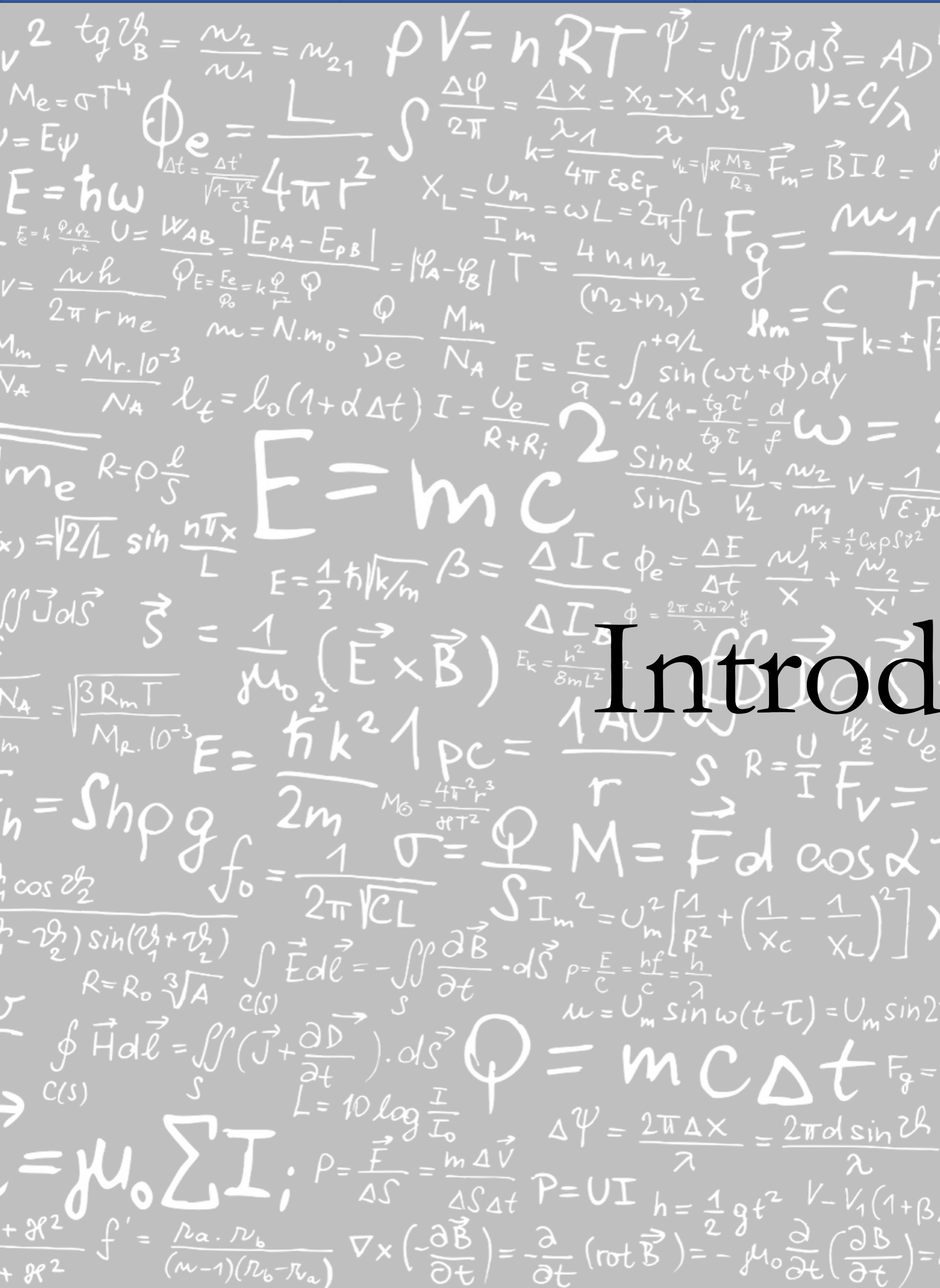
Méthodes Numériques

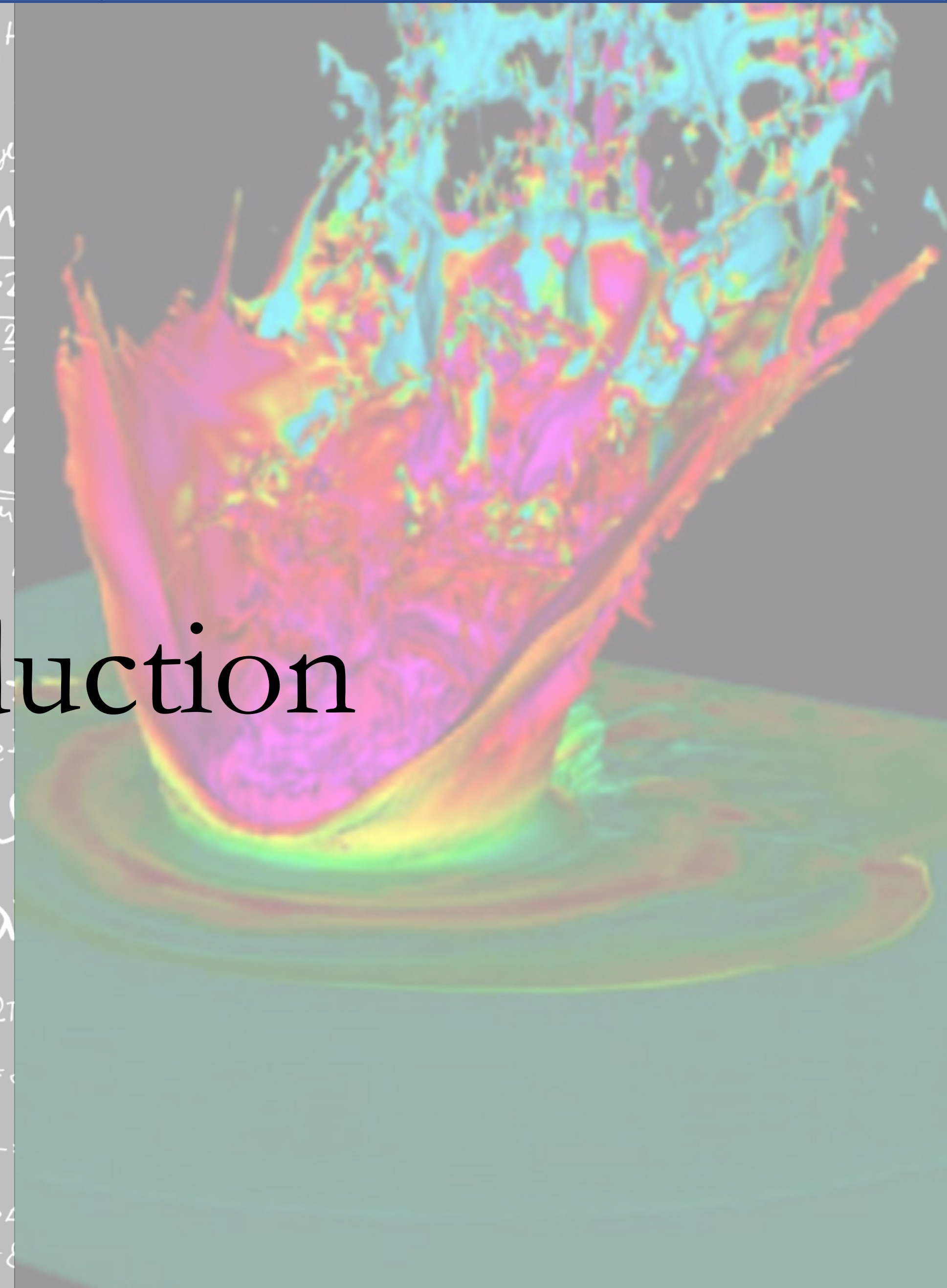
Cours 3 :

Les différences finies

Dr. Barbara PERRI
barbara.perri@universite-paris-saclay.fr



Introduction



Plan de l'UE

Idée générale :

Au premier semestre, on va introduire les notions de base, et s'intéresser en détails à une méthode numérique précise

