

# Méthodes Numériques

## Cours 6 :

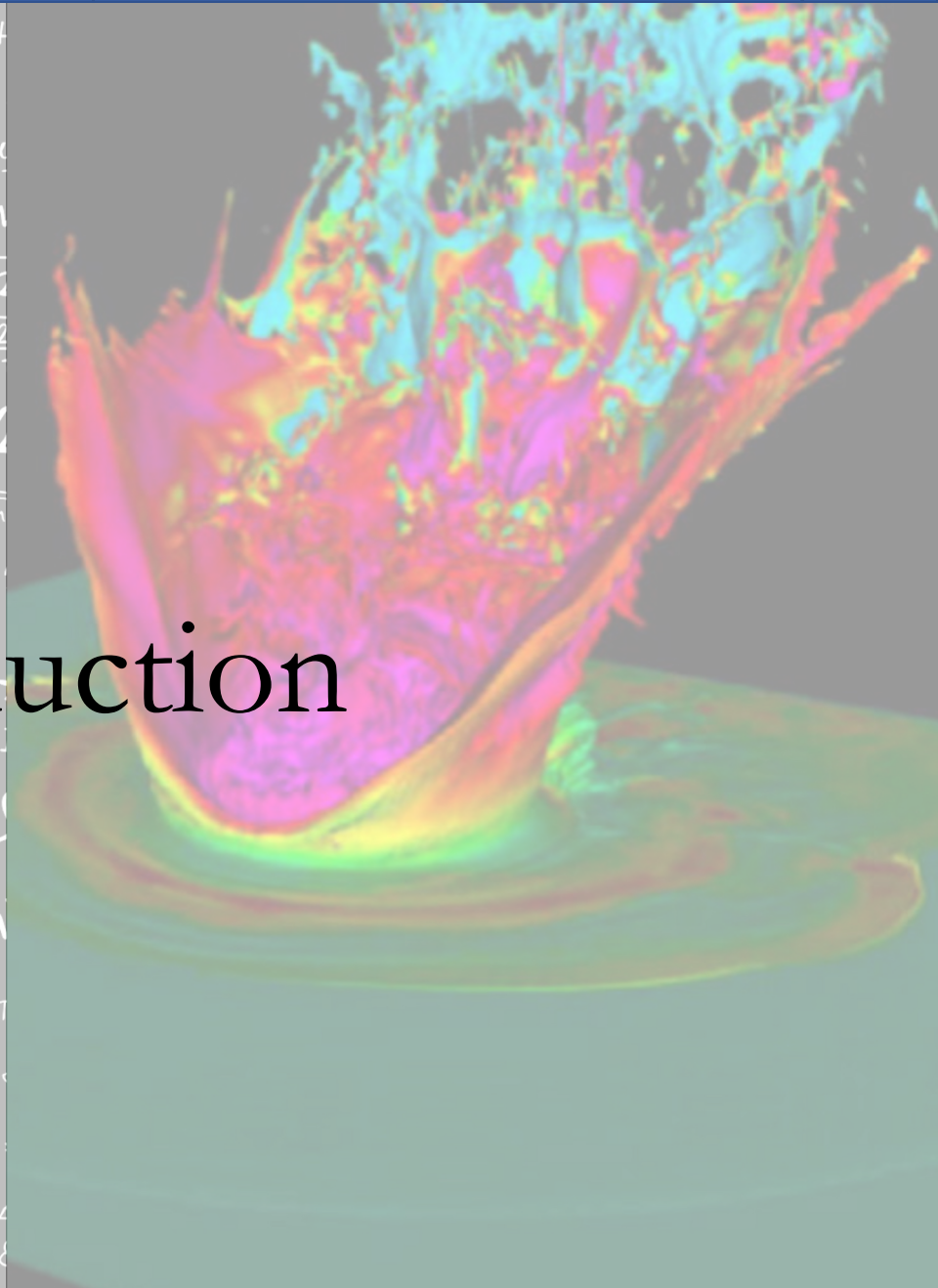
### Caractérisation d'une méthode numérique

Dr. Barbara PERRI

[barbara.perri@universite-paris-saclay.fr](mailto:barbara.perri@universite-paris-saclay.fr)

$$\begin{aligned}
 & v_2 \tan \theta_B = \frac{w_2}{w_1} = w_{21} & \rho V = nRT & \vec{\psi} = \iint \vec{D} d\vec{S} = AD \\
 & M_e = \sigma T^4 & \phi_e = \frac{L}{4\pi r^2} & \frac{\Delta\psi}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{x_2 - x_1}{\lambda} & v = c/\lambda \\
 & \psi = E\psi & E = \hbar\omega & U = \frac{W_{AB}}{|E_{PA} - E_{PB}|} = \frac{|\phi_A - \phi_B|}{T} = \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} & \vec{v}_k = \sqrt{\frac{M_z}{R_z}} & \vec{F}_m = \vec{B} I l = \dots \\
 & \frac{M_m}{V_A} = \frac{M_r \cdot 10^{-3}}{N_A} & l_t = l_0(1 + d\Delta t) & I = \frac{U_e}{R + R_i} & \vec{g} = \frac{m_1 n}{m_2 n} & \vec{h}_m = \frac{c}{T} k = \pm \sqrt{\dots} \\
 & \vec{R} = \rho \frac{d}{S} & E = mc^2 & \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{w_2}{w_1} & v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}} \\
 & \vec{x} = \sqrt{2/L} \sin \frac{n\pi x}{L} & E = \frac{1}{2} \hbar \sqrt{k/m} & \beta = \frac{\Delta I c}{\Delta t} & \phi_e = \frac{\Delta E}{\Delta t} \frac{w_1}{x} + \frac{w_2}{x'} = \dots \\
 & \iint \vec{J} d\vec{S} & \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) & \Delta I = \frac{h^2}{8mL^2} & \phi = \frac{2\pi \sin^2 \theta}{\lambda} & \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\
 & \frac{N_A}{m} = \sqrt{\frac{3R_m T}{M_r \cdot 10^{-3}}} & E = \hbar k^2 & 1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ AU}}{r} & \vec{S} = \vec{I} \vec{F}_2 = U_e & \vec{F}_V = \dots \\
 & h = Shp g & f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{CL}} & \sigma = \frac{Q}{M} & M = F d \cos \alpha & \vec{S} = \vec{I} \vec{F}_2 = U_e \\
 & \cos \theta_2 & R = R_0 \sqrt[3]{A} & \int \vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} & \rho = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} & \omega = U_m \sin \omega(t - T) = U_m \sin 2T \\
 & \vec{H} d\vec{l} = \iint (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} & \vec{Q} = m c \Delta t & F_g = \dots & \Delta\psi = \frac{2\pi \Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} \\
 & = \mu_0 \sum \vec{I}; & \rho = \frac{\vec{F}}{\Delta S} = \frac{m \Delta \vec{V}}{\Delta S \Delta t} & P = UI & h = \frac{1}{2} g t^2 & v - v_1(1 + \beta) \\
 & f' = \frac{v_a \cdot v_b}{(v - 1)(v_b - v_a)} & \nabla \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \dots
 \end{aligned}$$

# Introduction



# Plan de l'UE

## Idée générale :

Au premier semestre, on va introduire les notions de base, et s'intéresser en détails à une méthode numérique précise

Tous les jeudi matin (8h45-12h45) au bâtiment 625

21 Novembre : Cours 1 + Cours 2

4 Décembre : Cours 3 + TP

5 Décembre : Cours 4 + TP

12 Décembre : Cours 5 + TP

19 Décembre : **Cours 6** + TP

9 Janvier : Cours 7 + TP

16 Janvier : Cours 8 + TP

23 Janvier : TP

30 Janvier : **Examen**

## Modalités d'évaluation :

TPs + examen oral (question de cours + exercice)

# Schéma numérique

Une fois qu'on a choisi la méthode numérique qu'on souhaite utiliser, il reste encore de nombreux choix possibles = schéma numérique

ex : différences finies  $\rightarrow \frac{df(x)}{dx} + f(x) = 0$

$\rightarrow$  comment approximer la dérivée ? quelle formulation ?



$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\delta x}$$

Schéma d'Euler Forward



$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\delta x}$$

Schéma d'Euler Backward



$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2\delta x}$$

Schéma d'Euler centré

$\rightarrow$  Pour les volumes finis on choisit la manière de reconstruire les flux, pour les éléments finis les fonctions polynomiales pour effectuer la décomposition, etc.

$\rightarrow$  Formulation générale ? Comment choisir ? Quelles sont les différences ?

