$

Pour un écoulement uniforme sur une plaque plane on trouve :  $\delta^{**}(x) \approx 0,66\sqrt{\nu x/U_e}$ .

En résumé pour une plaque plane dans un écoulement laminaire uniforme, on peut définir plusieurs épaisseurs caractéristiques et l'on a :  $\delta_{0,99} > \delta^* > \delta^{**}$ . Il faut toutefois remarquer qu'aucune de ces définitions de la frontière de la couche limite ne correspond à une ligne de courant.

## 10.2 Couche limite laminaire d'un fluide incompressible sur une plaque plane

L'hypothèse de base est que, loin des parois, l'écoulement est laminaire et n'est pas influencé par la viscosité. On a alors affaire à un fluide parfait, qui satisfait à l'équation d'Euler et à l'équation de Bernoulli. Près de la plaque au contraire, l'écoulement est dominé par les termes visqueux. Cette couche limite est d'épaisseur variable  $\delta(x)$  mais faible et l'on pourra faire les approximations des écoulements quasi-parallèles. Le raisonnement est aussi valable si la paroi est légèrement courbée, à condition que le rayon de courbure soit grand devant l'épaisseur de la couche limite.

### 10.2.1 Les équations de Prandtl (1904)

Près de la paroi on suppose que l'écoulement est 2D2C,  $\vec{u}(x, y) = (u, v, 0)$  avec les conditions aux limites  $\vec{u} = \vec{0}$  pour  $y = 0$  et  $u = U_e(x)$  pour  $y \rightarrow +\infty$  (figure 12.1) et l'on mène un calcul similaire à celui d'un écoulement de lubrification (§ 10.3 page 96).

La conservation de la masse,  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ , nous permet une estimation des ordres de grandeur :  $u/x_0 \approx v/\delta$ , où  $x_0$  est l'abscisse du point considéré par rapport au bord d'attaque de la plaque. Donc la vitesse transverse est négligeable devant la vitesse longitudinale lorsque  $\delta \ll x_0$ .

Ecrivons l'équation de Navier-Stokes d'un écoulement stationnaire pour les deux composantes  $u$  et  $v$ .

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (10.1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (10.2)$$

Le terme visqueux a été simplifié pour tenir compte du fait que  $\delta \ll x_0$  et donc que les dérivées secondes en  $y$  dominant.

Comme  $v \ll u$ , les termes où la vitesse intervient dans l'équation selon  $y$  (10.2) sont d'un ordre de grandeur inférieurs aux termes correspondant de la première équation (10.1). On en déduit que  $\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x}$ . Les gradients de pression transverses sont faibles et au premier ordre la pression ne varie que selon  $x$ , soit  $p \approx p(x)$ . En particulier la pression dans la couche limite est la même que dans l'écoulement extérieur. C'est à cause de cette propriété qu'un tube de Pitot peut être utilisé pour mesurer la vitesse dans un fluide (cf 7.3.1 page 57). En effet la pression mesurée à la paroi est pratiquement la même que celle qui existe au-delà de la couche limite ( $\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$ ). De même c'est parce que les couches limites sont minces que les équations d'Euler donne la bonne portance pour une aile d'avion en incidence malgré la présence de couches limites attachées (cf 7.3.5 page 60).

Les termes visqueux sont dominants dans la couche limite, les termes inertiels le sont en dehors de cette couche. Les deux termes sont du même ordre de grandeur à une distance  $\delta$  de la surface solide si :

$$U_e^2/x_0 \approx \nu U_e/\delta^2, \text{ où } x_0 \text{ est la distance au bord d'attaque de l'obstacle. Soit si}$$

$$\delta(x_0) = \sqrt{\nu x_0/U_e}.$$

L'épaisseur de la couche limite croît lentement, en racine de la distance selon  $x$ . Si on introduit un nombre de Reynolds longitudinal construit sur la distance  $x_0$  du début de la couche limite,  $Re_{x_0} = U_e x_0/\nu$ , on a :

$$\frac{\delta(x_0)}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{Re_{x_0}}}.$$

Si ce nombre de Reynolds est élevé, on a bien  $\delta \ll x_0$ . En particulier l'analyse n'est plus valable si  $x_0$  est petit, c'est-à-dire très près du bord d'attaque de la plaque.

En dehors de la couche limite, la viscosité étant négligeable, l'équation de Bernoulli nous donne  $p(x) + \rho U_e^2(x)/2 = Cste$  sur une ligne de courant. Nous avons ici traité le cas général où l'écoulement externe  $U_e(x)$  peut dépendre de  $x$ . Soit :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U_e(x) \frac{\partial U_e}{\partial x}. \quad (10.3)$$

On peut donc remplacer dans l'équation de Navier-Stokes et l'on obtient l'équation de Prandtl de la couche limite :

$$\boxed{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e(x) \frac{\partial U_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}. \quad (10.4)$$

### 10.2.2 Profil de vitesse de Blasius (1907)

Si maintenant l'écoulement externe est homogène,  $U_e(x) = U_e = Cste$ , l'équation 10.4 se simplifie en :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

et elle admet une solution auto-similaire.