Tous les jeudi matin (8h45-12h45) au bâtiment 625

21 Novembre : Cours 1 + Cours 2

4 Décembre : **Cours 3** + TP 1

5 Décembre : Cours 4 + TP 2

12 Décembre : Cours 5 + TP 3

19 Décembre : Cours 6 + TP 4

9 Janvier : Cours 7 + TP 4

16 Janvier : Cours 8 + TP 5

23 Janvier : TP 5

30 Janvier : Examen

Modalités d'évaluation :

TPs + examen oral (question de cours + exercice)

Rappel : Définition des EDPs

En méthodes numériques, on s'intéresse à deux grandes familles :

Équations différentielles ordinaires (EDO)

= les inconnues ne dépendent que d'une seule variable

$$\frac{df(x)}{dx} + f(x) = g(x)$$

Équations aux dérivées partielles (EDP)

= les inconnues peuvent dépendre de plusieurs variables

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + f(x,t) = g(x,t)$$

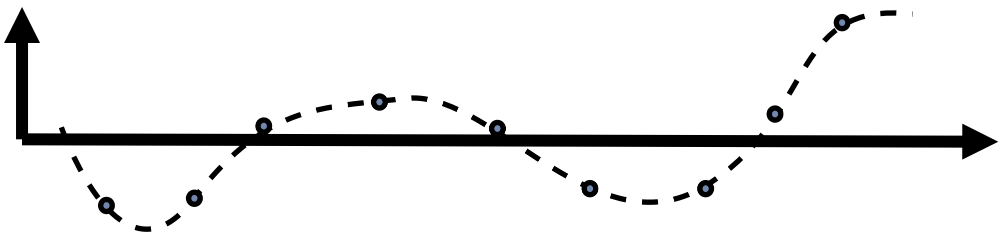
→ On va passer cette fois-ci aux EDPs, et il va donc falloir des méthodes plus complexes

→ On va maintenant se concentrer sur la méthode des différences finies

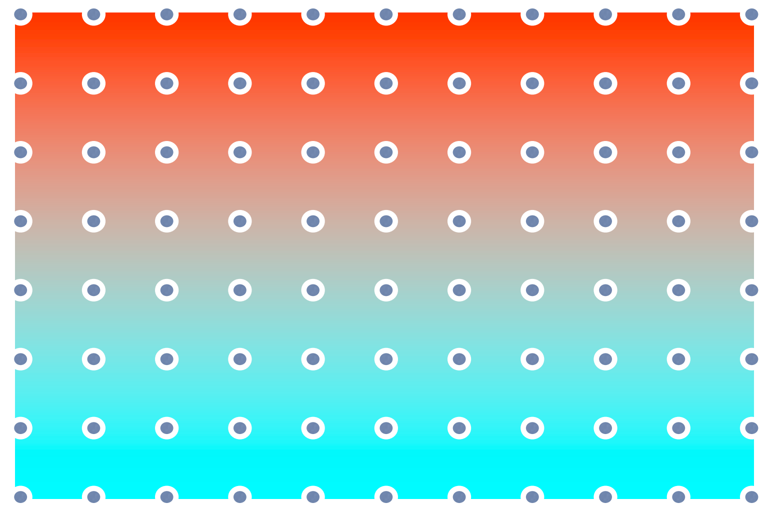
→ On va l'introduire de 3 manières différentes

Différences finies : Domaine

Les fonctions continues sont remplacées par des valeurs nodales :



1D



2D

$$f(x) \rightarrow f(x_i) = f_i$$

$$f(x,y) \rightarrow f\left(x_i, y_j\right) = f_{i,j}$$

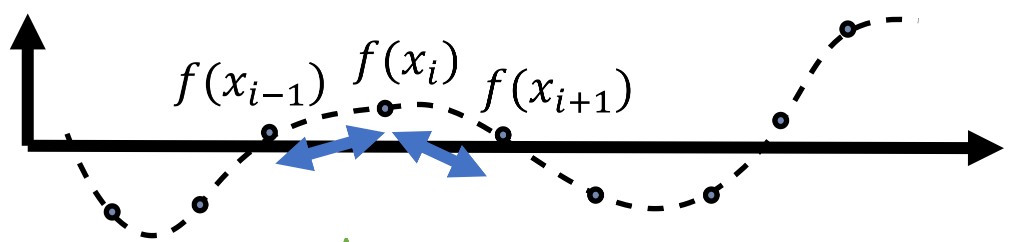
→ Les champs physiques ne sont évalués que en certains points définis par le maillage

Différences finies : Principe

On va approximer les dérivées comme une différence de variations
→ En connaissant les valeurs voisines, on peut estimer la dérivée

$$\frac{df(x)}{dx} + f(x) = 0, \forall x \in D \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\delta x} + f(x_i) = 0, \forall i \in [0, N-1]$$

→ À partir des équations et conditions aux limites, on écrit N équations algébriques (1 pour chaque point)
→ On résout chaque équation à partir des valeurs des points voisins



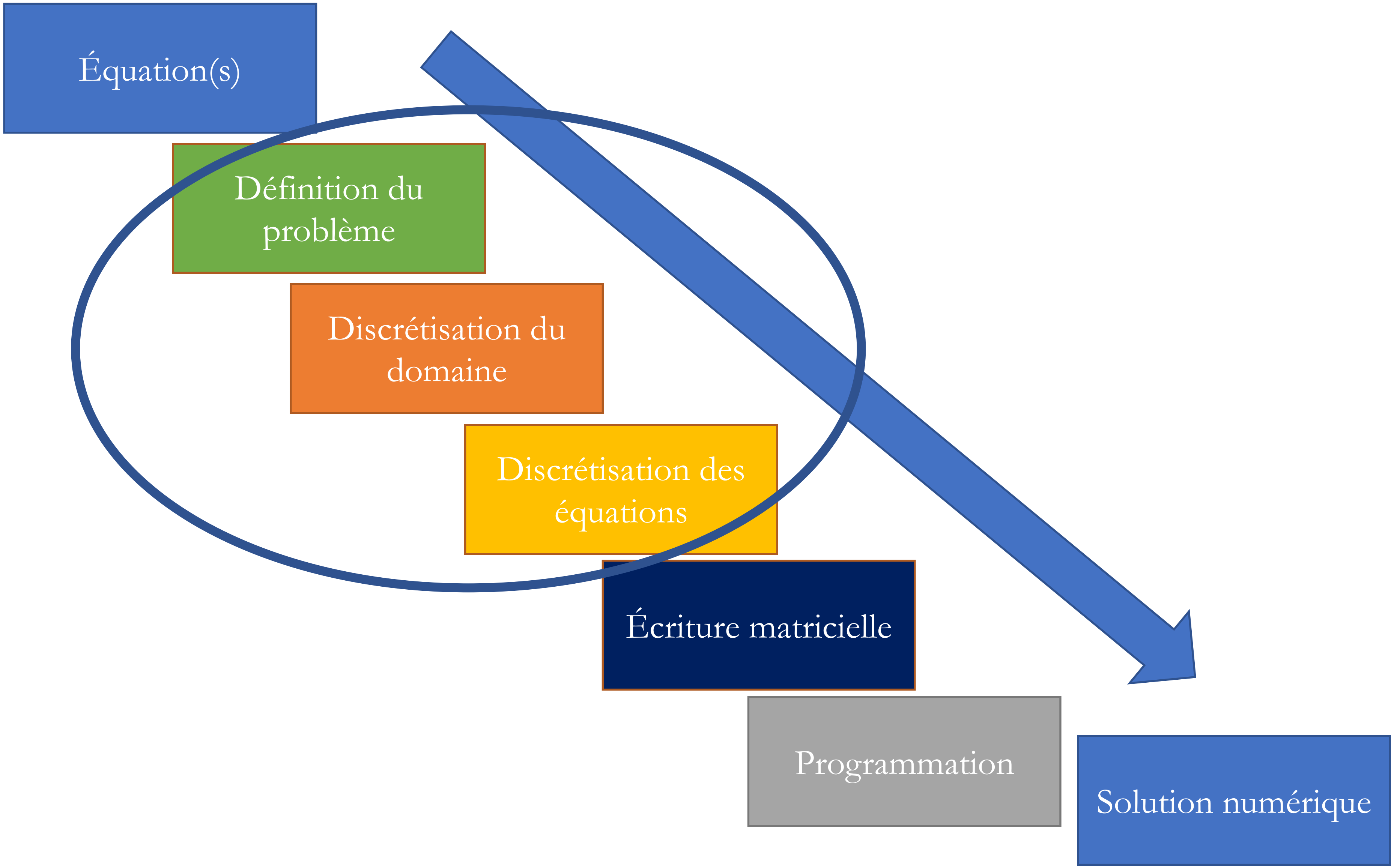
Avantages :