# Différences entre les schémas (I)

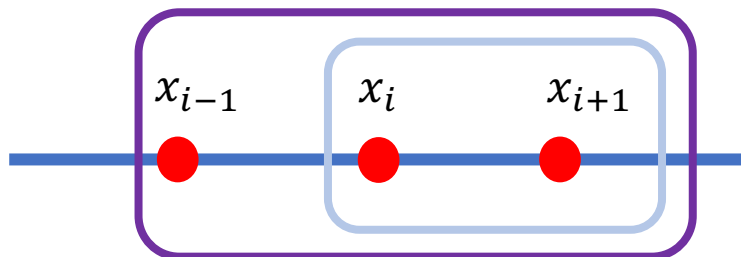
En fonction de la méthode choisie, on a besoin d'un certain nombre de points pour reconstruire la solution = stencil

Exemple : 
$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\delta x}$$

Schéma d'Euler Forward

= 2 points

1D

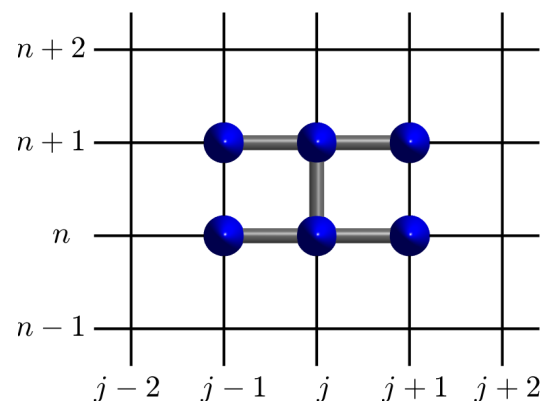


Vs. 
$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2\delta x}$$

Schéma d'Euler centré

= 3 points

2D



→ Le stencil permet de visualiser le nombre de points nécessaires pour la résolution des équations

# Différences entre les schémas (II)

En fonction du schéma choisi, on a aussi la possibilité d'exprimer le problème sous forme explicite ou implicite :

## Explicite

= on exprime l'état futur du système en fonction des états passés

$$f(t + \delta t) = F[f(t), f(t - \delta t), \dots]$$

$$\text{ex : } \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{\delta t} = -f^2(t_n)$$

→ La résolution est itérative

## Avantages :

Plus intuitif, modélisation plus fine

## Inconvénients :

Gourmande en ressources, limitée par la

$$\text{condition CFL : } C = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq C_{max} \leq 1$$

## Implicite

= on exprime l'état futur du système en fonction de l'état futur également

$$G[\dots, f(t - \delta t), f(t), f(t + \delta t)] = 0$$

$$\text{ex : } \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{\delta t} = -f^2(t_{n+1})$$

→ La résolution est matricielle

## Avantages :

Plus simple à formuler, moins instable

## Inconvénients :

Pas toujours facile d'inverser la matrice, plus difficile à implémenter



# Différences entre les schémas (III)

On rappelle la formule de Taylor :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + R_n(x)$$

On peut réaliser un développement limité autour de  $x_i$  en  $x_{i+1}$  (maillage uniforme) :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \delta x \frac{df}{dx}(x_i) + \frac{\delta x^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) + R_2(x_{i+1})$$



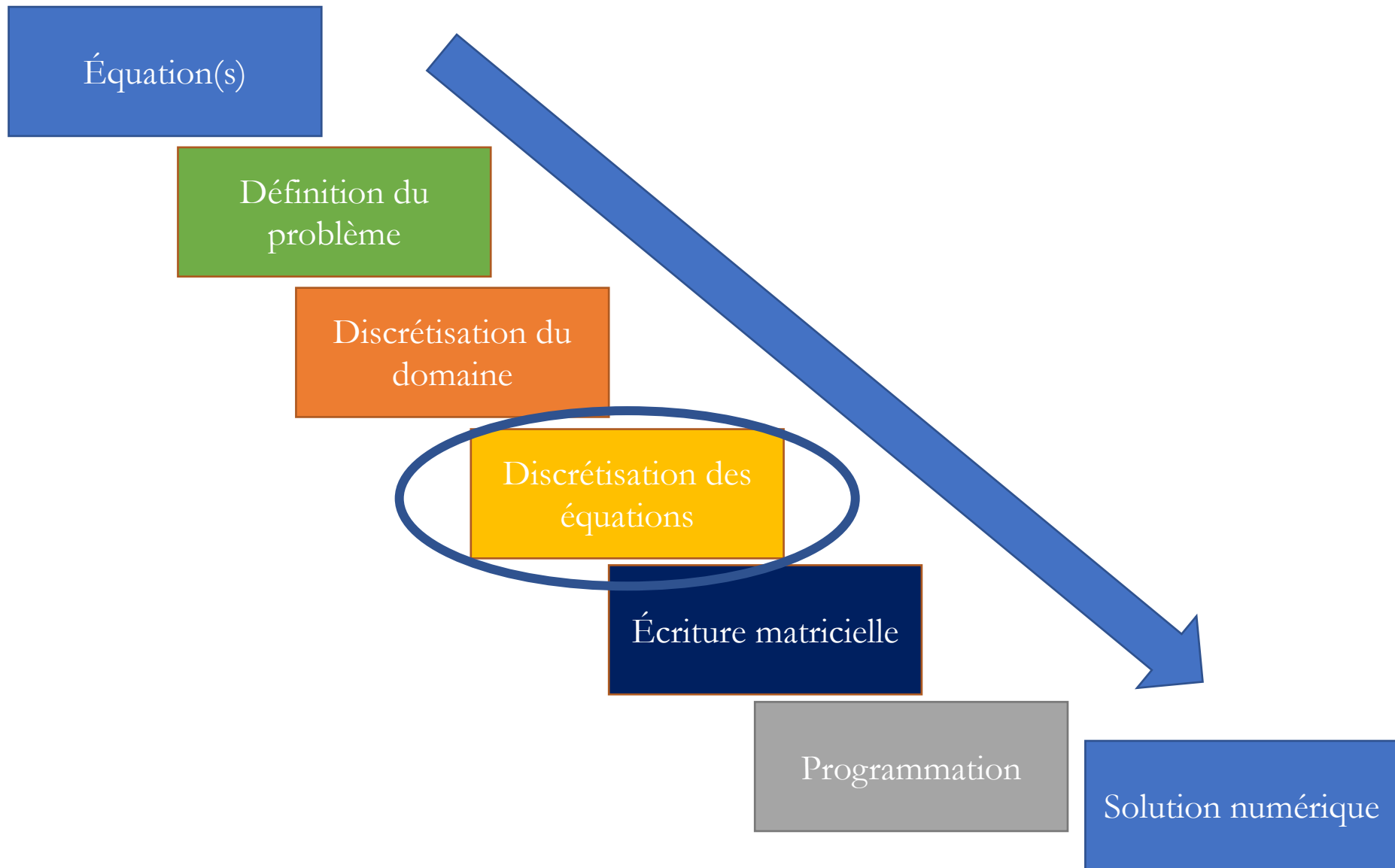
$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\delta x} = \frac{df}{dx}(x_i) + \boxed{\frac{\delta x}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) + R_2(x_{i+1})} \text{ résidu}$$

On combine avec le développement limité autour de  $x_i$  en  $x_{i-1}$  (maillage uniforme) :

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2\delta x \frac{df}{dx}(x_i) + \boxed{\frac{2\delta x^3}{6} \frac{d^3 f}{dx^3}(x_i) + R_3(x_{i+1}) - R_3(x_{i-1})} \text{ résidu}$$

→ Certaines méthodes semblent donc plus précises que l'autre, comment quantifier ?

# Cycle des méthodes numériques





# Hypothèses

→ On va rester en 1D et linéaire MAIS on va lever l'hypothèse instationnaire :

$$f = f(x, t)$$

→ On va supposer un maillage uniforme en espace et en temps :

$$x_i, i \in [0, M]$$

$$\delta x = \text{constante}$$

$$t_n, n \in [0, N]$$

$$\delta t = \text{constante}$$

→ On va utiliser la méthode des différences finies, avec les notations habituelles :



$$f(x_i, t_n) = f_i^n$$

→ On va s'intéresser à des équations en particulier (représentatives) :

Équation d'advection :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + a \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 0, a > 0$$

Équation de diffusion :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t), \alpha > 0$$