Pour le montrer, posons  $X = x/x_0$ ,  $Y = y/\delta(x)$ ,  $U = u/U_e$  et  $V = v/(\frac{U_e}{\sqrt{Re_{x_0}}})$ . La conservation de la masse et l'équation de la dynamique de la composante longitudinale s'écrivent alors :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (10.5)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (10.6)$$

Ces équations ne contiennent plus aucun paramètre (ni  $U_e$ , ni  $Re_{x_0}$ ). Il existe une solution auto-similaire,  $U = f(Y)$  avec pour condition aux limites :  $f(0) = 0$  et  $f(\infty) = 1$ .

En exprimant  $\frac{\partial V}{\partial Y}$  par l'équation de continuité (10.5) et en intégrant par partie cette expression on obtient formellement  $V(Y)$  que l'on peut injecter dans l'équation 10.6.



On en déduit l'équation intégro-différentielle satisfaite par  $f$  :

$$2f'' + f' \int_0^Y f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Si on introduit la fonction  $F(Y) = \int_0^Y f(\zeta) d\zeta$  cette nouvelle équation peut s'écrire :

$$\boxed{2F''' + F''F = 0}. \tag{10.7}$$

C'est l'équation de Blasius.

Cette équation s'intègre numériquement et donne alors le profil de vitesse longitudinale dans la couche limite (figure 12.2a). Le profil de vitesse est très linéaire dans la couche limite et transite rapidement (exponentiellement) vers l'asymptote.

Pour  $Y$  petit, on peut écrire un développement de Taylor. On a  $f(0) = 0$  et en utilisant l'équation intégro-différentielle,  $f''(0) = 0$ . En dérivant 12.7 on montre de plus que  $f'''(0) = 0$ . Le développement limité s'écrit donc :

$$f(Y) = Y f'(0) + bY^4 + O(Y^5).$$

En reportant dans l'équation de Blasius on trouve  $b = -\frac{1}{48} f'^2(0)$ .

Numériquement l'on trouve  $f'(0) = 0,332 \approx 1/3$  soit

$$\frac{u}{U_e} = \frac{1}{3} \frac{y}{\delta(x)} - \frac{1}{432} \left[ \frac{y}{\delta(x)} \right]^4 + \dots$$

De plus  $f(Y = 5) \approx 0,99$  soit  $\delta_{0,99} = 5\delta$ .

L'écartement progressif des lignes de courant (en  $\sqrt{x}$ ) est dû à l'existence d'une petite composante de vitesse transverse (dans et hors de la couche limite) que l'on peut calculer explicitement en utilisant la conservation de la masse (figure 12.2b).

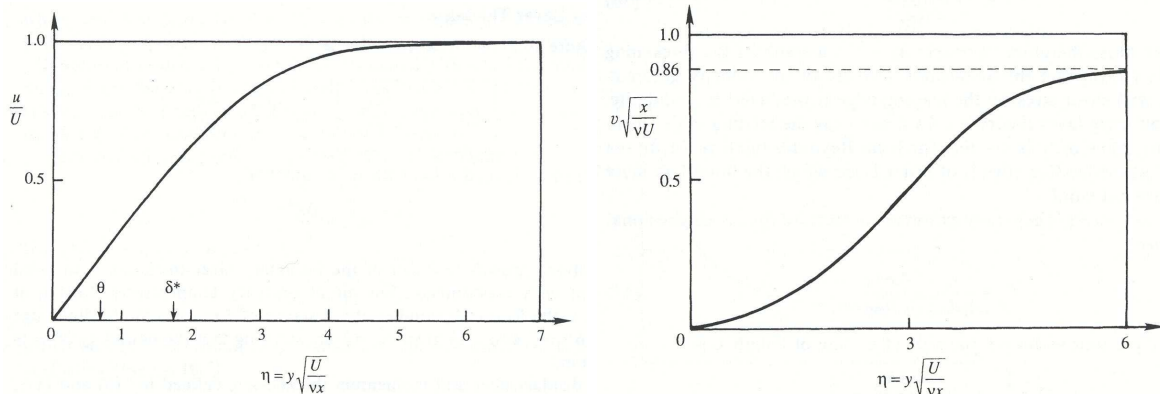


FIG. 10.2 – Profil de vitesse de Blasius. a) vitesse longitudinale  $U = f(Y)$ , b) vitesse transverse  $V = f(Y)$ . D'après [20] p. 311.

### 10.2.3 Calcul de la contrainte pariétale et du coefficient de traînée

La connaissance explicite de la vitesse dans la couche limite permet de calculer la contrainte locale de frottement visqueux sur la paroi.

$$\sigma_{xy} = \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \approx \eta U_e f'(0) \frac{\partial Y}{\partial y} = \eta U_e f'(0) \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \approx \frac{1}{3} \frac{\rho U_e^2}{\sqrt{Re_{x_0}}}.$$

On en déduit la force de traînée visqueuse par unité de largeur et par face d'une plaque de longueur  $L$  :

$$F_D = \int_0^L \sigma_{xy} dx = 2\rho U_e^2 L f'(0) \frac{1}{\sqrt{Re_L}}.$$

La force de traînée varie donc comme  $U_e^{3/2}$  et comme  $L^{1/2}$ . La dépendance avec la vitesse en puissance  $3/2$  est clairement intermédiaire avec le cas très visqueux (force de Stokes) où elle est proportionnelle à  $U_e$  et le cas des Reynolds très élevés où l'écoulement est turbulent et où elle varie comme le carré de la vitesse. La dépendance avec la longueur en puissance  $1/2$  fait que si  $L$  double, la force de traînée ne double pas. La contribution aux frottements des zones en amont de la plaque sont donc plus importantes que celles des zones en aval (où le cisaillement est moins intense).