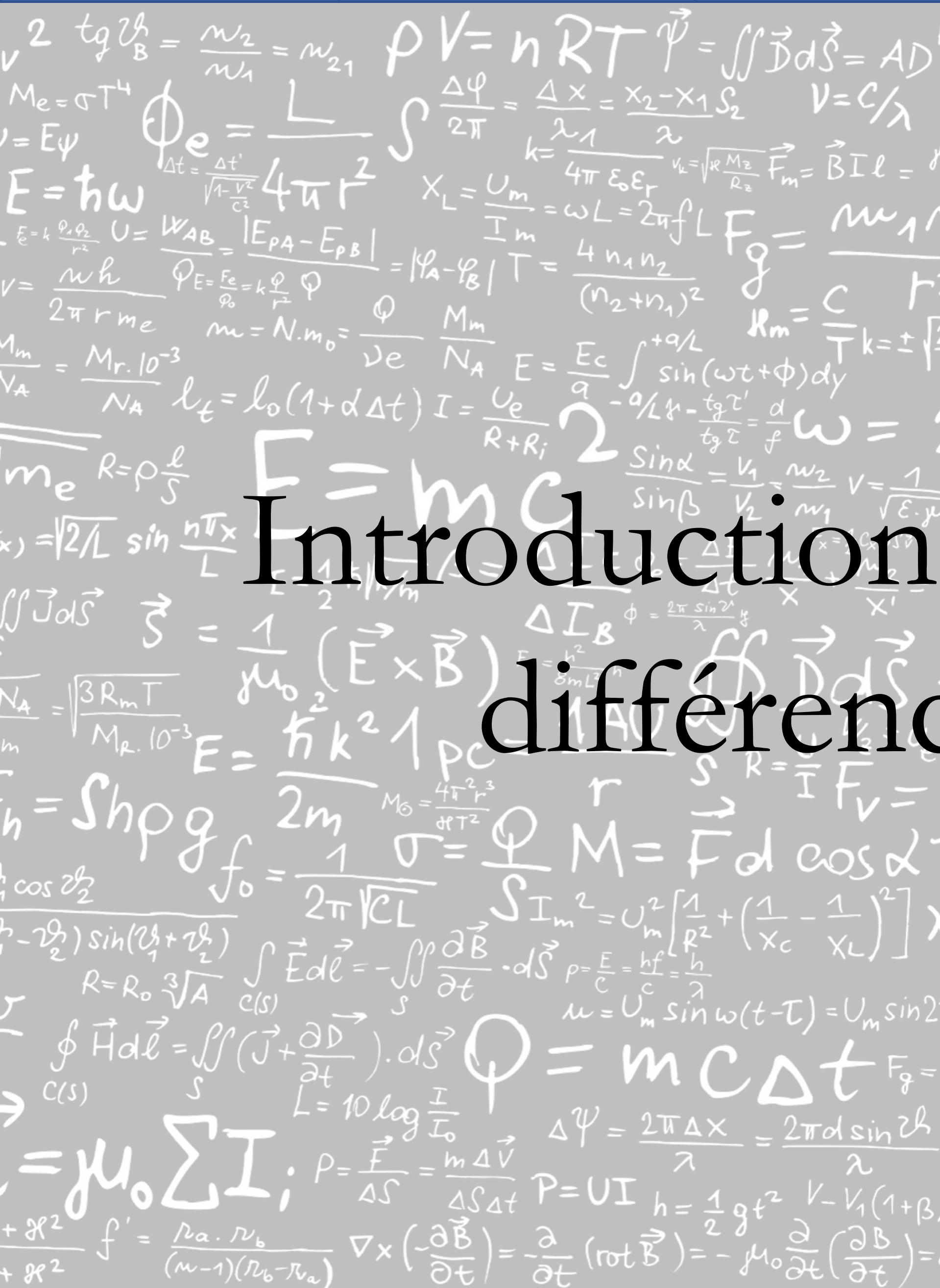
Formulation la plus intuitive et la plus simple, applicable à un grand nombre de problèmes

Inconvénients :

On ne prend pas en compte ce qui se passe entre les points
→ Très dépendant de la résolution choisie

Cycle des méthodes numériques

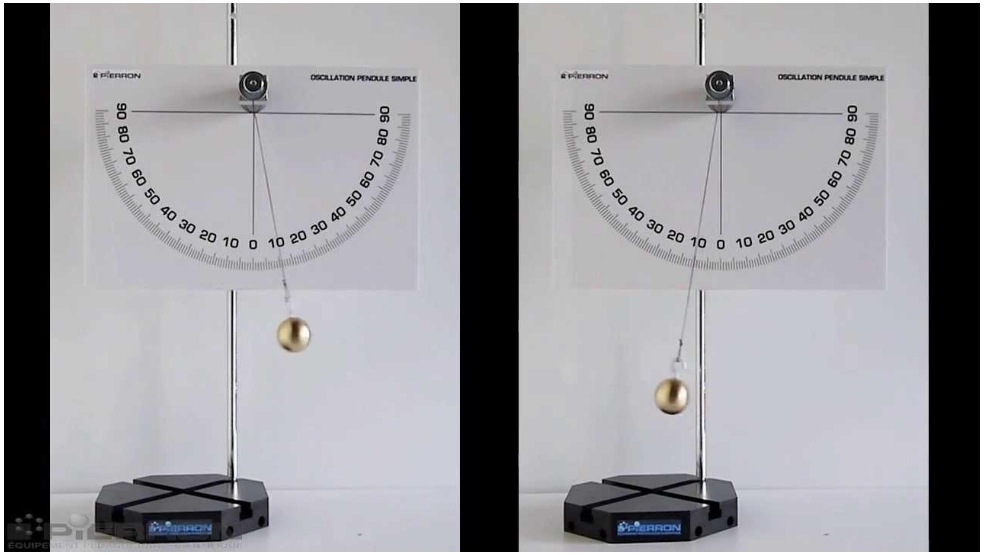





Introduction intuitive aux différences finies

Exemple

Vous êtes un expérimentateur
et vous vous intéressez à l'étude d'un pendule au cours du temps



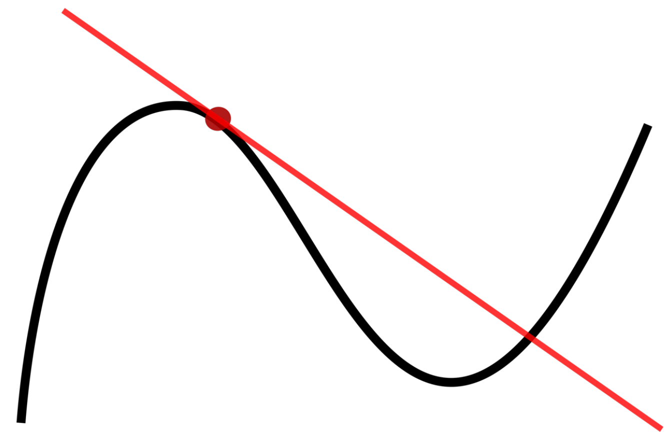
instant	t_0	t_1	t_2	…	t_n
position	f_0	f_1	f_2	…	f_n

vitesse	f'_0	f'_1	f'_2	…	f'_n
accélération	f''_0	f''_1	f''_2	…	f''_n

?