Équation de diffusion-advection :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + a \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t), a > 0, \alpha > 0$$

$$v_2 \tan \theta_B = \frac{w_2}{w_1} = w_{21}$$

$$M_e = \sigma T^4$$

$$j = E \psi$$

$$E = \hbar \omega$$

$$U = \frac{W_{AB}}{r^2} = \frac{|E_{PA} - E_{PB}|}{r^2} = \frac{|\varphi_A - \varphi_B|}{r^2}$$

$$\frac{M_m}{M_A} = \frac{M_r \cdot 10^{-3}}{N_A}$$

$$l_t = l_0(1 + d \Delta t)$$

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

$$x) = \sqrt{2/L} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$E = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

$$h = Shp g$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{CL}}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \sum \vec{I}$$

$$f' = \frac{r_a \cdot r_b}{(r_a - 1)(r_b - r_a)}$$

$$\rho V = nRT$$

$$\vec{\psi} = \iint \vec{D} d\vec{S} = AD$$

$$v = c/\lambda$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$X_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L = 2\pi f L$$

$$F_g = \frac{m_1 m_2}{(n_2 + n_1)^2}$$

$$R_m = \frac{c}{T} k = \pm \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}$$

$$E = \frac{E_c}{a} \int_{-a/L}^{+a/L} \sin(\omega t + \phi) dy$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{w_2}{w_1}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}$$

$$\Delta I_B = \frac{h^2}{8mL^2}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$R = \frac{1 AU}{r}$$

$$S = \frac{U}{I}$$

$$F_v = \dots$$

$$M = F d \cos \alpha$$

$$S I_m^2 = U_m^2 \left[ \frac{1}{R^2} + \left( \frac{1}{X_c} - \frac{1}{X_L} \right)^2 \right] \lambda$$

$$\rho = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$u = U_m \sin \omega(t - \tau) = U_m \sin 2\pi t$$

$$\Phi = m c \Delta t$$

$$F_g = \dots$$

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

$$\Delta \psi = \frac{2\pi \Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

$$P = UI$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

$$v = v_1(1 + \beta)$$

$$\nabla \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \dots$$

# Consistance et ordre



# Forme générale des schémas numériques (I)

Comme on est 1D et linéaire,  
on peut mettre les schémas sous la forme générale suivante :

2 niveaux temporels  
( $n + 1$  et  $n$ )

$$\underbrace{\sum_{j \in J} a_j f_j^{n+1}} = \underbrace{\sum_{k \in K} b_k f_k^n}$$

Combinaisons linéaires d'un sous-ensemble de points en espace

→ On met dans le membre de gauche tous les termes en  $n + 1$  (futur),  
et à droite tous les termes précédents en  $n, n - 1, \dots$  (passé)

→ Un schéma se caractérise donc par :

- **son nombre de niveaux temporels** (combien de termes en  $n$ )
- **son nombre de points d'espace impliqués** (les espaces  $J$  et  $K$ )

# Forme générale des schémas numériques (II)

## Questions :

- Comment écrit-on un schéma à 3 niveaux temporels en forme générale ?
- Sous cette forme, quelle est la différence entre un schéma explicite et implicite ?

→ Schéma à 3 niveaux temporels :

3 niveaux temporels  
( $n + 1$ ,  $n$  et  $n - 1$ )

$$\sum_{j \in J} a_j f_j^{n+1} = \sum_{k \in K} b_k f_k^n + \sum_{l \in L} c_l f_l^{n-1}$$

→ Schéma explicite :

$$J = \{j\} \text{ ou } a_j = 1$$

- On peut retrouver la solution à partir des temps précédents
- Sinon, formulation implicite, il faut résoudre un système linéaire

# Exemples

## Exercice :

Voici trois schémas numériques différents (équation d'advection et de diffusion).  
 Trouvez leurs propriétés principales à partir de leur formulation :

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{a\delta t}{2\delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)$$

Schéma FTCS  
 (Forward Time  
 Centered Space)

$$f_i^{n+1} + \frac{a\delta t}{4\delta x} (f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}) = f_i^n - \frac{a\delta t}{4\delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)$$

Schéma de  
 Crank-Nicolson

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{2\alpha\delta t}{\delta x^2}\right) f_i^{n+1} - \frac{\alpha\delta t}{\delta x^2} f_{i+1}^{n+1} - \frac{\alpha\delta t}{\delta x^2} f_{i-1}^{n+1} = 2f_i^n - \frac{1}{2} f_i^{n-1}$$

Schéma I3N

# Exemples (I)

Prenons un exemple concret pour mieux comprendre :

Équation d'advection : 
$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + a \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 0$$



Méthodes de discrétisation : Euler centré en espace, Euler forward en temps :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, t_n) \approx \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\delta x} \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\delta t}$$



$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\delta t} + a \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\delta x} = 0$$



$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{a\delta t}{2\delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)$$

Schéma FTCS  
(Forward Time  
Centered Space)

→ On voit alors immédiatement que c'est un schéma :

- Avec 2 niveaux temporels,
- Avec 3 points d'espace,
  - Explicite.

# Exemples (II)

Prenons un autre exemple concret pour voir la différence :

Équation d'advection : 
$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + a \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 0$$



Méthodes de discrétisation : **Crank-Nicolson** :

FTCS en  $n$  :

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\delta t} + a \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\delta x} = 0$$

BTCS en  $n + 1$  :

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\delta t} + a \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\delta x} = 0$$



$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\delta t} + \frac{a}{2} \left( \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\delta x} + \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\delta x} \right) = 0$$



$$f_i^{n+1} + \frac{a\delta t}{4\delta x} (f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}) = f_i^n - \frac{a\delta t}{4\delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)$$

Schéma de  
Crank-Nicolson

→ On voit alors immédiatement que c'est un schéma :

- Avec 2 niveaux temporels,
- Avec 3 points d'espace,
- **Implicite.**



# Exemples (III)

Prenons un dernier exemple concret pour mieux comprendre :

Équation de **diffusion** :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)$$

Méthodes de discrétisation :

Euler centré en espace, **polynôme de Lagrange en temps** :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, t_n) \approx \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{\delta x^2} \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{-3f_i^{n+1} + 4f_i^n - f_i^{n-1}}{2\delta t}$$

$$\frac{3f_i^{n+1} - 4f_i^n + f_i^{n-1}}{2\delta t} + \alpha \frac{f_{i+1}^{n+1} - 2f_{i-1}^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}}{\delta x^2} = 0$$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{2\alpha\delta t}{\delta x^2}\right) f_i^{n+1} - \frac{\alpha\delta t}{\delta x^2} f_{i+1}^{n+1} - \frac{\alpha\delta t}{\delta x^2} f_{i-1}^{n+1} = 2f_i^n - \frac{1}{2} f_i^{n-1}$$

Schéma I3N

→ On voit alors immédiatement que c'est un schéma :

- Avec **3 niveaux temporels**,
- Avec 3 points d'espace,
- Implicite.

# Définition : Consistance

La consistance est la première propriété d'un schéma numérique à vérifier, elle se définit comme suit :

**La consistance est la capacité du schéma à représenter l'équation continue dans la limite où le pas d'espace et le pas de temps considérés tendent vers zéro**

$\delta x \rightarrow 0$        $\delta t \rightarrow 0$             *schéma*  $\rightarrow$  *équation*

Exemple : (schéma FTCS)

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\delta t} + a \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\delta x} = 0 \quad \img alt="blue arrow" data-bbox="461 718 571 775"/> \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + a \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 0$$

→ Autrement dit, à résolution infinie, mon problème discret est bien confondu avec mon problème continu

→ Comment vérifier cette propriété ?

# Application

Pour tester la consistance d'un schéma :

→ Il faut d'abord s'assurer que la fonction à laquelle on l'applique est continûment différentiable :

$$f(x, t) \in C_\infty$$

→ Il faut ensuite exprimer le schéma sous la forme :

$$(\text{schéma})_i^n = (\text{équation exacte})_i^n + (\text{résidu})_i^n$$

Un schéma n'est consistant que si le résidu décroît à 0 pour  $\delta x, \delta t \rightarrow 0$

→ Le résidu est donc souvent de la forme :

$$(\text{résidu})_i^n = r_i^n = \delta x^p(\text{terme}) + \delta t^q(\text{terme})$$

→ Pour obtenir cette forme, on peut utiliser les développements limités (DL) !

# Définition : Ordre

Reprenons la définition du résidu :

$$(\text{résidu})_i^n = r_i^n = \delta x^p(\text{terme}) + \delta t^q(\text{terme})$$

→ On peut définir une nouvelle propriété importante du schéma : son ordre

**$p$  correspond à l'ordre spatial du schéma,**  
 **$q$  à l'ordre temporel du schéma,**  
**et  $\min(p, q)$  à l'ordre global du schéma**

→ L'ordre permet donc de quantifier la vitesse à laquelle le résidu converge vers 0

→ Ceci permet d'évaluer la précision du schéma pour une résolution donnée

→ Attention ! L'ordre global est le minimum des deux ordres !