Si on introduit le coefficient de traînée adimensionné, on trouve :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_e^2 L} = \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{Re_L}}.$$

Résultat qu'il faut multiplier par 2 si l'on veut tenir compte des deux faces de la plaque. Lorsque le nombre de Reynolds est élevé, ce coefficient de traînée est très faible, mais la couche limite peut aussi devenir turbulente.

A. N. Calculer la force de traînée d'une plaque de  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$  tirée à incidence nulle à une vitesse de  $1 \text{ m/s}$  dans de l'eau.

## 10.3 Couche limite turbulente

Si l'épaisseur de la couche limite est très faible, il existe un très fort cisaillement entre la vitesse nulle sur la paroi et la vitesse  $U_e$  hors de la couche limite. Ce cisaillement peut devenir tellement important que l'écoulement laminaire se déstabilise et devient turbulent. Ceci est observé si le nombre de Reynolds transverse calculé avec l'épaisseur de la couche limite  $Re_y = U_e \delta / \nu$  est suffisamment grand. Or

$$Re_y = U_e \delta / \nu = U_e \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}} / \nu = \sqrt{\frac{U_e x}{\nu}} = \sqrt{Re_x}.$$

La couche limite laminaire transite vers une couche limite turbulente si  $Re_y \approx 300$  (ce qui correspond à  $Re_x \approx 10^5$ ). On voit alors apparaître des ondes transverses dites « ondes de Tollmien-Schlichting » qui se déstabilisent en « épingles à cheveux », puis des tâches turbulentes apparaissent qui finalement envahissent toute la couche limite. Le profil de vitesse dans une couche limite turbulente est plus arrondi que dans une couche limite laminaire. On trouve en général un profil de vitesse logarithmique :

$$\bar{u}/u^* \approx 2,5 \ln \left( \frac{yu^*}{\nu} \right) + 5.$$

## 10.4 Couche limite sur une paroi courbée : décollement et contrôle de la couche limite

S'il existe un écoulement extérieur non uniforme (par exemple parce que la surface est fortement courbée ou que l'écoulement se situe dans un convergeant ou un divergeant) il existe des gradients de pression longitudinaux positifs ou négatifs qui interviennent dans l'équation de la couche limite (équation 12.1).

- Si l'écoulement accélère, d'après l'équation de Bernoulli valable au-delà de la couche limite (équation 12.3), on a  $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ . Le fluide est accéléré par ce gradient de pression,  $v$  devient négatif et la couche limite s'amincit.
- Par contre si  $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ , le fluide est décéléré et comme près de la paroi il était déjà ralenti l'écoulement peut changer de sens près de la paroi (figure 12.3). C'est ce que l'on appelle le décollement de la couche limite, une transition très importante par exemple pour les avions car il correspond à une perte brutale de portance (décrochage).

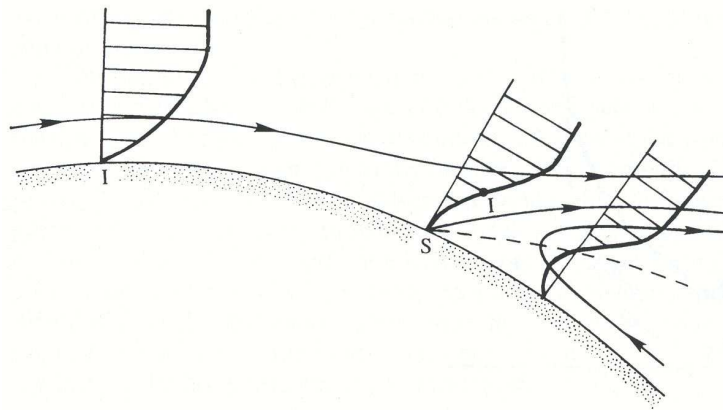


FIG. 10.3 – Lignes de courant et profils de vitesse près d'un point de séparation S. La ligne pointillée représente le lieu où  $u = 0$ . D'après [20] p. 319.

C'est le même phénomène que le marin cherche à visualiser sur ses voiles en y collant des brins de laine sur l'intrados et sur l'extrados (figure 12.4).

Le décollement des couches limites induit un sillage important et donc une forte augmentation de la traînée de pression. Il est donc très important de bien profiler l'arrière des obstacles. Le fait de profiler un véhicule par exemple permet de faire baisser la force de traînée d'un facteur 10 à 100 ! Il existe de nombreux dispositifs pour essayer de contrôler le décollement des couches limites : volets de bord d'attaque ou de bord de fuite sur les ailes à l'atterrissage, aspiration ou soufflage des couches limites, profilage des véhicules, alules sur les ailes de certains oiseaux planeurs (figure 12.5), etc.

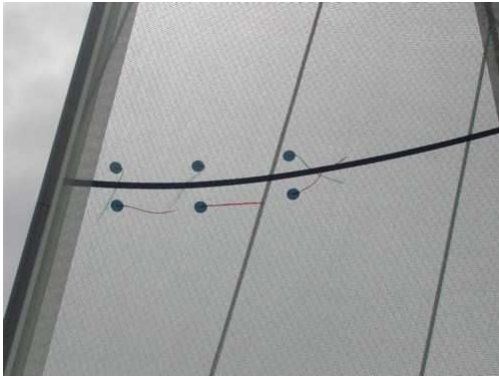


FIG. 10.4 – Brins de laine placés sur l'extrados et l'intrados (près du bord d'attaque) d'une voile d'avant d'un voilier naviguant au près et qui permettent de visualiser le décollement des couches limites.