Définition intuitive d'une dérivée

En tout point d'une droite, on peut définir sa tangente
→ Épouse la courbe en ce point + indique sa direction

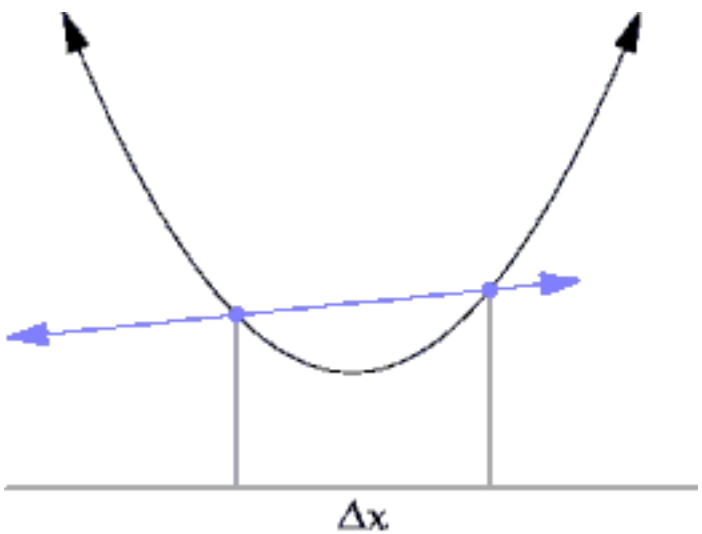


Une définition intuitive de la dérivée est de prendre le coefficient directeur de la tangente
Ex : si on prend la tangente de la position → la vitesse
Si on prend la tangente de la vitesse → l'accélération

La dérivée d'une fonction $f(x)$ par rapport à x est définie comme :

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

→ Ceci revient à chercher la pente de la tangente en ce point



Approximation intuitive d'une dérivée

Pour réaliser une approximation d'une dérivée, il suffit d'enlever la limite

→ On fait juste la différence entre une fonction en un point et un point infiniment proche, et on divise par cette petite distance = **une différence**

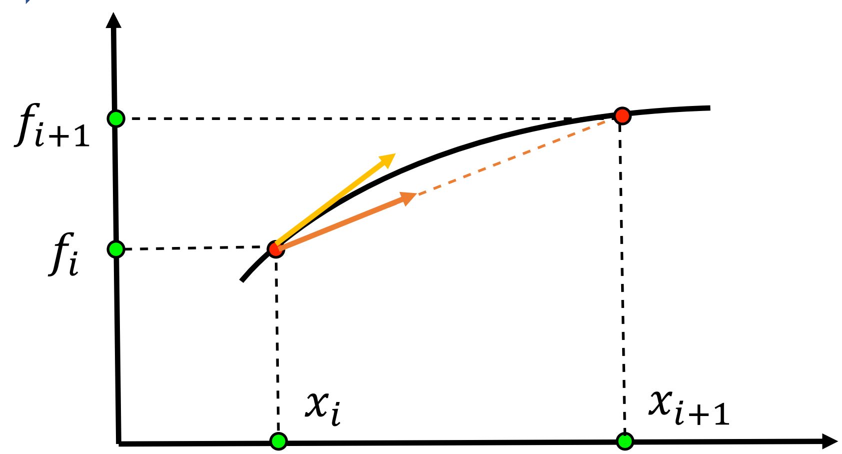
$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx}(x) \approx \frac{f(\mathrm{x}+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

On remplace enfin la fonction continue par l'évaluation discrète de la fonction aux points connus = **une différence finie**

$$\frac{df}{dx}(x) \approx \frac{f(\mathrm{x}+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx}(x_i) = \frac{df_i}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

On comprend intuitivement que plus les x_i sont rapprochés, plus l'erreur est petite

→ Est-ce la seule formulation qu'on puisse imaginer ?

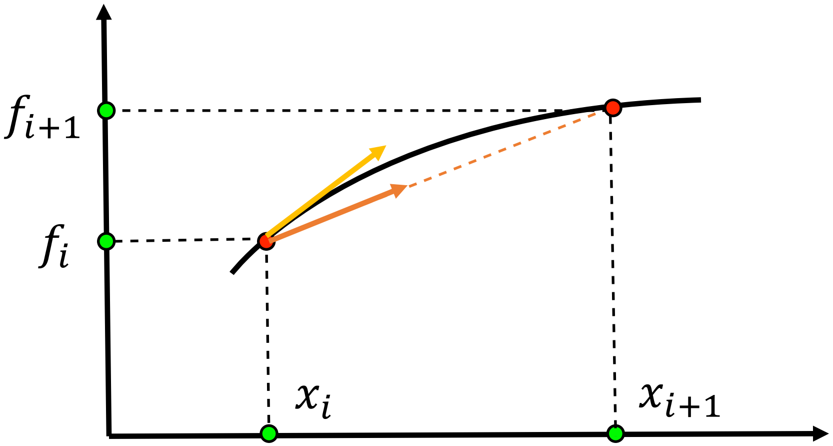


Forward vs. Backward

Forward

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

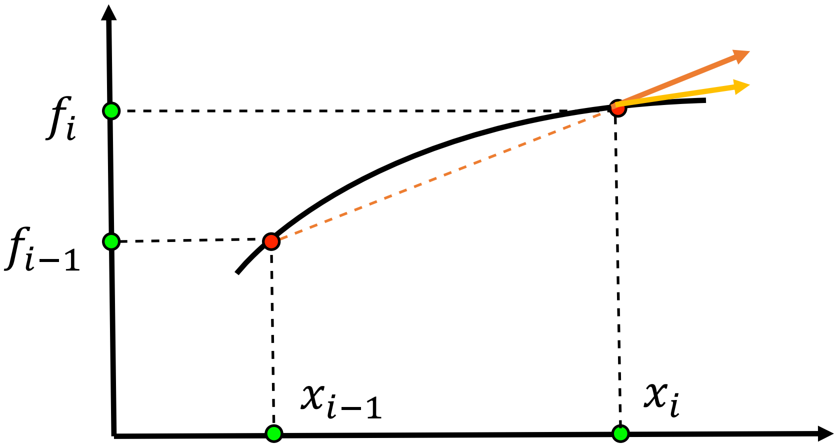
$$\frac{df}{dx}(x_i) = \frac{df_i}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$



Backward

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x) - f(x-\epsilon)}{\epsilon}$$

$$\frac{df}{dx}(x_i) = \frac{df_i}{dx} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$



→ Ces deux formulations semblent équivalentes

(pas de raison que l'une soit meilleure que l'autre, ou avec une erreur plus faible)

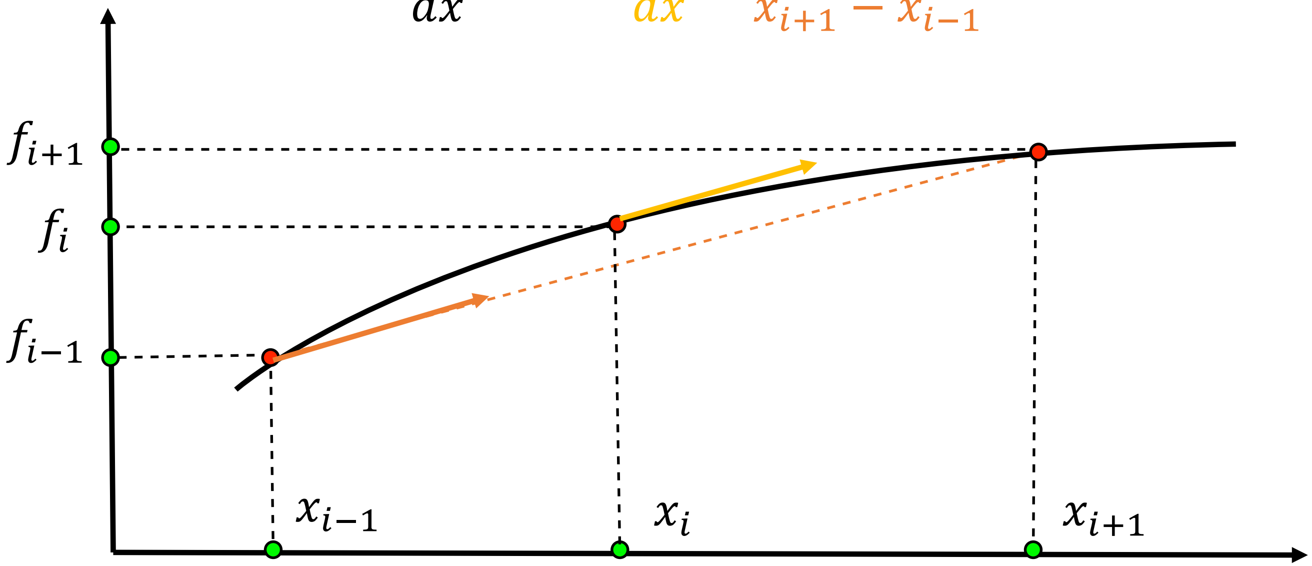
Formulation centrée

On peut encore imaginer une autre formulation :

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+s\epsilon) - f(x-(p-s)\epsilon)}{p\epsilon}, s, p \in R$$

Si on prend $s = 1, p = 2$:

$$\frac{df}{dx}(x_i) = \frac{df_i}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$



→ On a l'impression d'avoir une meilleure précision, mais comment le quantifier ?