→ Encore une fois, une bonne manière d'estimer l'ordre est d'utiliser les développements limités

# Exemple

Reprenons le schéma FTCS présenté précédemment :

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\delta t} + a \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\delta x} = 0$$

DL de  $f_i^{n+1}$  autour de  $n$  :

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \delta t \frac{\partial f_i^n}{\partial t} + \frac{\delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f_i^n}{\partial t^2} + R_2(t_n)$$

DL de  $f_{i+1}^n$  autour de  $i$  :

$$f_{i+1}^n = f_i^n + \delta x \frac{\partial f_i^n}{\partial x} + \frac{\delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f_i^n}{\partial x^2} + \frac{\delta x^3}{6} \frac{\partial^3 f_i^n}{\partial x^3} + R_3(x_i)$$

DL de  $f_{i-1}^n$  autour de  $i$  :

$$f_{i-1}^n = f_i^n - \delta x \frac{\partial f_i^n}{\partial x} + \frac{\delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f_i^n}{\partial x^2} - \frac{\delta x^3}{6} \frac{\partial^3 f_i^n}{\partial x^3} + R_3(x_i)$$



$$\underbrace{\frac{\partial f_i^n}{\partial t} + a \frac{\partial f_i^n}{\partial x} + \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 f_i^n}{\partial t^2}}_{\text{(équation exacte)}_i^n} + \underbrace{+ R_1(t_n) + a \frac{\delta x^2}{6} \frac{\partial^3 f_i^n}{\partial x^3} + R_2(x_i)}_{\text{(résidu)}_i^n}$$

(équation exacte) $_i^n$

(résidu) $_i^n$

→ Le schéma est bien consistant

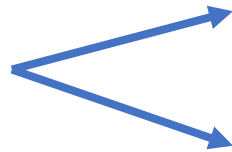
→ Il est d'ordre 1 en temps, d'ordre 2 en espace, et donc d'ordre 1 en global

# Rappel : Notations de Landau

On rappelle le concept des notations de Landau :

$f(n) = O(g(n))$	Grand O	La fonction $ f $ est bornée par la fonction $ g $ asymptotiquement à un facteur près	$n \rightarrow 0$ : $\exists k > 0,  f(n)  \leq k g(n) $
$f(n) = o(g(n))$	Petit o	La fonction $f$ est négligeable devant la fonction $g$ asymptotiquement	$n \rightarrow 0$ : $\forall \epsilon > 0,  f(n)  \leq \epsilon g(n) $

En pratique :

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \delta t \frac{\partial f_i^n}{\partial t} + \frac{\delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f_i^n}{\partial t^2} + R_2(t_n)$$


$$R_2(t_n) = O(\delta t^3)$$

$$R_2(t_n) = o(\delta t^2)$$

→ Dans ce cours, on utilisera majoritairement la notation en  $O$

# Règles de calcul sur les résidus

Dans ce cours, on utilisera majoritairement la notation en  $O$

→ Ce symbole nous informe que les termes oubliés décroissent au moins aussi rapidement que la quantité spécifiée :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{O(\epsilon^p)}{\epsilon^p} \leq A$$

Quelques règles de calcul sur les notations de Landau :

$$\forall p, q \in \mathbb{Z}: p < q \Rightarrow O(\epsilon^p) + O(\epsilon^q) = O(\epsilon^p)$$

*(pour les additions, c'est le résidu avec le plus petit ordre qui compte)*

$$\forall p, q \in \mathbb{Z}: O(\epsilon^p)O(\epsilon^q) = O(\epsilon^{p+q})$$

*(pour les multiplications, on additionne les ordres)*

$$\forall p, q \in \mathbb{Z}: \epsilon^p O(\epsilon^q) = O(\epsilon^{p+q})$$

*(faire attention aux opérations avec les pas, cela affecte l'ordre !)*



# Notes sur l'ordre et la précision

→ **Attention !**

→ Il faut pousser les DLs suffisamment loin pour pouvoir conclure sur l'ordre :

FTCS avec DLs d'ordre 2 uniquement :  $\frac{\partial f_i^n}{\partial t} + a \frac{\partial f_i^n}{\partial x} + \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 f_i^n}{\partial t^2} + O(\delta t^2) + O(\delta x^2)$

→ On ne peut pas conclure en espace ! (l'ordre peut être  $p \geq 2$ )

**Le résidu ne peut pas être composé que d'un grand O (ordre supérieur DL)**

→ **Attention !**

→ L'ordre n'est pas égal à la précision, car cela dépend de la résolution ! ( $\delta x, \delta t \rightarrow 0$ )

Exemple :  $x \leq 100x^2 \Leftrightarrow x \geq 0.01$

**Parfois un schéma d'ordre 1 peut être plus précis qu'un schéma d'ordre supérieur si on se trouve à basse résolution**

# Convergence et stabilité

# Définition : Convergence

La convergence est l'autre propriété essentielle d'un schéma numérique à vérifier, elle se définit comme suit :

**La convergence est la capacité du schéma à générer une solution qui converge vers la solution exacte du problème physique**

$$f_i^n \rightarrow f(x_i, t_n)$$

Cette propriété doit être valable en tout point du domaine, pour toute solution initiale et pour tout temps  $n$ ,

MAIS pour une résolution donnée ( $\delta x / \delta t$ ) et pour une norme donnée ( $\|\cdot\|$ ) :

$$F^n = \begin{bmatrix} f_0^n \\ \dots \\ f_i^n \\ \dots \\ f_M^n \end{bmatrix} \quad F_{ex}^n = \begin{bmatrix} f(x_0, t_{n+1}) \\ \dots \\ f(x_i, t_{n+1}) \\ \dots \\ f(x_M, t_{n+1}) \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \forall n, \|F_{ex}^n - F^n\| \xrightarrow{\delta x, \delta t \rightarrow 0} 0$$

→ Autrement dit, la convergence est ce qui garantit que la solution finale est bien physique  
 → Comment vérifier cette propriété ?

# Différence entre consistance et convergence (I)

La consistance n'implique pas forcément la convergence !! (nécessaire, pas suffisante)

→ Autrement dit, ce n'est pas parce que le schéma converge vers l'équation que la solution du schéma converge vers la solution de l'équation

Démonstration pour un schéma à deux niveaux temporels :

$$\sum_{j \in J} a_j f_j^{n+1} = \sum_{k \in K} b_k f_k^n \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} f_0^{n+1} \\ \dots \\ f_i^{n+1} \\ \dots \\ f_M^{n+1} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} f_0^n \\ \dots \\ f_i^n \\ \dots \\ f_M^n \end{bmatrix} + FF^{n+1}, \text{ où } \varepsilon \text{ est une matrice d'évolution}$$



$$F^{n+1} = \varepsilon F^n + FF^{n+1}, n = 0, \dots, N - 1$$

Pour la solution exacte :



$$F_{ex}^{n+1} = \varepsilon F_{ex}^n + FF^{n+1} + \delta t R^{n+1} \quad \longrightarrow \quad \text{Résidus : } R^{n+1} = \begin{bmatrix} r_0^{n+1} \\ \dots \\ r_i^{n+1} \\ \dots \\ r_M^{n+1} \end{bmatrix}$$

# Différence entre consistance et convergence (II)

On définit l'erreur comme la différence entre la solution exacte et la solution numérique :

$$E^n = F_{ex}^n - F^n$$

En soustrayant les deux équations précédentes, on obtient :

$$E^{n+1} = \varepsilon E^n + \delta t R^{n+1}$$

→ On a donc une équation d'évolution de l'erreur !

→ On peut alors montrer que même si elle est nulle au départ, elle ne va pas forcément le rester...

$$E^0 = F_{ex}^0 - F^0 = 0$$



$$E^1 = \delta t R^1$$



$$E^2 = \varepsilon E^1 + \delta t R^2 = \delta t(\varepsilon R^1 + R^2)$$



$$E^3 = \varepsilon E^2 + \delta t R^3 = \delta t(\varepsilon^2 R^1 + \varepsilon R^2 + R^3)$$



$$E^n = \delta t \sum_{m=1}^n \varepsilon^{n-m} R^m$$

# Différence entre consistance et convergence (III)

En choisissant une norme  $\|\cdot\|$ , on peut majorer l'erreur :

$$\|E^n\| = \delta t \left\| \sum_{m=1}^n \varepsilon^{n-m} R^m \right\| \leq \delta t \sum_{m=1}^n \|\varepsilon^{n-m} R^m\| \leq n \delta t \max_{0 \leq m \leq n} \|\varepsilon^{n-m} R^m\|$$

Consistance :

$$R^n \xrightarrow{\delta x, \delta t \rightarrow 0} 0, \forall n$$

$$\|\varepsilon^{n-m} R^m\| \xrightarrow{\delta x, \delta t \rightarrow 0} 0, \forall n, m$$

Cette dernière quantité peut même croître de manière incontrôlée quand  $n \rightarrow \infty$

→ L'erreur ne décroît donc pas forcément vers 0 !

Consistance :

$$\|E^n\| \xrightarrow{\delta x, \delta t \rightarrow 0} 0, \forall n$$

→ Il faut donc une condition supplémentaire !