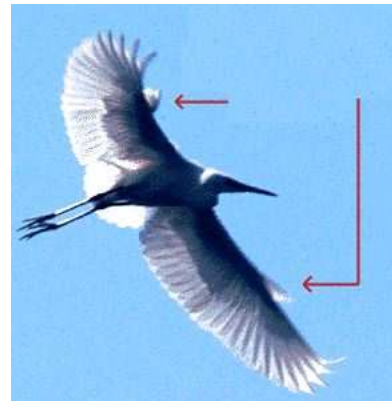


FIG. 10.5 – Aigrette en vol montrant ses alules utilisées volontairement pour recoller la couche limite et donc augmenter la portance à basse vitesse.

# Chapitre 11

## Formulaire

### Sommaire

---

11.0.2	Etude du décollage . . . . .	100
11.0.3	Utilisation de la polaire Eiffel . . . . .	102
11.0.4	Cas d'un voilier . . . . .	102
<b>11.1</b>	<b>Nage et vol animal . . . . .</b>	<b>106</b>
11.1.1	Les oiseaux . . . . .	106
11.1.2	Les poissons . . . . .	106

---

### 11.1 Opérateurs différentiels

•Relations usuelles :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{\nabla} U) &= \Delta U \\ \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) &= 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{\nabla} U) &= 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) &= \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} \\ \vec{\nabla}(UW) &= U \vec{\nabla} W + W \vec{\nabla} U \\ \operatorname{div}(U\vec{A}) &= U \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} U \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(U\vec{A}) &= \vec{\nabla} U \wedge \vec{A} + U \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \\ \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} + \vec{B} \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \\ \operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \end{aligned}$$

•Relations intégrales :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{S(C)} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (\text{théorème de STOKES})$$

$$\oint_C U d\vec{l} = - \iint_{S(C)} \vec{\nabla} U \wedge d\vec{S}$$

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V(S)} \text{div } \vec{A} dV \quad (\text{théorème de GREEN-OSTROGRADSKY})$$

$$\oiint_S U d\vec{S} = \iiint_{V(S)} \vec{\nabla} U dV$$

$$\oiint_S \vec{A} \wedge d\vec{S} = - \iiint_{V(S)} \text{rot } (\vec{A}) dV$$

$$\oiint_S (U \vec{\nabla} W - W \vec{\nabla} U) \cdot d\vec{S} = \iiint_{V(S)} (U \Delta W - W \Delta U) dV$$

• **Théorème de LEIBNITZ :**

$$\frac{d}{dt} \int_0^{h(t)} f(x, t) dx = \int_0^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f[h(t), t] \frac{dh(t)}{dt}$$

• **Théorème du transport de REYNOLDS :**

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} f(\vec{r}, t) dV = \iiint_{V(t)} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} \left( f \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right] dV$$

• **Coordonnées cartésiennes :**

$$\vec{\nabla}(U) = \vec{\nabla}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

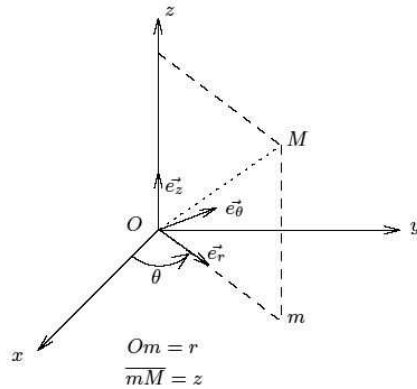
$$\Delta U = \vec{\nabla}^2(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\vec{\Delta}(\vec{A}) = \vec{\nabla}^2(\vec{A}) = (\Delta A_x) \vec{e}_x + (\Delta A_y) \vec{e}_y + (\Delta A_z) \vec{e}_z$$

• **Coordonnées cylindriques :**

$$\vec{\nabla} U = \vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

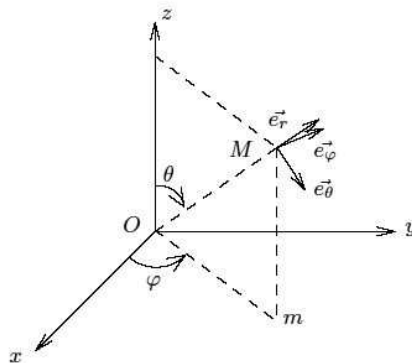

 FIG. 11.1 – Notations utilisées dans le système des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ 

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \vec{\nabla}^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\vec{\Delta}(\vec{A}) = \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \left( \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \vec{e}_r + \left( \Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta + (\Delta A_z) \vec{e}_z$$

• **Coordonnées sphériques :**


 FIG. 11.2 – Notations utilisées dans le système des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ 

$$\vec{\nabla}(U) = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}}(\vec{A}) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z \\ \Delta U &= \vec{\nabla}^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \\ \vec{\Delta}(\vec{A}) &= \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \left( \Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r \\ &+ \left( \Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\theta + \left( \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