Dérivées d'ordre supérieur

La même méthode est utilisable pour les dérivées d'ordre supérieur à 1 :

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = f''(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f'(x) - f'(x-\epsilon)}{\epsilon}$$

B

On obtient par exemple :

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} \approx \frac{f_i' - f_{i-1}'}{x_i - x_{i-1}}$$

B

+

$$f_i' \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

F

+

$$f_{i-1}' \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

F

<u>Exercice :</u>

Quelle formulation obtient-on pour $\frac{d^2 f}{dx^2}$ si le maillage est irrégulier ?

Si le maillage est uniforme ($x_i = x_{i+1} = \delta x, \forall i$) ?

Dérivées d'ordre supérieur

La même méthode est utilisable pour les dérivées d'ordre supérieur à 1 :

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = f''(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f'(x) - f'(x-\epsilon)}{\epsilon}$$

B

On obtient par exemple :

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} \approx \frac{f_i' - f_{i-1}'}{x_i - x_{i-1}}$$

B

+

$$f_i' \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

F

+

$$f_{i-1}' \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

F

$$\Rightarrow \frac{d^2 f_i}{dx^2} \approx f_{i+1}\left[\frac{1}{(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1})}\right] + f_i\left[\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1})^2}\right] + f_{i-1}\left[\frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2}\right]$$

Si le maillage est uniforme ($x_i = x_{i+1} = \delta x, \forall i$) :

$$\Rightarrow \frac{d^2 f_i}{dx^2} \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\delta x^2}$$

Application à l'exemple

instant	t_0	t_1	t_2	…	t_n
position	f_0	f_1	f_2	…	f_n

On a les positions, on chercher les vitesses et accélérations

$$v = \frac{df}{dt}$$

F

$$v_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{t_{i+1} - t_i}$$

B

$$v_i \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$$

C

$$v_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 f}{dt^2}$$

Choix de la combinaison d'approximations

$$a_i \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\delta t^2}$$

Résumé

On peut approximer une dérivée
en utilisant une approximation de sa tangente en ce point

Forward

$$\frac{df_i}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Backward

$$\frac{df_i}{dx} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Centrée

$$\frac{df_i}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

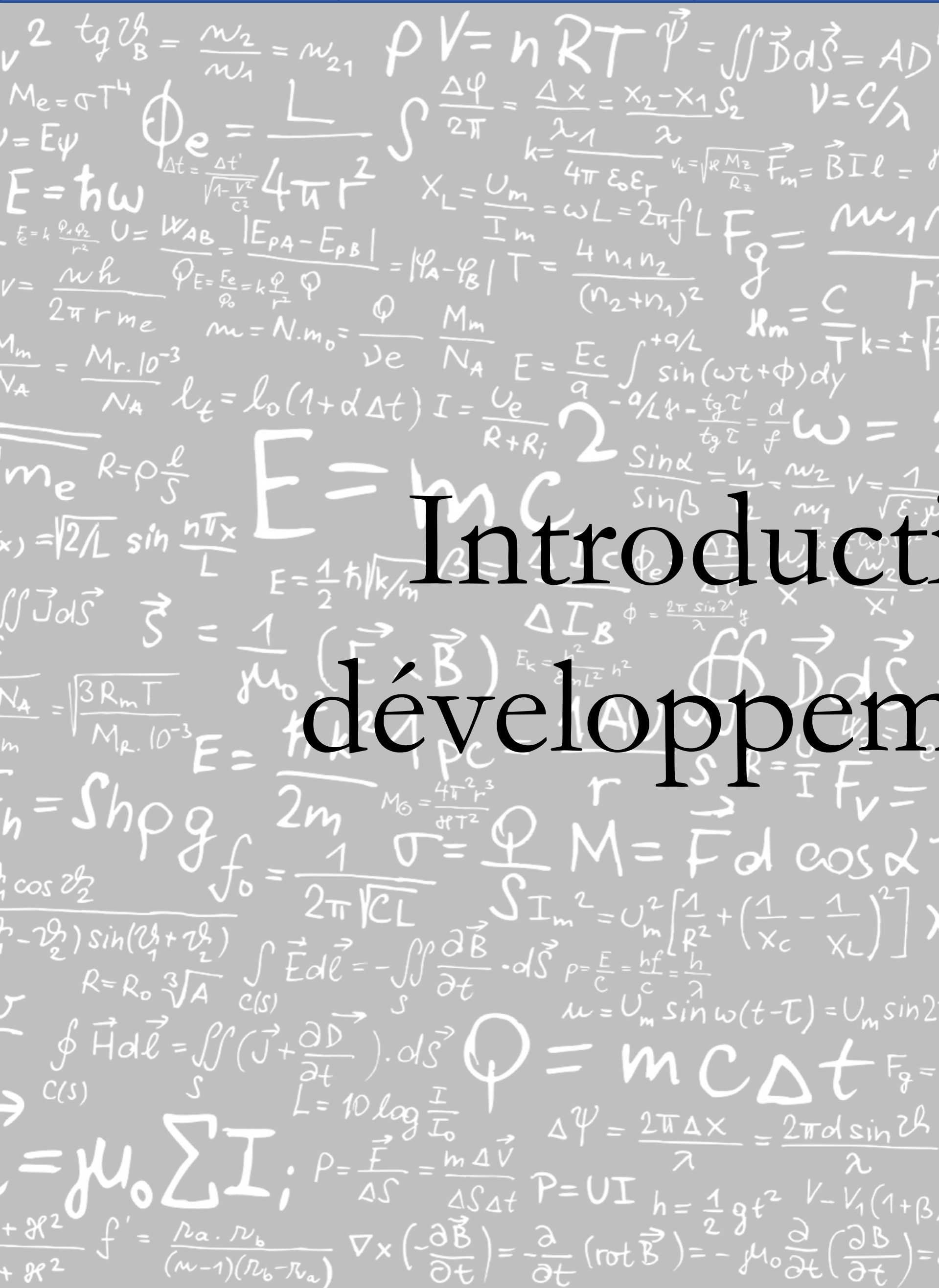
→ Pour les dérivées d'ordre supérieur, il s'agit alors de combiner plusieurs formulations

Avantages :

Formulation intuitive, facile à comprendre et à écrire

Inconvénients :

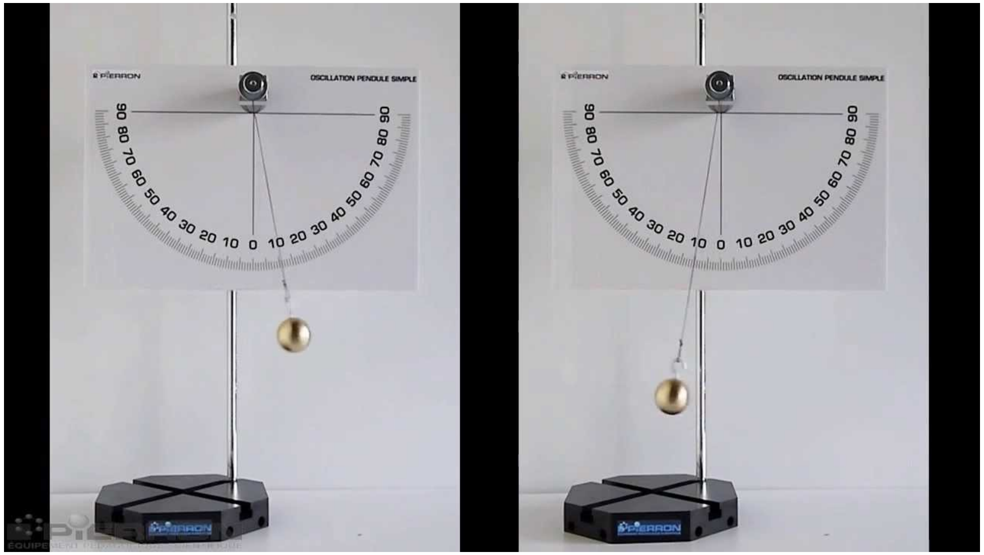
Difficile d'évaluer la précision, pas systématique



Introduction via les développements limités

Exemple

Vous êtes un expérimentateur
et vous vous intéressez à l'étude d'un pendule au cours du temps



instant	t_0	t_1	t_2	…	t_n
position	f_0	f_1	f_2	…	f_n

vitesse	f'_0	f'_1	f'_2	…	f'_n
accélération	f''_0	f''_1	f''_2	…	f''_n

?