# Définition : Stabilité

Cette propriété supplémentaire, c'est ce qu'on appelle la stabilité, qu'on définit comme suit :

**La stabilité est la capacité du schéma à garantir que l'erreur entre la solution physique et la solution numérique restera bornée**

Autrement dit :

Soit  $\|\cdot\|$  une norme, et soit  $\varepsilon$  la matrice d'évolution du schéma

Le schéma est dit stable pour la norme si :

$$\forall X, \exists C \in R, \|\varepsilon^n X\| \leq C \|X\|, 0 \leq n \leq T/\delta t$$

NB :

- La constante  $C$  doit être indépendante de la résolution  $(\delta x, \delta t)$ , du degré d'évolution temporelle  $(n)$  et du vecteur choisi  $(X)$
- En revanche, cette condition est associée à une durée maximale de la simulation  $T$



# Théorème de Lax

Le théorème de Lax dit alors que si un schéma est consistant ET stable, alors on peut en déduire qu'il est convergent

Démonstration pour un schéma à deux niveaux temporels :

Erreur :

$$\|E^n\| \leq n\delta t \max_{0 \leq m \leq n} \|\varepsilon^{n-m} R^m\|$$

Stabilité :

$$\forall X, \exists C \in R, \|\varepsilon^n X\| \leq C \|X\|, 0 \leq n \leq T/\delta t$$

$$\|E^n\| \leq n\delta t \max_{0 \leq m \leq n} \|\varepsilon^{n-m} R^m\| \leq CT \max_{0 \leq m \leq n} \|R^m\|$$

Consistance :

$$R^n \xrightarrow{\delta x, \delta t \rightarrow 0} 0, \forall n$$

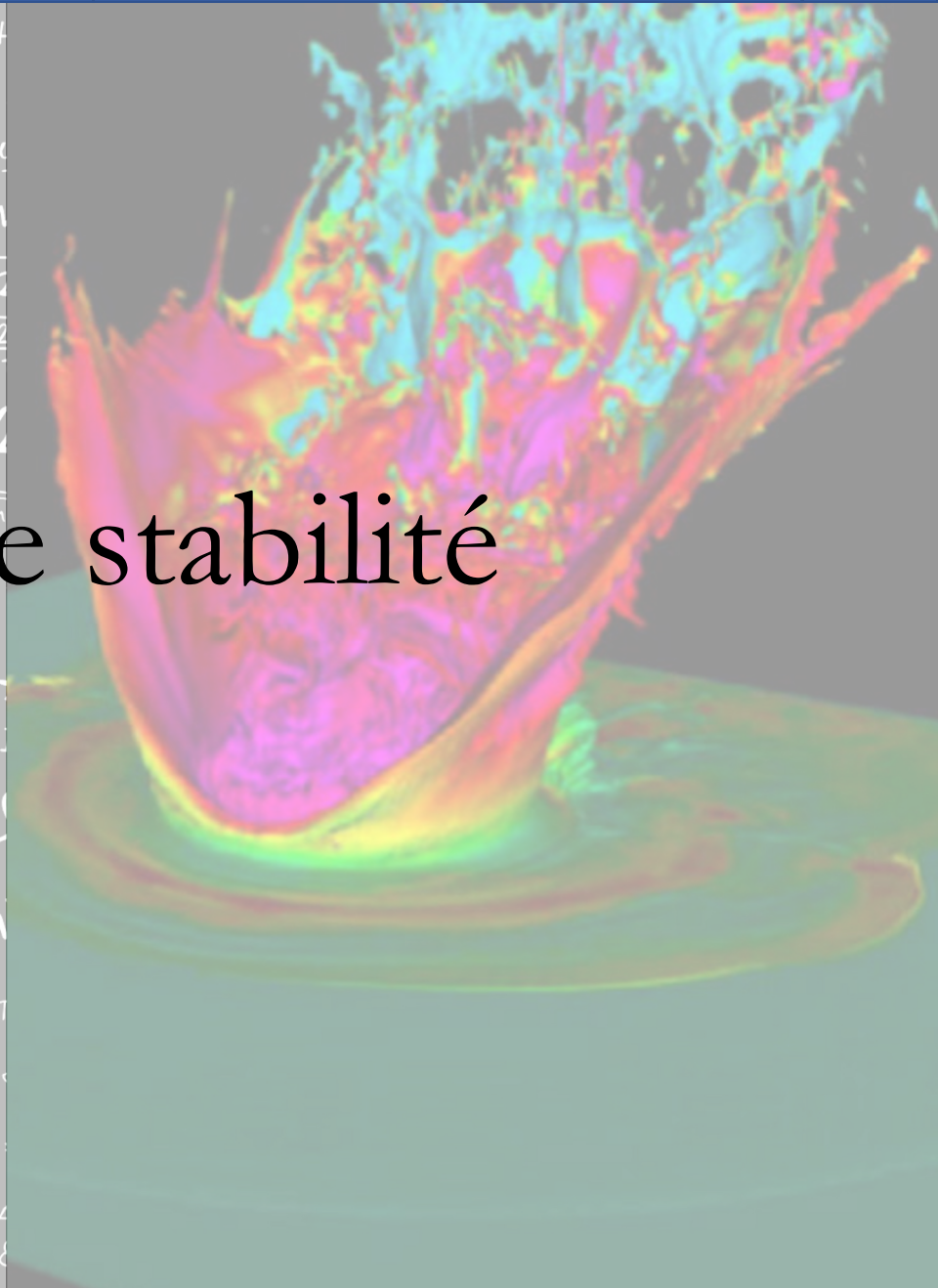
$$\|E^n\| \xrightarrow{\delta x, \delta t \rightarrow 0} 0, \forall n$$

→ Pour démontrer la convergence,  
il faut donc démontrer la consistance (DL) ET la stabilité !

→ Comment peut-on démontrer la stabilité ?

$$\begin{aligned}
 & 2 \operatorname{tg} \vartheta_B = \frac{w_2}{w_1} = w_{21} & \rho V = n R T & \vec{\psi} = \iint \vec{D} d\vec{S} = A D \\
 & M_e = \sigma T^4 & \phi_e = \frac{L}{4\pi r^2} & \frac{\Delta \varphi}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{x_2 - x_1}{\lambda} & v = c/\lambda \\
 & \psi = E \psi & \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & X_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L = 2\pi f L & F_g = \frac{m_1 m_2}{(n_2 + n_1)^2} \\
 & E = h\nu & U = \frac{W_{AB}}{|E_{PA} - E_{PB}|} = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{T} = \frac{4 n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} & \vec{v}_k = \sqrt{\frac{M_z}{R_z}} & \vec{F}_m = \vec{B} I l = \dots \\
 & \varphi_E = \frac{E_c}{\rho_0} = k \frac{\varphi}{r} & m = N \cdot m_0 = \frac{M_m}{N_A} & E = \frac{E_c}{a} \int_{-a/L}^{+a/L} \sin(\omega t + \phi) dy & R_m = \frac{c}{T} k = \pm \sqrt{\dots} \\
 & \frac{M_m}{N_A} = \frac{M_r \cdot 10^{-3}}{N_A} & l_t = l_0(1 + d \Delta t) & I = \frac{U_e}{R + R_i} & \omega = \dots \\
 & R = \rho \frac{l}{S} & E = h\nu & \frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1} & v = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
 & \psi = \sqrt{2/L} \sin \frac{n\pi x}{L} & E = \frac{1}{2} h \nu / m & \Delta I_B = \frac{h^2}{8mL^2} h^2 & \oint \vec{D} d\vec{S} \\
 & \oint \vec{J} d\vec{S} & \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) & \phi = \frac{2\pi \sin^2 \vartheta}{\lambda} & \vec{D} d\vec{S} \\
 & \frac{N_A}{M_r} = \sqrt{\frac{3R_m T}{M_r \cdot 10^{-3}}} & E = \frac{h^2 k^2}{2m} & 1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ AU}}{r} & \psi_2 = U_e \\
 & h = Shp g & f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{CL}} & S = R = \frac{U}{I} & F_v = \dots \\
 & \cos \vartheta_2 & R = R_0 \sqrt[3]{A} & \int \vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} & p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \\
 & \int_{C(S)} \vec{H} d\vec{l} = \int_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} & \varphi = m c \Delta t & F_g = \dots \\
 & = \mu_0 \sum I_i & p = \frac{\vec{F}}{\Delta S} = \frac{m \Delta \vec{v}}{\Delta S \Delta t} & P = UI & h = \frac{1}{2} g t^2 & v - v_1(1 + \beta) \\
 & f' = \frac{v_a \cdot v_b}{(v_b - 1)(v_b - v_a)} & \nabla \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \dots
 \end{aligned}$$

# Études de stabilité



# Analyse de Fourier : Introduction

Il existe de nombreuses méthodes pour étudier la stabilité d'un schéma

→ Certaines sont très complexes ! (ex : étude du rayon spectral de l'opérateur d'évolution)

Dans ce cours, on va aborder une méthode plus simple :

→ L'analyse de Fourier (on néglige les bords)

## Description :

On va exploiter les propriétés de l'espace de Fourier pour calculer une quantité permettant d'évaluer la stabilité du schéma à partir de sa définition

= le **facteur d'amplification** :

$$g(k, \delta x, \delta t)$$

On a alors une condition de stabilité simplifiée :

$$\max_{k \in \mathbb{R}} |g(k, \delta x, \delta t)| \leq 1 \Leftrightarrow \text{schéma stable}$$

→ Comment calculer le facteur d'amplification ?