## 11.2 Conservation de la masse et équation de NAVIER–STOKES

Pour un fluide Newtonien et incompressible on a :

$$\text{div}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{f}_m + \nu \vec{\nabla}^2 u$$

• **En coordonnées cartésiennes avec  $\vec{u} = (u, v, w)$  :**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

sur l'axe  $x$

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \eta \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

sur l'axe  $y$

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + f_y + \eta \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right]$$

sur l'axe  $z$

$$\rho \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \eta \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]$$

• **En coordonnées cylindriques avec  $\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$  :**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

sur l'axe  $r$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right]$$



sur l'axe  $\theta$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]$$

sur l'axe  $z$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]$$

• **En coordonnées sphériques avec  $\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_\varphi)$  :**

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

sur l'axe  $r$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{u_\varphi^2}{r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r$$

$$+ \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r u_r)}{\partial r^2} - \frac{2u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

sur l'axe  $\theta$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta$$

$$+ \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r u_\theta)}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

sur l'axe  $\varphi$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_\varphi \cot \theta}{r} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + f_\varphi$$

$$+ \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r u_\varphi)}{\partial r^2} - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right]$$



## Chapitre 12

# Quelques personnages marquants de la Mécanique des Fluides

Inspiré du site : <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html>

- **ARCHIMÈDE** (- 287, -212) : Né à Syracuse (Sicile), il est célèbre pour son théorème sur les corps immergés, "Principe d'Archimède".
- **BATCHELOR** George Keith. (1920-2000) : Professeur de Mécanique des Fluides à Cambridge (UK). De nombreuses contributions en particulier sur l'étude des écoulements de suspension de particules et dans le domaine de la turbulence.
- **BÉNARD** Henri (1874-1938) : Physicien français ayant étudié expérimentalement les tourbillons derrière un cylindre en mouvement ainsi que la convection thermique.
- **BERNOULLI** Daniel (1700-1782) d'origine suisse était à la fois un mathématicien, un hydrodynamicien et un physicien. C'était le plus jeune de quatre frères mathématiciens. Son Hydrodynamica (1738) présente son équation, mais ne la démontre pas vraiment à partir des premiers principes. La démonstration est due à Euler.
- **BLASIUS** Heinrich (1883-1970) : Physicien allemand connu pour ses travaux sur la couche limite.
- **BOLTZMANN** Ludwig (1844-1906) : Physicien autrichien. Principal créateur de la théorie cinétique des gaz qu'il élargit ensuite en une mécanique statistique.
- **BOND** : Le nombre de Bond compare les effets de gravité aux effets de la tension superficielle.
- **BOUSSINESQ** Joseph (1842-1929) : Physicien français, hydrodynamicien connu maintenant pour "l'approximation de BOUSSINESQ".
- **BUCKINGHAM** Edgar (1867-1940) : Physicien américain ayant permis le développement de l'analyse dimensionnelle.
- **COANDA** Henri (1886-1972) : XXXX Effet "Coanda".
- **COUETTE** Maurice (1858-1943) : Il a inventé un viscosimètre qui mesure les forces de cisaillement à la paroi.
- **D'ALEMBERT** Jean le Rond (1717-1783) : Un des fondateurs de l'hydrodynamique, en particulier par son "Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides". On parle encore souvent du Paradoxe de d'ALEMBERT.
- **DARCY** Henry Philibert Gaspard (1803-1858) a effectué de nombreuses études sur les pertes de charge pour des écoulements d'eau en conduite. Julius WEISBACH (1806-1871) a proposé la forme de l'équation de DARCY dans son traité de mécanique des fluides pour ingénieur.