Développement limité

Un développement limité (DL) est une approximation polynomiale d'une fonction au voisinage d'un point

Définitions :

f est une fonction à valeurs réelles définies sur un intervalle I

$x_0 \in I$

f admet un développement limité d'ordre n en x_0 s'il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + R(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x - x_0)^i + R(x)$$

avec :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

→ <u>Question :</u> quelle est la différence entre un DL et un polynôme de Lagrange ?

Formule de Taylor

Formule de Taylor (ou Taylor-Young)
→ Développement limité d'une fonction n-fois dérivable

I un intervalle réel, $a, x \in I$, E un espace vectoriel normé réel, $f\,(I \rightarrow E)$ n-dérivable en a

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

$R_n(x) \ll (x-a)^n$ au voisinage de a

Formulation équivalente ($x = a + h$) :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_n(h)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + R_n(h)$$

$R_n(h) \ll (h)^n$ au voisinage de 0

Formules d'Euler décentrées

On rappelle la formule de Taylor :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

On peut réaliser un développement limité autour de x_i en x_{i+1} (maillage uniforme) :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \delta x \frac{df}{dx}(x_i) + \frac{\delta x^2}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) + R_2(x_{i+1})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\delta x} = \frac{df}{dx}(x_i) \boxed{+ \frac{\delta x}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) + R_2(x_{i+1})}$$ **résidu**

$$\Rightarrow \quad \frac{df}{dx}(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\delta x}$$

Forward $\frac{df_i}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\delta x}$

On peut réaliser un développement limité autour de x_i en x_{i-1} :

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - \delta x \frac{df}{dx}(x_i) + \frac{\delta x^2}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) + R_2(x_{i-1})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{df}{dx}(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\delta x}$$

Backward $\frac{df_i}{dx} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\delta x}$

Formule d'Euler centrée

On combine les développements précédents :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \delta x \frac{df}{dx}(x_i) + \frac{\delta x^2}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) + \frac{\delta x^3}{6}\frac{d^3 f}{dx^3}(x_i) + R_3(x_{i+1})$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - \delta x \frac{df}{dx}(x_i) + \frac{\delta x^2}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) - \frac{\delta x^3}{6}\frac{d^3 f}{dx^3}(x_i) + R_3(x_{i-1})$$

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2\delta x \frac{df}{dx}(x_i) + \boxed{\frac{2\delta x^3}{6}\frac{d^3 f}{dx^3}(x_i) + R_3(x_{i+1}) - R_3(x_{i-1})}$$

résidu

$$\frac{df}{dx}(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\delta x}$$

Centrée

$$\frac{df_i}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\delta x}$$

→ <u>Question :</u> quelle est la différence en termes de précision avec les formules décentrées ?

Dérivée d'ordre supérieur

Si maintenant je veux approximer $\frac{d^2f}{dx^2}$ en x_i, comment procéder ?

→ On applique le même principe → on combine différents développements :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \delta x \frac{df}{dx}(x_i) + \frac{\delta x^2}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x_i) + R_2(x_{i+1})$$

$$+$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - \delta x \frac{df}{dx}(x_i) + \frac{\delta x^2}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x_i) + R_2(x_{i-1})$$

$$=$$

$$f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) = 2f(x_i) + \delta x^2 \frac{d^2f}{dx^2}(x_i) \boxed{+ R_2(x_{i+1}) + R_2(x_{i-1})}$$ **résidu**

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2f}{dx^2}(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{\delta x^2}$$

$$\left(\frac{d^2f_i}{dx^2} \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\delta x^2}\right)$$

Cas général

Pour construire une approximation en différences finies par développement limité :

On réalise le développement limité sur tous les points d'intérêt :

$$\forall p \in N, f\left(x_{i+p}\right) = f(x_i) + p\delta x \frac{df}{dx}(x_i) + \frac{(p\delta x)^2}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) + \cdots + \frac{(p\delta x)^n}{n!}\frac{d^n f}{dx^n}(x_i)$$

On réalise une combinaison linéaire de ces DL :

$$\sum_{k=0}^{p} A_k f(x_{i+k})$$

On trouve les bons poids A_k pour extraire la dérivée voulue à la précision voulue

Cas d'un maillage non régulier : Décentrée

On réalise un développement limité autour de x_i en x_{i+1}(maillage non uniforme) :

Exercice :
Quelle formulation obtient-on pour la dérivée première en forward ?

On peut réaliser un développement limité autour de x_i en x_{i-1} :

Exercice :
Quelle formulation obtient-on pour la dérivée première en backward ?

Cas d'un maillage non régulier : Décentrée

On réalise un développement limité autour de x_i en x_{i+1}(maillage non uniforme) :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i)\frac{df}{dx}(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x_i) + R_2(x_{i+1})$$

résidu

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} = \frac{df}{dx}(x_i)\boxed{+ \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x_i) + R_2(x_{i+1})}$$

$$\frac{df}{dx}(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

Forward

$$\frac{df_i}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

On peut réaliser un développement limité autour de x_i en x_{i-1} :

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + (x_{i-1} - x_i)\frac{df}{dx}(x_i) + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x_i) + R_2(x_{i-1})$$

$$\frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{(x_{i-1} - x_i)} = \frac{df}{dx}(x_i) + \frac{(x_{i-1} - x_i)}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x_i) + R_2(x_{i-1})$$

$$\frac{df}{dx}(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}$$

Backward

$$\frac{df_i}{dx} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Cas d'un maillage non régulier : Centrée

On combine les développements précédents :

<u>Exercice :</u>

Quelle formulation obtient-on pour la dérivée première en centré ?

Cas d'un maillage non régulier : Centrée

On combine les développements précédents :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i)\frac{df}{dx}(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) + R_2(x_{i+1})$$

$$-$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + (x_{i-1} - x_i)\frac{df}{dx}(x_i) + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) + R_2(x_{i-1})$$

$$=$$

résidu

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = (x_{i+1} - x_{i-1})\frac{df}{dx}(x_i) \boxed{+ \frac{x_{i+1}^2 - x_{i-1}^2 - 2(x_{i+1} - x_{i-1})}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) + R_2(x_{i+1}) - R_2(x_{i-1})}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{df}{dx}(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

Centrée

$$\frac{df_i}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

→ <u>Question :</u> quelle est la différence en termes de précision avec les formules régulières ?