# Analyse de Fourier : Rappels

Soit  $f(x)$  une fonction réelle intégrable sur l'axe réel

Transformée de Fourier :

$$TF[f(x)](k) = \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Transformée de Fourier inverse :

$$TFI[\hat{f}k](x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dx$$

NB : Le facteur  $1/\sqrt{2\pi}$  est une normalisation qui vient de l'utilisation de  $ikx$  (au lieu de  $i2\pi\xi x$ )

# Norme L2

Norme L2 :

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f^2| dx}$$



$$\|f\| < \infty \Rightarrow f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (\text{carré-intégrable sur l'axe réel})$$

Norme L2 d'un vecteur :

$$U^n = \begin{bmatrix} u_0^n \\ \dots \\ u_i^n \\ \dots \\ u_M^n \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \|U^n\| = \sqrt{\sum_{i=0}^M |u_i^n|^2}$$

Identité de Parseval :

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk = \|\hat{f}\|^2$$

→ La norme L2 peut être utilisée de manière équivalente dans l'espace réel et dans l'espace de Fourier !

# Facteur d'amplification (2 niveaux) (I)

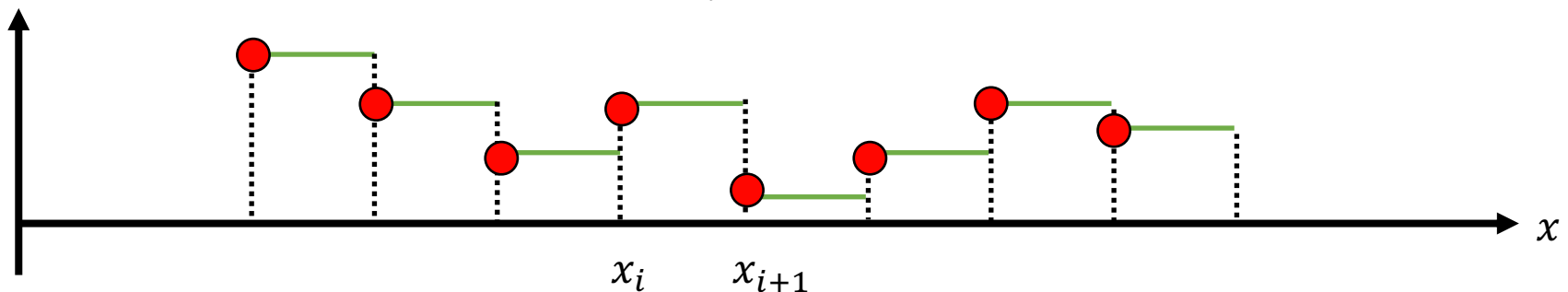
Faisons un premier exemple avec un schéma à 2 niveaux temporels :

$$\sum_m a_m f_{i+m}^{n+1} = \sum_m b_m f_{i+m}^n \quad \longrightarrow \quad F^{n+1} = \varepsilon F^n, n = 0, \dots, N - 1$$

NB : dans l'analyse de Fourier, on oublie les bords, et on ne s'intéresse qu'au domaine

On va d'abord faire une première manipulation pour simplifier l'écriture  
 → on passe de fonctions nodales à des fonctions constantes par morceaux :

$$f_{cst}^n(x) = f_i^n, x_i \leq x \leq x_{i+1}$$



$$\sum_m a_m f_{cst}^{n+1}(x + m\delta x) = \sum_m b_m f_{cst}^n(x + m\delta x), \forall x \quad (\text{plus de dépendance en } i !)$$

# Facteur d'amplification (2 niveaux) (II)

On passe maintenant dans l'espace de Fourier :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_m a_m f_{cst}^{n+1}(x + m\delta x) = \sum_m b_m f_{cst}^n(x + m\delta x) \right) e^{-ikx} dx$$



$$\sum_m a_m e^{ikm\delta x} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{cst}^{n+1}(x + m\delta x) e^{-ik(x+m\delta x)} dx \right)$$

$$= \sum_m b_m e^{ikm\delta x} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{cst}^n(x + m\delta x) e^{-ik(x+m\delta x)} dx \right)$$



$$\sum_m a_m e^{ikm\delta x} \hat{f}_{cst}^{n+1}(k) = \sum_m b_m e^{ikm\delta x} \hat{f}_{cst}^n(k)$$

Le facteur d'amplification est finalement défini comme :

$$g(k, \delta x, \delta t) = \frac{\hat{f}_{cst}^{n+1}(k)}{\hat{f}_{cst}^n(k)} = \frac{\sum_m b_m e^{ikm\delta x}}{\sum_m a_m e^{ikm\delta x}}$$

→ Voyons maintenant un exemple concret :

# Facteur d'amplification (exemple)

Équation  
d'advection :

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\delta t} + a \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\delta x} = 0$$

Schéma UPWIND

1. On réécrit le schéma sous forme générale :

$$f_i^{n+1} = (1 - C)f_i^n + C f_{i-1}^n \quad \left( C = \frac{a\delta t}{\delta x} \right)$$

2. On passe à des fonctions constantes par morceaux :

$$f_{cst}^n = f_i^n \quad f_{cst}^{n+1} = f_i^{n+1}$$

3. On utilise l'espace de Fourier :

$$\begin{aligned} f_i^{n+1} &= \hat{f}_{cst}^{n+1} e^{ikx_i} & f_i^n &= \hat{f}_{cst}^n e^{ikx_i} \\ f_{i\pm 1}^n &= \hat{f}_{cst}^n e^{ik(x_i \pm \delta x)} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \hat{f}_{cst}^{n+1} e^{ikx_i} = (1 - C + C e^{-ik\delta x}) \hat{f}_{cst}^n e^{ikx_i}$$

4. On calcule le facteur d'amplification :

$$g = \frac{\hat{f}_{cst}^{n+1}}{\hat{f}_{cst}^n} = 1 - C + C e^{-ik\delta x}$$



# Stabilité L2 : Introduction (I)

On va maintenant faire le lien entre le facteur d'amplification et la condition de stabilité :

$$\max_{k \in R} |g(k, \delta x, \delta t)| \leq 1 \quad \longleftrightarrow \quad \forall X, \|\varepsilon^n X\| \leq C \|X\|, 0 \leq n \leq T/\delta t$$

Norme L2

On repart de la définition du facteur d'amplification :

$$\hat{f}_{cst}^{n+1}(k) = g(k, \delta x, \delta t) \hat{f}_{cst}^n(k)$$

On utilise maintenant la norme L2 :

$$\|\hat{f}_{cst}^{n+1}\| = |g(k, \delta x, \delta t)| \|\hat{f}_{cst}^n(k)\| \leq \left( \max_{k \in R} |g(k, \delta x, \delta t)| \right) \|\hat{f}_{cst}^n(k)\|$$

Avec l'identité de Parseval, on repasse dans l'espace physique :

$$\|f_{cst}^{n+1}(x)\| \leq \left( \max_{k \in R} |g(k, \delta x, \delta t)| \right) \|f_{cst}^n(k)\|$$

# Stabilité L2 : Introduction (II)

D'après la définition des fonctions constantes par morceaux, on a :

$$f_{cst}^n(x) = f_i^n, x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

$$\|U^n\| = \sqrt{\sum_{i=0}^M |u_i^n|^2} \quad \longrightarrow \quad \|f_{cst}^n(k)\| = \sqrt{\delta x \sum_{i=0}^M |f_i^n|^2} = \sqrt{\delta x} \|F^n(k)\| \quad F^n = \begin{bmatrix} f_0^n \\ \dots \\ f_i^n \\ \dots \\ f_M^n \end{bmatrix}$$

On peut alors refaire le lien avec le vecteur discret :

$$\|F^{n+1}\| \leq \left( \max_{k \in R} |g(k, \delta x, \delta t)| \right) \|F^n\|$$

Par récurrence, on obtient :

$$\|F^n\| \leq \left( \max_{k \in R} |g(k, \delta x, \delta t)| \right)^n \|F^0\| \quad \longrightarrow \quad \|\varepsilon^n F^0\| \leq \left( \max_{k \in R} |g(k, \delta x, \delta t)| \right)^n \|F^0\|$$

On a alors le lien voulu :

$$\left( \max_{k \in R} |g(k, \delta x, \delta t)| \right)^n \leq C \quad \longrightarrow \quad \forall X, \|\varepsilon^n X\| \leq C \|X\|, 0 \leq n \leq T/\delta t$$

# Stabilité L2 et théorème de von Neumann

Définition de la stabilité L2 (schéma à 2 niveaux temporels) :

Le schéma est stable pour la norme L2

s'il existe une constante  $C$  indépendante de la résolution  $(\delta x, \delta t)$  telle que :

$$\forall F^0 \in L^2(R), \|F^n\| \leq C \|F^0\| \quad 0 \leq n \leq \frac{T}{\delta t}, \frac{\delta x}{\delta t} \text{ fixé}$$

→ Sous-cas particulier de la définition de la stabilité pour cette norme

Théorème de von Neumann :

Un schéma à 2 niveaux temporels est stable pour la norme L2  
si et seulement si :

$$\max_{k \in R} |g(k, \delta x, \delta t)| \leq 1 + M \delta t$$

$M$  est une constante à  $\frac{\delta x}{\delta t}$  fixé

→ Permet de relier la stabilité L2 à une condition sur le facteur d'amplification !