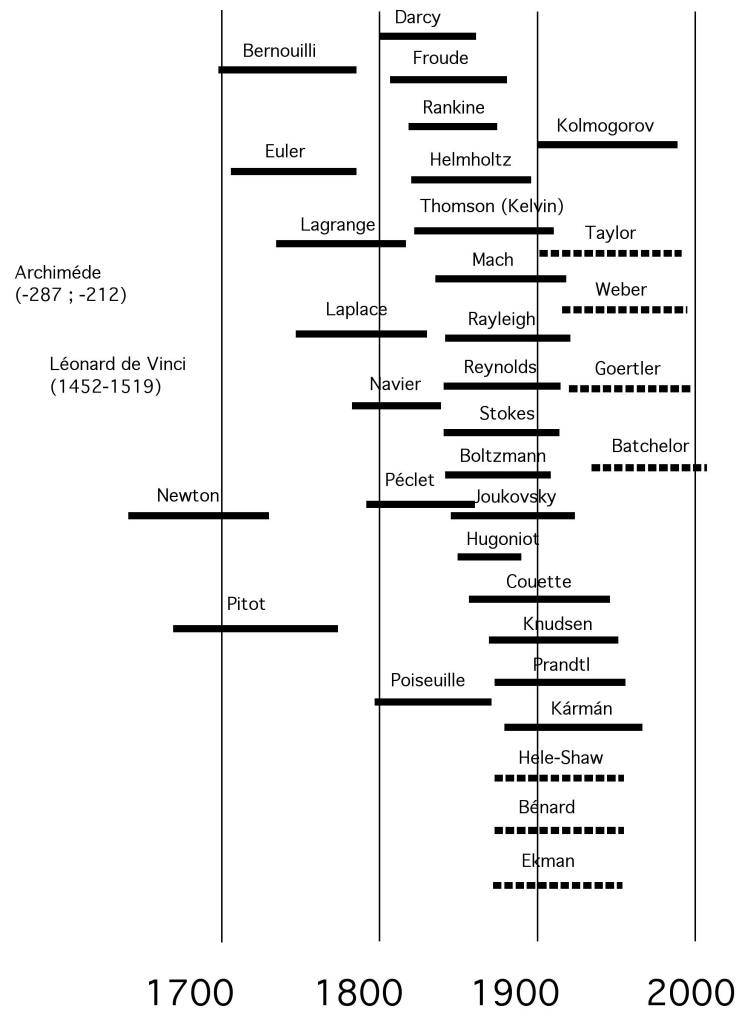


FIG. 12.1 – Tableau chronologique de quelques figures marquantes pour la Mécanique des Fluides

- **DE VINCI** Leonard (1452-1519) : Il s'est en particulier intéressé à décrire les écoulements turbulents.
- **DEAN** W. R. : 1928. Il a étudié les écoulements entre parois courbes. On parle d'instabilité de DEAN et de nombre de DEAN.
- **EKMAN** Vagn Walfrid (1874-1954) : Météorologiste et océanographe suédois qui a décrit en particulier la direction du vent ou du courant en fonction de la distance à la surface de l'océan (spirale d'EKMAN).
- **EULER** Leonhard (1707-1783) Un des mathématiciens les plus productifs de son temps, en particulier en mécanique, dynamique et hydrodynamique. Il a démontré que l'équation de BERNOULLI est une forme intégrale de l'équation d'EULER.
- **FROUDE** William (1810-1879) : ingénieur britannique. Créateur du premier bassin pour essais de modèle et inventeur d'un frein hydraulique.
- **GÖERTLER** Henry (1909-1987) : On lui doit l'étude des couches limites sur des parois concaves (instabilité de GÖERTLER et nombre de GÖERTLER).

- **HAGEN** Gotthilf (1797-1884) Ingénieur allemand, a étudié les écoulements en conduite à peu près en même temps que POISEUILLE (on parle parfois de profil D'HAGEN-POISEUILLE).
- **HELE-SHAW** Henry Selby (1854-1941) : Ingénieur et professeur de Mécanique des Fluides à Bristol et à Liverpool. Il a inventé la cellule de HELE-SHAW qui permet la visualisation entre deux plaques de l'écoulement potentiel autour d'obstacles.
- **HELMHOLTZ** Hermann von (1821-1894) : Physicien et physiologiste allemand. Il a introduit la notion d'énergie potentielle et énoncé le principe de conservation de l'énergie. A découvert le rôle des harmoniques dans le timbre des sons et mesuré la vitesse de l'influx nerveux.
- **HUGONOT** Henri (1851-1887) : Physicien français. L'équation de HUGONOT intervient dans les fluides compressibles.
- **JOUKOVSKY** Nicolaï (1847-1921). Professeur de Mécanique à l'université de Moscou. Il a publié de 1862 à 1890 des quantités de travaux sur divers problèmes de mécanique et d'astronomie et doit sa célébrité à sa découverte "sur les profils d'ailes" qui a joué un rôle immense dans l'aviation
- **KÁRMÁN**, Theodore von (1881-1963) : Ingénieur américain né en Hongrie. Il a résolu de nombreux problèmes d'hydrodynamique et d'aérodynamique. La première soufflerie supersonique des USA fut construite à son initiative.
- **KELVIN** Lord : Voir à Thomson.
- **KNUDSEN** Martin (1871-1949) : Physicien danois qui a établi les lois cinétiques des gaz raréfiés.
- **KOLMOGOROV** Andreï N. (1903-1987) : Mathématicien russe qui établit les bases axiomatiques du calcul des probabilités. On lui doit des modèles de la turbulence.
- **KUTTA** Wilhelm Martin (1867-1944) :  
<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Kutta.html>.
- **LAMB** Horace (1849-1934) : Mathématicien anglais, professeur à Adelaïde puis à l'Université de Manchester. Il a écrit en particulier un livre un peu daté maintenant mais qui couvre un large champ de la mécanique des fluides.  
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Lamb.html>
- **LAGRANGE** Joseph Louis (1736-1813) : Mathématicien français. A développé le calcul différentiel et intégral.
- **LANDAU** Lev Davidovitch (1908-1968) : Physicien théoricien soviétique, prix Nobel 1962. C'est intéressé à la turbulence et aux instabilités. Célèbre aussi avec LIFCHITZ pour leur cours de Physique en 5 volumes.
- **LAPLACE** Pierre Simon de (1749-1827) : Astronome, mathématicien et physicien, généralise le théorème des quantités de mouvement, la loi des aires et le principe de la moindre action, ouvre à la mécanique des espaces distincts de ceux des mathématiques.
- **LORENZ** Edward V. (1917-) : Météorologue, professeur au MIT connu pour son "attracteur de LORENZ" et pour ses études sur la théorie du chaos et les systèmes dynamiques (effet papillon) dans les années 60.
- **MACH** Ernst (1838-1916) : physicien autrichien qui mit en évidence le rôle de la vitesse du son en aérodynamique. C'était aussi un philosophe et un psychologue.
- **MAGNUS** Heinrich Gustav (1802-1870) : Physicien allemand connu pour l'étude de la portance créée sur un cylindre en rotation, "l'effet MAGNUS".
- **MARANGONI** Carlo (1840-1925) : Il a étudié la convection avec surface libre et donc l'effet de la variation de la tension interfaciale avec la température.
- **NAVIER** Claude-Louis-Marie-Henri (1785-1836) a contribué à la mécanique du solide et des fluides. H. NAVIER a établi une théorie générale de l'élasticité et a étudié l'écoulement des

liquides dans les tuyaux. Les équations fondamentales de la mécanique des fluides portent son nom. Bien qu'il ait formulé pour la première fois l'équation de NAVIER-STOKES, il n'avait pas développé le concept de cisaillement.