Cas d'une fonction à plusieurs variables

Dans le cas des EDP, on doit gérer des fonctions à plusieurs variables
→ Le DL se fait alors dans la direction correspondante :

Développement limité autour de x_i en x_{i+1} (maillage uniforme) :

$$f(x_{i+1}, y_j) = f(x_i, y_j) + \delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{\delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y_j) + R_2(x_{i+1}, y_j)$$

résidu

$$\frac{f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j)}{\delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j) + \boxed{\frac{\delta x}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y_j) + R_2(x_{i+1}, y_j)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j)}{\delta x}$$

Forward

Application à l'exemple

instant	t_0	t_1	t_2	…	t_n
position	f_0	f_1	f_2	…	f_n

On a les positions, on chercher les vitesses et accélérations

$$v = \frac{df}{dt}$$

On réalise les DLs autour de chaque x_i

F

$$v_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{t_{i+1} - t_i}$$

B

$$v_i \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$$

C

$$v_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 f}{dt^2}$$

On combine les bons DLs pour chaque x_i

$$a_i \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\delta t^2}$$

Résumé

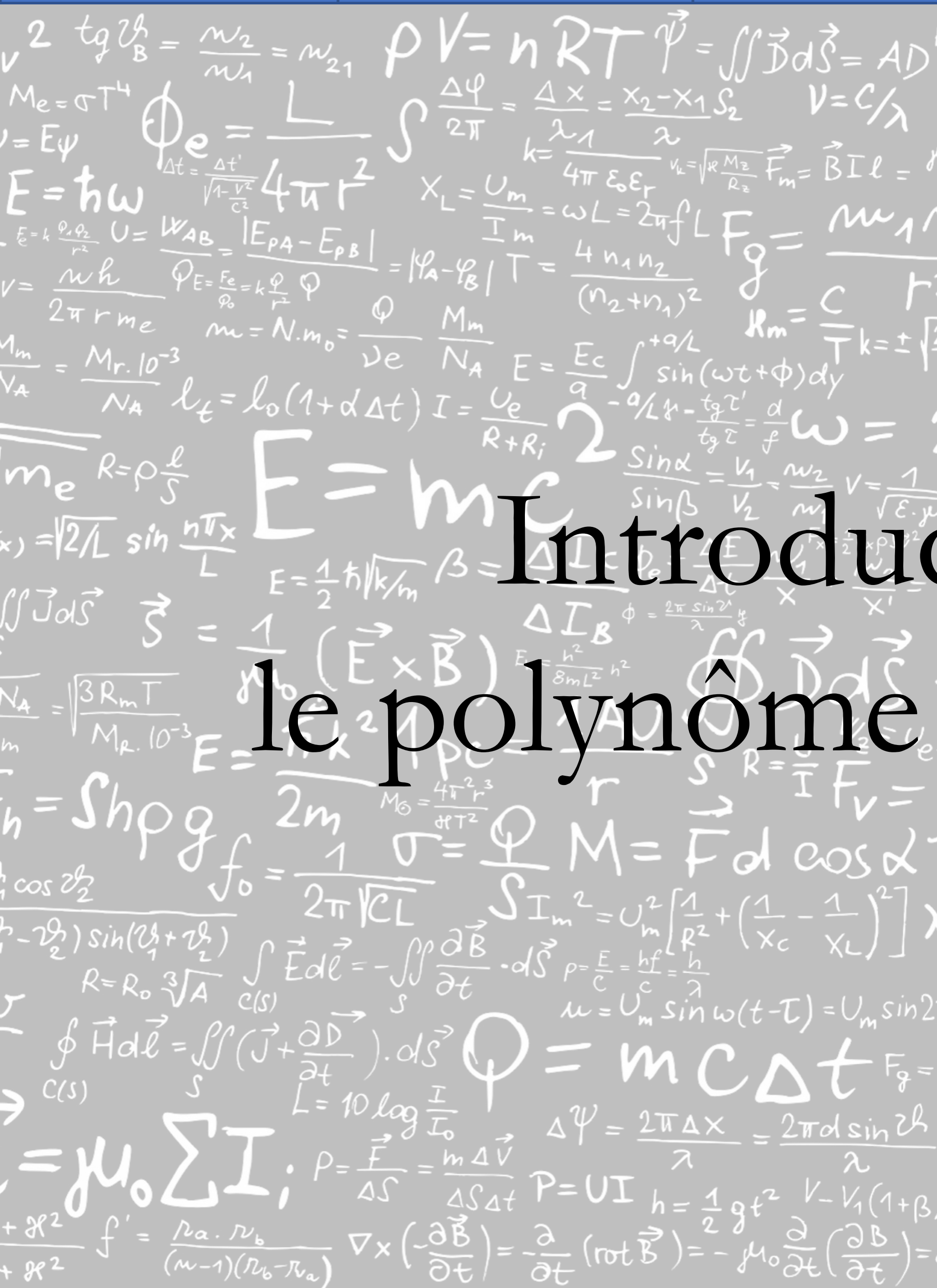
On peut approximer une dérivée
en utilisant les développements limités (DLs)

On choisit le nombre de points où calculer les DLs

On réalise la bonne combinaison linéaire pour extraire la dérivée voulue

→ On arrête les termes supplémentaires quand on a atteint la précision voulue

Avantages :
Formulation plus systématique, on contrôle mieux la précision
Inconvénients :
Difficile à écrire pour les maillages irréguliers !



Introduction via le polynôme de Lagrange

Exemple

Vous êtes un expérimentateur
et vous vous intéressez à l'étude d'un pendule au cours du temps

instant	t_0	t_1	t_2	**…**	t_n
position	f_0	f_1	f_2	…	f_n

vitesse	f'_0	f'_1	f'_2	**…**	f'_n
accélération	f''_0	f''_1	f''_2	…	f''_n

?

On sait qu'avec le polynôme de Lagrange, on peut interpoler une fonction :

$$f(x) \approx \sum_k c_k \phi_k(x)$$

→ On peut également interpoler sa dérivée ! :

$$f'(x) \approx \sum_k c_k \phi'_k(x)$$

Polynôme de Lagrange : Rappel

Le polynôme de Lagrange se définit comme suit :

$$P_L(x) = \sum_k f_k l_k\,(x)$$

Où f_k sont les valeurs connues de ma fonction à interpoler, et les fonctions $l_k(x)$:

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

$$= \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} i \neq k : l_k(x_i) = 0 \\ i = k : l_k(x_k) = 1 \end{cases} \qquad (l_k(x_i) = \delta_{ik})$$

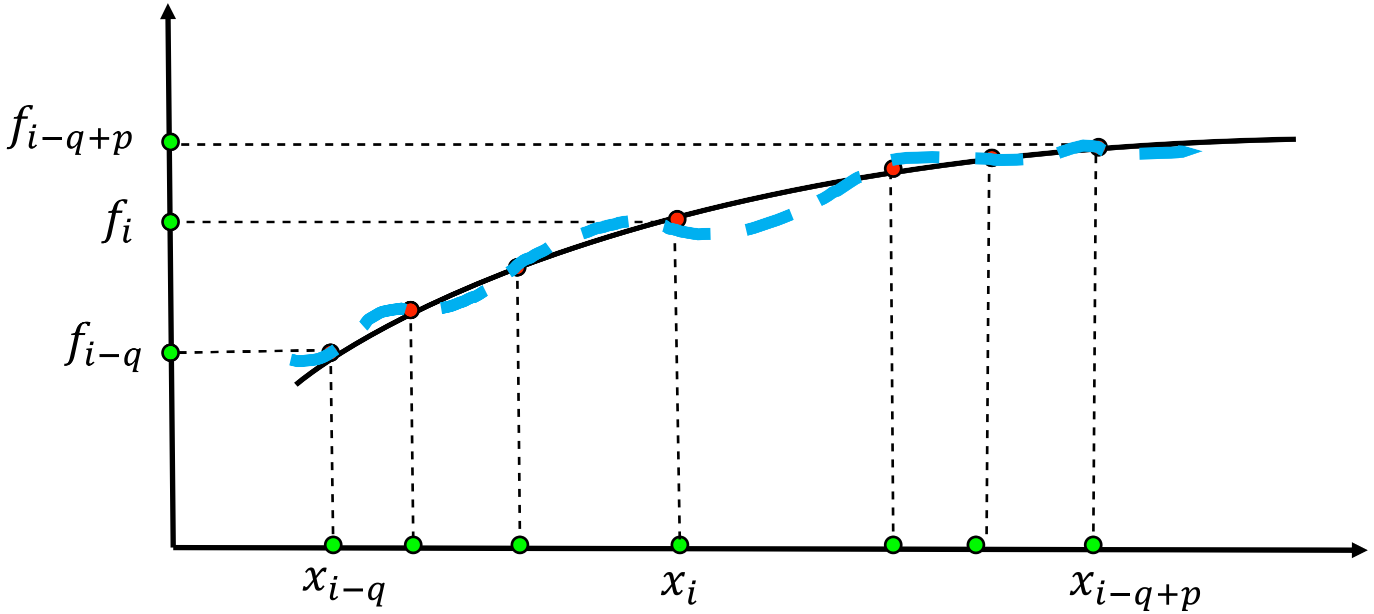
→ Le polynôme de Lagrange est l'unique polynôme d'ordre n qui passe par les n+1 points

$$\Rightarrow \quad \forall x, f(x) \approx P_L(x) \qquad \forall i, P_L(x_i) = \sum_k f_k l_k\,(x_i) = \sum_k f_k \delta_{ik} = f_i$$