# Stabilité asymptotique et critère de von Neumann

## Différence entre stabilité L2 et stabilité asymptotique L2 :

La stabilité précédente dépend du nombre de pas de temps maximal ( $T$ )

→ On aimerait avoir des garanties pour un nombre de pas quelconque !

= **stabilité asymptotique**

## Définition de la stabilité asymptotique L2 (schéma à 2 niveaux temporels) :

Le schéma est **asymptotiquement** stable pour la norme L2

s'il existe une constante  $C$  indépendante de la résolution  $(\delta x, \delta t)$  telle que :

$$\forall F^0 \in L^2(R), \|F^n\| \leq C \|F^0\| \quad \forall n \in N, \frac{\delta x}{\delta t} \text{ fixé}$$

## Critère de von Neumann :

Un schéma à 2 niveaux temporels est **asymptotiquement** stable pour la norme L2 si et seulement si :

$$\max_{k \in R} |g(k, \delta x, \delta t)| \leq 1$$

→ La condition est plus restrictive !

# Stabilité L2 : Exemple

On remarque que :

$$\max_{k \in \mathbb{R}} |g(k, \delta x, \delta t)| \leq 1 \Leftrightarrow \max_{k \in \mathbb{R}} |g(k, \delta x, \delta t)|^2 \leq 1$$

On calcule alors le module du facteur d'amplification au carré en le multipliant par son conjugué complexe :

$$\begin{aligned} |g|^2 &= g \cdot \bar{g} = ((1 - C) + Ce^{-ik\delta x})(1 - C + Ce^{ik\delta x}) \\ &= (1 - C)^2 + (1 - C)C[e^{-ik\delta x} + e^{ik\delta x}] + C^2 \end{aligned}$$

On utilise :

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

On obtient :

$$|g|^2 = 1 - 2C(1 - C)[1 - \cos(k\delta x)]$$

On a alors la condition de stabilité :

$$\max_{k \in \mathbb{R}} |g(k, \delta x, \delta t)|^2 \leq 1 \quad \longrightarrow \quad 2C(1 - C) \geq 0 \quad \longrightarrow \quad C \leq 1$$

# Exemple d'un schéma instable

Équation d'advection : 
$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\delta t} + a \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\delta x} = 0$$
 Schéma FTCS (Forward Time Centered Space)

1. On réécrit le schéma sous forme générale :

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{a\delta t}{2\delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)$$

2. On passe à des fonctions constantes par morceaux :

$$f_{cst}^n = f_i^n \quad f_{cst}^{n+1} = f_i^{n+1}$$

3. On utilise l'espace de Fourier :

$$\begin{aligned} f_i^{n+1} = \hat{f}_{cst}^{n+1} e^{ikx_i} \quad f_i^n = \hat{f}_{cst}^n e^{ikx_i} \\ f_{i\pm 1}^n = \hat{f}_{cst}^n e^{ik(x_i \pm \delta x)} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \hat{f}_{cst}^{n+1} e^{ikx_i} = \left( 1 - \frac{a\delta t}{2\delta x} (e^{ik\delta x} - e^{-ik\delta x}) \right) \hat{f}_{cst}^n e^{ikx_i}$$

4. On calcule le facteur d'amplification :

$$g = \frac{\hat{f}_{cst}^{n+1}}{\hat{f}_{cst}^n} = 1 - i \frac{a\delta t}{\delta x} \sin(k\delta x) \quad \longrightarrow \quad |g| \geq 1, \forall k$$

Le schéma FTCS est inconditionnellement instable ici !

# Exemple d'un schéma stable

Équation de diffusion :

$$f_i^{n+1} - \frac{S}{2}(f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}) = f_i^n + \frac{S}{2}(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n) + \frac{\delta t}{2}(s_{i+1}^n + s_i^n)$$

Schéma Crank-Nicolson

On utilise l'espace de Fourier :

$$f_i^{n+1} = \hat{f}_{cst}^{n+1} e^{ikx_i}$$


$$f_{i+1}^{n+1} = \hat{f}_{cst}^{n+1} e^{ik(x_i+\delta x)}$$

$$f_{i-1}^{n+1} = \hat{f}_{cst}^{n+1} e^{ik(x_i-\delta x)}$$

$$f_i^n = \hat{f}_{cst}^n e^{ikx_i}$$


$$f_{i+1}^n = \hat{f}_{cst}^n e^{ik(x_i+\delta x)}$$

$$f_{i-1}^n = \hat{f}_{cst}^n e^{ik(x_i-\delta x)}$$



$$\hat{f}_{cst}^{n+1} - \frac{S}{2}(\hat{f}_{cst}^{n+1} e^{ik\delta x} - 2\hat{f}_{cst}^{n+1} + \hat{f}_{cst}^{n+1} e^{-ik\delta x}) = \hat{f}_{cst}^n + \frac{S}{2}(\hat{f}_{cst}^n e^{ik\delta x} - 2\hat{f}_{cst}^n + \hat{f}_{cst}^n e^{-ik\delta x})$$

On calcule le facteur d'amplification :



$$g = \frac{\hat{f}_{cst}^{n+1}}{\hat{f}_{cst}^n} = \frac{1 - S + \frac{S}{2}(e^{ik\delta x} + e^{-ik\delta x})}{1 + S - \frac{S}{2}(e^{ik\delta x} + e^{-ik\delta x})} = \frac{1 - S + S \cos(k\delta x)}{1 + S - S \cos(k\delta x)}$$

$$\max_{k \in \mathbb{R}} |g(k, \delta x, \delta t)| \leq 1 \Leftrightarrow \text{schéma stable}$$

→ Dans ce cas, le schéma est inconditionnellement stable !

→ C'est le cas de tous les schémas implicites !

# Stabilité L2 : Schéma à 3 niveaux (I)

Voyons rapidement l'extension à un schéma à 3 niveaux temporels :

$$\sum_m a_m f_{i+m}^{n+1} = \sum_m b_m f_{i+m}^n + \sum_m c_m f_{i+m}^{n-1}$$

Avec la même méthode que précédemment, on obtient dans l'espace de Fourier :

$$\left( \sum_m a_m e^{ikm\delta x} \right) \hat{f}_{cst}^{n+1} = \left( \sum_m b_m e^{ikm\delta x} \right) \hat{f}_{cst}^n + \left( \sum_m c_m e^{ikm\delta x} \right) \hat{f}_{cst}^{n-1}$$

On remarque que :

$$g = \frac{\hat{f}_{cst}^{n+1}}{\hat{f}_{cst}^n} = \frac{\hat{f}_{cst}^n}{\hat{f}_{cst}^{n-1}} \quad \longrightarrow \quad g^2 = \frac{\hat{f}_{cst}^{n+1}}{\hat{f}_{cst}^{n-1}}$$



# Stabilité L2 : Schéma à 3 niveaux (II)

En divisant par  $\hat{f}_{cst}^{n-1}$ , le facteur d'amplification est alors solution d'un polynôme d'ordre 2 :

$$-\left(\sum_m a_m e^{ikm\delta x}\right)g^2 + \left(\sum_m b_m e^{ikm\delta x}\right)g + \left(\sum_m c_m e^{ikm\delta x}\right) = 0$$

→ Deux solutions  $g_1$  et  $g_2$

→ Contrairement à un schéma à 2 niveaux, on a plusieurs solutions via une équation

Critère de von Neumann (schéma à 3 niveaux) :