- **NEWTON** Isaac (1642-1727). Dans son "Principia", il a étudié la propagation des ondes acoustiques et la théorie cinétique des gaz. Ses lois du mouvement sont bien sur à la base de la mécanique des fluides.
- **OSEEN** Carl W. (1879-1944). Théoricien suédois.
- **PASCAL** Blaise (1623-1662) : Philosophe français.
- **PÉCLET** Jean Claude (1793-1857) : physicien français.
- **PITOT** Henri (1695-1771) : Ingénieur et physicien français. On lui doit de nombreux ouvrages d'art ainsi que le tube de PITOT pour mesurer la vitesse d'un écoulement.
- **PLATEAU** Joseph (1801-1883) : Physicien belge qui s'intéressa aux surfaces d'aire minimale, aux effets de ménisque (bordures de PLATEAU) et aux instabilités induites par la tension de surface (instabilité de RAYLEIGH-PLATEAU). C'est aussi un des précurseurs du dessin animé !
- **POINCARRÉ** Raymond (1854-1912) : Mathématicien français, père de la théorie des systèmes dynamiques.
- **POISEUILLE**, Jean Louis (1799-1869) était un médecin et physicien français qui a étudié l'écoulement du sang dans les capillaires.
- **PRANDTL** Ludwig (1875-1953) a développé ses idées physiques dans un bref mais remarquable article publié en 1905. Il a grandement influencé le développement de la mécanique des fluides de ce siècle en particulier en développant la théorie hydrodynamique de l'aile portante.
- **RANKINE** William (1820-1872) : physicien écossais. Il a créé l'énergétique en distinguant les énergies mécaniques, potentielles et cinétiques.
- **RAYLEIGH** Lord, John Strutt (1842-1919) : physicien anglais qui découvrit l'Argon, étudia la diffusion de la lumière et donna une valeur du nombre d'Avogadro. Prix Nobel de physique en 1904.
- **REYNOLDS** Osborne (1842-1912) : Ingénieur et physicien britannique (Université de Manchester), spécialiste de la mécanique des fluides et pionnier de l'étude des écoulements turbulents.
- **STROUHAL** Vencez (1850-1922) : XX
- **STOKES** George Gabriel (1819-1903) mathématicien et physicien irlandais qui a fait de nombreuses contributions sur les écoulements visqueux, en particulier la formulation complète de l'équation de NAVIER-STOKES et les écoulements à faible vitesse (écoulement de STOKES). Spécialiste en optique aussi (fluorescence et rayons X).
- **TORRICELLI** Evangelista (1608-1647) Physicien et mathématicien italien, inventeur du baromètre. TORRICELLI assure les fonctions de secrétaire et d'assistant auprès de GALILÉE. Il remplit de mercure un tube de verre long de 1,30 m et renverse celui-ci dans un récipient. Il observe alors qu'une partie du mercure demeure dans le tube et qu'un vide se forme à sa partie supérieure. Le premier, Torricelli réalise ainsi un vide permanent. Il conclut, après de longues observations, que les variations de hauteur du mercure, d'un jour à l'autre, sont dues à des changements de la pression atmosphérique. Il ne publiera cependant jamais ces résultats, trop occupé par ses études de mathématique pure, en particulier par des calculs sur la cycloïde.
- **TAYLOR** Geoffrey Ingram (1886-1975) : Professeur de Mécanique des Fluides à Cambridge. Il a, parmi de très nombreux autres travaux, étudié plusieurs instabilités hydrodynamiques.
- **THOMSON** William [Lord Kelvin] (1824-1907) plus connu pour son invention de l'échelle de température absolu. Il a été diplômé de l'Université de Glasgow à l'âge de 10 ans ! En mécanique des fluides, il a développé la théorie des ondes sonores, mouvement des tourbillons, ondes capillaires et la stabilité des écoulements visqueux. Il a introduit le mot de turbulence pour

caractériser les écoulements instationnaires et aléatoires. A étudié plusieurs exemples d'instabilités hydrodynamiques.

- **VENTURI** Giovanni Battista (1746-1822) : Physicien italien ayant étudié l'effet VENTURI, c'est-à-dire la diminution de pression dans des conduites de section variable.
- **WEBER** Moritz (1871-1951) : Un des quatre scientifiques allemands ayant travaillé en mécanique des fluides et sur les émissions de gouttes. On doit à celui-ci l'introduction du "nombre de WEBER".