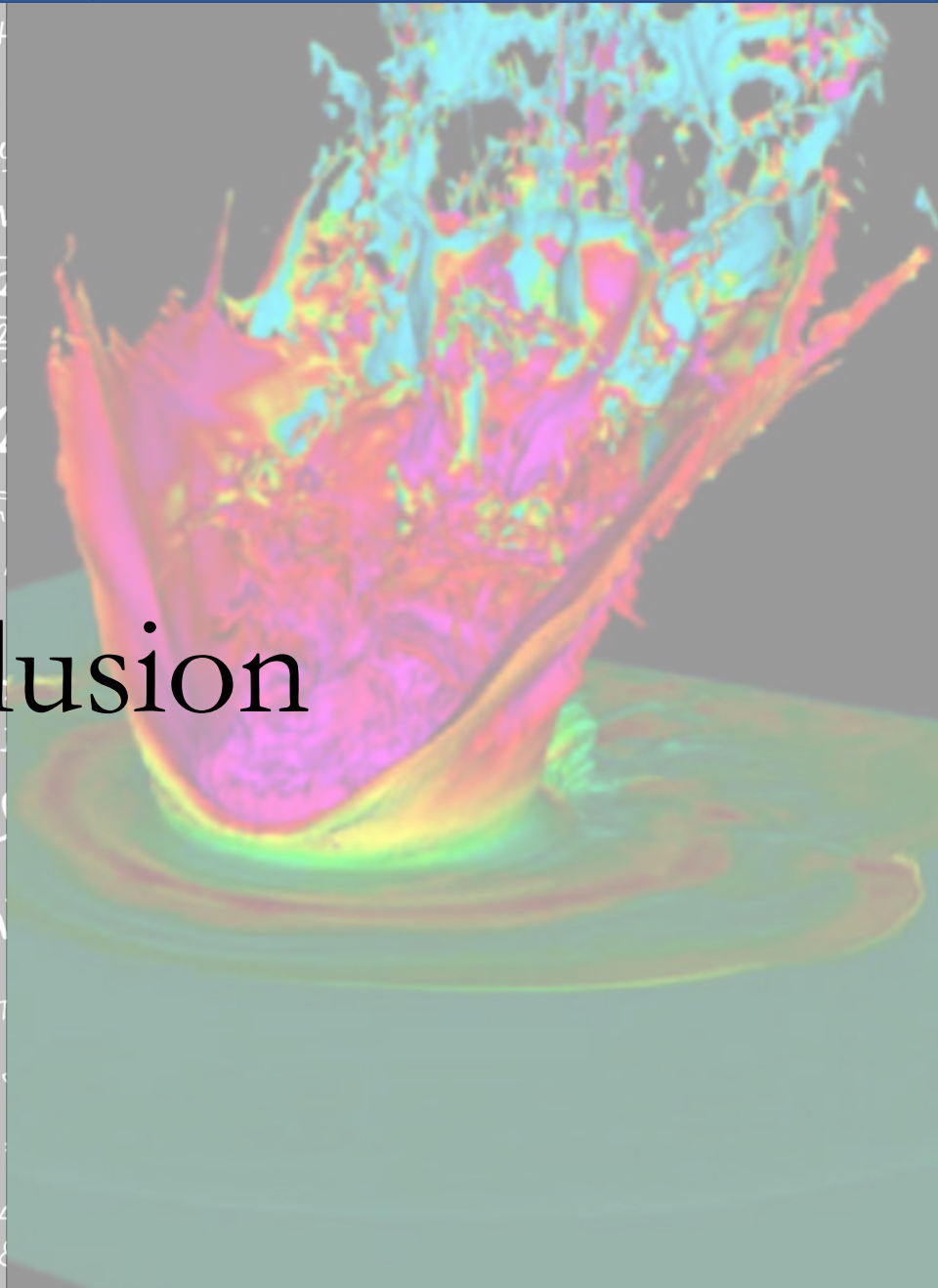
Un schéma à 3 niveaux temporels est **asymptotiquement** stable pour la norme L2 si et seulement si :

$$\max_{i \in \{1,2\}} \left( \max_{k \in \mathbb{R}} |g_i(k, \delta x, \delta t)| \right) \leq 1$$

→ Il faut tester le critère sur tous les facteurs d'amplification possible !

$$\begin{aligned}
 & 2 \operatorname{tg} \vartheta_B = \frac{w_2}{w_1} = w_{21} \quad \rho V = nRT \quad \vec{\psi} = \iint \vec{D} d\vec{S} = AD \\
 & M_e = \sigma T^4 \quad \phi_e = \frac{L}{4\pi r^2} \quad \int \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \quad v = c/\lambda \\
 & \psi = E\psi \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad X_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L = 2\pi f L \quad F_g = \frac{m_1 m_2}{r^2} \\
 & E = h\nu \quad U = \frac{W_{AB}}{|E_{PA} - E_{PB}|} = |\varphi_A - \varphi_B| \quad T = \frac{4 n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} \quad g = \frac{c}{h\nu} \\
 & \varphi_E = \frac{E_c}{\varphi_0} = k \frac{\varphi}{r} \quad m = N \cdot m_0 = \frac{Q}{v_e} \frac{M_m}{N_A} \quad E = \frac{E_c}{a} \int_{-a/L}^{+a/L} \sin(\omega t + \phi) dy \\
 & \frac{M_m}{N_A} = \frac{M_r \cdot 10^{-3}}{N_A} \quad l_t = l_0(1 + d\Delta t) \quad I = \frac{U_e}{R + R_i} \quad \omega = 2\pi f \\
 & R = \rho \frac{l}{S} \quad E = mc^2 \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{w_2}{w_1} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}} \\
 & \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad \beta = \frac{\Delta I_c}{I_c} \quad \phi_e = \frac{\Delta E}{\Delta t} \frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{x'} \\
 & E = \frac{h^2 k^2}{2m} \quad pc = \frac{1 \text{ AU}}{r} \quad S = \frac{U}{I} \quad F_v = \dots \\
 & f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad \sigma = \frac{Q}{M} \quad M = F d \cos \alpha \\
 & \vec{H} d\vec{l} = \iint_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad \varphi = mc\Delta t \quad F_g = \dots \\
 & \vec{H} = \mu_0 \sum \vec{I} \quad \rho = \frac{\vec{F}}{\Delta S} = \frac{m \Delta \vec{v}}{\Delta S \Delta t} \quad P = UI \quad h = \frac{1}{2} g t^2 \quad v = v_1(1 + \beta) \\
 & \nabla \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \dots
 \end{aligned}$$

# Conclusion



# Récapitulatif (I)

On a vu les 4 propriétés essentielles qui permettent de caractériser un schéma :

## Consistance :

$$\begin{aligned}
 (\text{schéma})_i^n &\xrightarrow{\delta x, \delta t \rightarrow 0} (\text{équation exacte})_i^n \\
 R^n &\xrightarrow{\delta x, \delta t \rightarrow 0} 0, \forall n
 \end{aligned}$$

## Ordre :

$$\begin{aligned}
 R_i^n &= \text{termes} + O(\delta x^{p+1}) + O(\delta t^{q+1}) \\
 p &: \text{ordre spatial}, q : \text{ordre temporel} \\
 \min(p, q) &: \text{ordre global}
 \end{aligned}$$

## Stabilité :

$$\begin{aligned}
 \exists C \in R, ||\varepsilon^n X|| &\leq C ||X|| \\
 \forall X, 0 \leq n &\leq T/\delta t
 \end{aligned}$$

## Convergence :

$$\begin{aligned}
 \forall n, ||F_{ex}^n - F^n|| &\xrightarrow{\delta x, \delta t \rightarrow 0} 0 \\
 ||E^n|| &\xrightarrow{\delta x, \delta t \rightarrow 0} 0, \forall n
 \end{aligned}$$

# Récapitulatif (II)

On a vu les méthodes qui permettent de caractériser un schéma :

## Consistance :

Développements limités  
(à un ordre suffisant)

## Ordre :

Développements limités  
(à un ordre suffisant)

## Stabilité :

Calcul du facteur d'amplification dans  
l'espace de Fourier  
Majoration pour stabilité L2  
(critère de von Neumann)

## Convergence :

Consistance + Stabilité  
(Théorème de Lax)

# Application à l'UE

## Discrétisation des équations :

- Savoir écrire le schéma sous forme générale,
- Savoir montrer la consistance d'un schéma,
  - Savoir donner son ordre,
- Savoir calculer le facteur d'amplification d'un schéma,
- Savoir démontrer la stabilité L2 d'un schéma à 2 niveaux temporels.

# Plan de l'UE

## Idée générale :

Au premier semestre, on va introduire les notions de base, et s'intéresser en détails à une méthode numérique précise

Tous les jeudi matin (8h45-12h45) au bâtiment 625

21 Novembre : Cours 1 + Cours 2

4 Décembre : Cours 3 + TP

5 Décembre : Cours 4 + TP

12 Décembre : Cours 5 + TP

19 Décembre : Cours 6 + **TP**

9 Janvier : Cours 7 + TP

16 Janvier : Cours 8 + TP

23 Janvier : TP

30 Janvier : Examen

## Modalités d'évaluation :

TPs + examen oral (question de cours + exercice)