# Lectures conseillées

## *En français :*

- [14] D. Salin et J. Martin, *La mécanique des Fluides*, Nathan Université. Un livre simple et bref d'introduction à la mécanique des fluides.
- [16] E. Guyon, J.-P. Hulin et L. Petit, *Ce que disent les fluides*, Belin, Pour La Science, 2005. Un livre où, sous le principe de double pages Photo + Textes, sont illustrés des aspects de la mécanique des fluides que l'on peut rencontrer dans la vie courante.
- [15] E. Guyon, J.-P. Hulin et L. Petit, *Hydrodynamique Physique*, EDP Sciences, 2001. Une référence en français avec une approche de physicien sur la mécanique des fluides.
- [4] S. Candel, *Mécanique des fluides*, Dunod
- [13] L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique des fluides*, Editions de Moscou
- [30] W. Wick, *Gouttes d'eau*, Editions Millepages. Livre de photographies.
- [21] M. Lesieur, *La turbulence*, Presses Universitaires de Grenoble.
- [10] P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré, *Gouttes, bulles, perles et ondes*, Belin, 2006.
- [22] P. Manneville, *Instabilités, Chaos et Turbulence*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2004.

## *En anglais :*

- [28] D.J. Tritton, *Physical fluid dynamics*, Oxford Science Publication, 1988.
- [20] P.K. Kundu, *Fluid Mechanics*, Academic Press, 1990.
- [12] Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, Parabolic Press, 1982.
- [1] D.J. Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford, 1990.
- [18] U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [23] Th. A. McMahon and J.T. Bonner, *On Size and Life*, Scientific American Library, 1983.
- [11] P.G. Drazin, *Introduction to Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press, 2002.
- [5] B. Castaing, *An introduction to hydrodynamics*, Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities, Cambridge University Press, pages 25 à 79 (1998).
- [9] P.A. Davidson, *Turbulence An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University, 2004.
- [8] O. Darrigol, *Worlds of Flow : A History of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University, 2005.

## *CD conseillés :*

- [17] G. Homsy *et al.*, *Muti-Media Fluid Mechanics*, CD-Rom Cambridge University Press, 2002.  
CD (images et films) sur les phénomènes interfaciaux dans le livre [10].

*Films conseillés :*

Toute une série de films du « National Committee for Fluid Mechanics Films »(NCFMF), anciens mais excellents en moyenne, sont maintenant disponibles en ligne sur le site du MIT <http://web.mit.edu/fluids/www/Shapiro/ncfmf.html>.

# Bibliographie

- [1] D.J. Acheson. *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford, 1990.
- [2] D. F. Young B. R. Munson and T. H. Okiishi. *Fundamentals of Fluid Mechanics*. Wiley, NY, 1990.
- [3] G. K. Batchelor. *Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [4] S. Candel. *Mécanique des fluides*. Dunod, 1995.
- [5] B. Castaing. *An introduction to hydrodynamics*, pages 25–79. Cambridge University Press, 1998.
- [6] Comolet. *Mécanique expérimentale des fluides, tomes 1, 2 et 3*. Editions Masson, 1979.
- [7] S. Dalton. *The Miracle of flight*. New York : Mc Graw-Hill, 1977.
- [8] Olivier Darrigol. *Worlds of Flow : A Hystory of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*. Oxford University, 2005.
- [9] P.A. Davidson. *Turbulence An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University, 2004.
- [10] P.-G. de Gennes F. Brochard-Wyart et D. Quéré. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin, 2002.
- [11] P. G. Drazin. *Introduction to Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 2002.
- [12] M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. Parabolic Press, 1982.
- [13] L. Landau et E. Lifchitz. *Elasticité*. Editions de Moscou, 1989.
- [14] D. Salin et J. Martin. *La mécanique des Fluides*. Nathan Université, 1997.
- [15] E. Guyon J.-P. Hulin et L. Petit. *Hydrodynamique Physique*. EDP Sciences, 2001.
- [16] E. Guyon J.-P. Hulin et L. Petit. *Ce que disent les fluides*. Belin, Pour la science, 2005.
- [17] G. Homsy *et al.* *Multi-Media Fluid Mechanics*. CD-Rom Cambridge University Press, 2002.
- [18] U. Frisch. *Turbulence*. Cambridge University Press, 1995.
- [19] R. Garrett. *Symmetry of sailing : The physics of sailing for yachtmens*. Sheridan House, 1987.
- [20] P. K. Kundu. *Fluid Mechanics*. Academic Press, 1990.
- [21] M. Lesieur. *La turbulence*. Presses Universitaires de Grenoble, 1994.
- [22] Paul Manneville. *Instabilités, Chaos et Turbulence*. Les éditions de l'Ecole polytechnique, 2004.
- [23] Th. A. McMahon and J. T. Bonner. *On Size and Life*. Scientific American Library, 1983.
- [24] E.M. Purcell. Life at low reynolds numbers. *Am. J. Phys.*, 45 :3–11, 1977.
- [25] I. Stewart. *20 000 lieues... penchés sous les mers*, pages 120–125. Bibliothèque pour la Science, 1999.

- [26] H. Tennekes. *The simple science of flight. From insects to jumbo jets.* The MIT Press, 1997.
- [27] D'Arcy Thompson. *Forme de croissance.* Edition du Seuil, 1994.
- [28] D. J. Tritton. *Physical fluid dynamics.* (second edition), Oxford University Press, 1988.
- [29] Luc Valentin. *L'Univers Mécanique.* Editions Hermann, 1997.
- [30] W. Wick. *Gouttes d'eau.* Editions Millepages, 1999.