Construction du polynôme

Pour obtenir une approximation en différences finies de la dérivée $\frac{df_i}{dx}$ en un point x_i

On fixe d'abord un ensemble $I = \{i-q, \dots, i, \dots, i-q+p\}$ d'indices autour de i que l'on veut voir apparaître dans les formules de différences finies



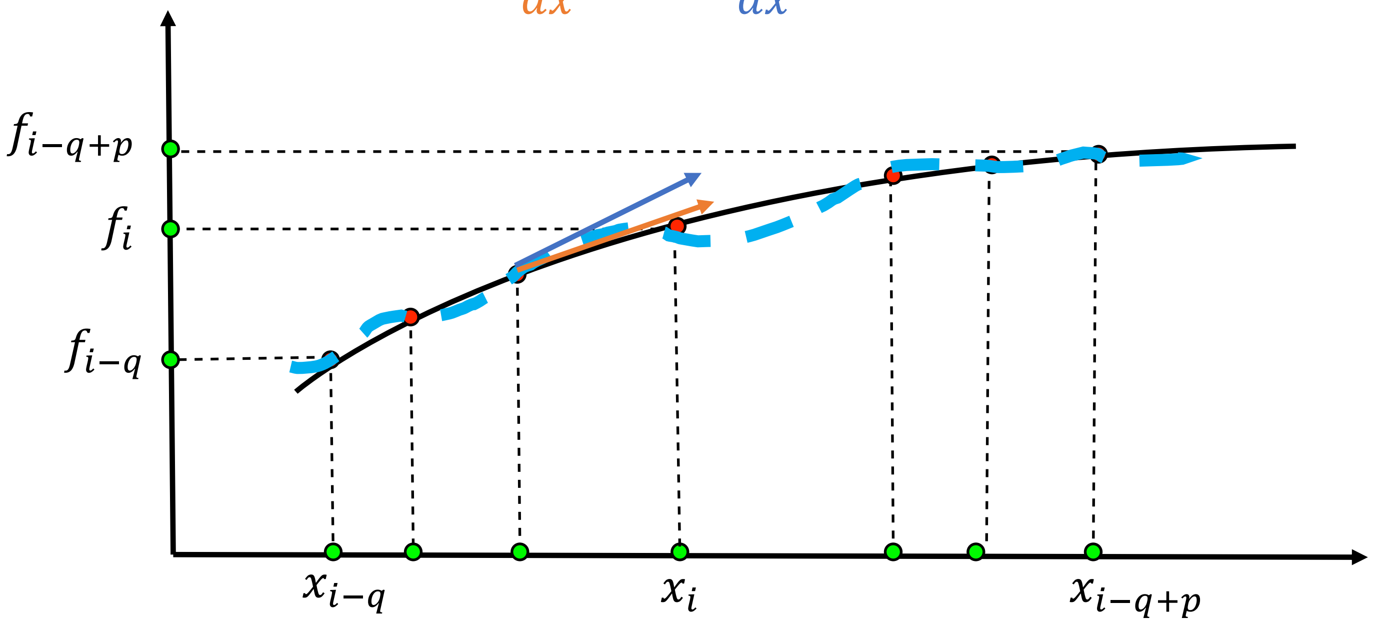
On calcule ensuite le polynôme de Lagrange passant par ces points :

$$P_L(x) = \sum_{m=0}^{p} f_{i-q+m} l_{i-q+p+m}(x)$$

Construction de la dérivée

On va enfin faire l'approximation que la dérivée de la fonction peut être approchée par la dérivée du polynôme de Lagrange :

$$\frac{df}{dx}(x_i) \approx \frac{dP_L}{dx}(x_i)$$

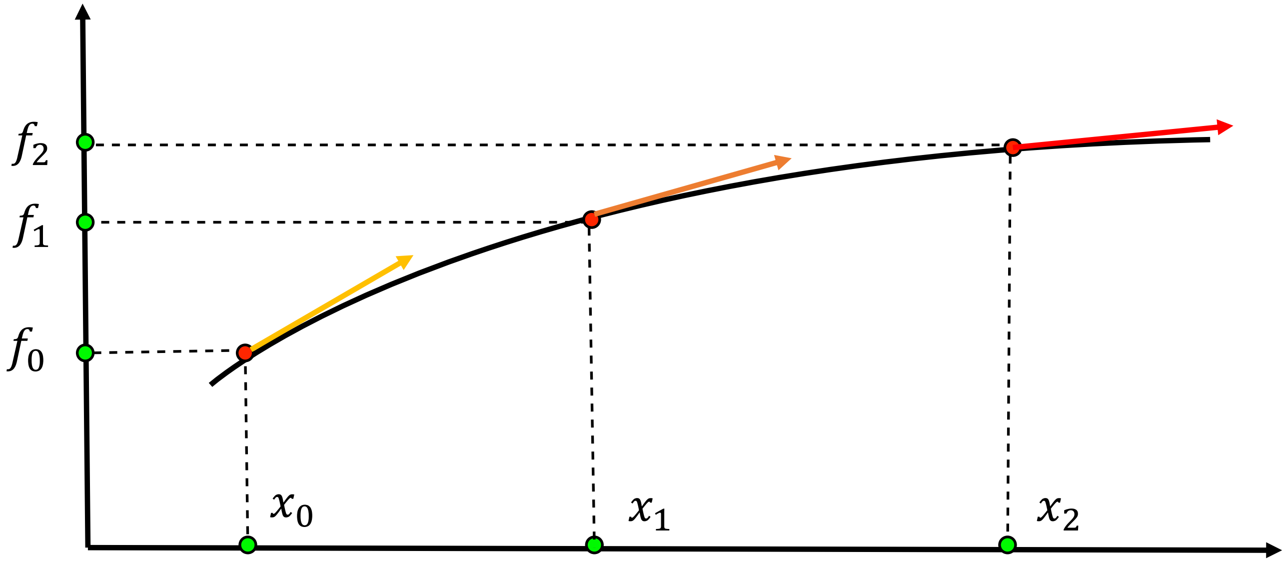


Comme le polynôme de Lagrange est un polynôme, il est facile à dériver

→ Attention ! On se souviendra tout de même de l'exemple du RER B…

Application numérique : Maillage irrégulier

Exemple : on souhaite utiliser les indices $I = \{0,1,2\}$



<u>Exercice :</u> Calculer les approximations différences finies de :

$$\frac{df_0}{dx} \qquad \frac{df_1}{dx} \qquad \frac{df_2}{dx}$$

$$P_L(x) = \sum_{m=0}^{p} f_{i-q+m} l_{i-q+m}(x) \qquad l_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

Application numérique : Maillage irrégulier

Solution générale :

$$P_L(x) = f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$\frac{dP_L}{dx}(x) = f_0 \frac{2x-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{2x-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{2x-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{df_0}{dx} \approx \frac{dP_L}{dx}(x_0) = f_0 \frac{2x_0-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$\frac{df_1}{dx} \approx \frac{dP_L}{dx}(x_1) = f_0 \frac{x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{2x_1-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$\frac{df_2}{dx} \approx \frac{dP_L}{dx}(x_2) = f_0 \frac{x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{2x_2-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

→ Que se passe-t-il si on a un maillage uniforme ? $(\forall i, x_{i+1} = x_i = \delta x)$

Application numérique : Maillage uniforme

→ Que se passe-t-il si on a un maillage uniforme ? $(\forall i, x_{i+1} = x_i = \delta x)$

Solution maillage uniforme :

$$\frac{df_0}{dx} \approx f_0 \frac{2x_0 - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{df_0}{dx} \approx \frac{1}{2\delta x}(-3f_0 + 4f_1 - f_2)$$

$$\frac{df_1}{dx} \approx f_0 \frac{x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{2x_1 - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

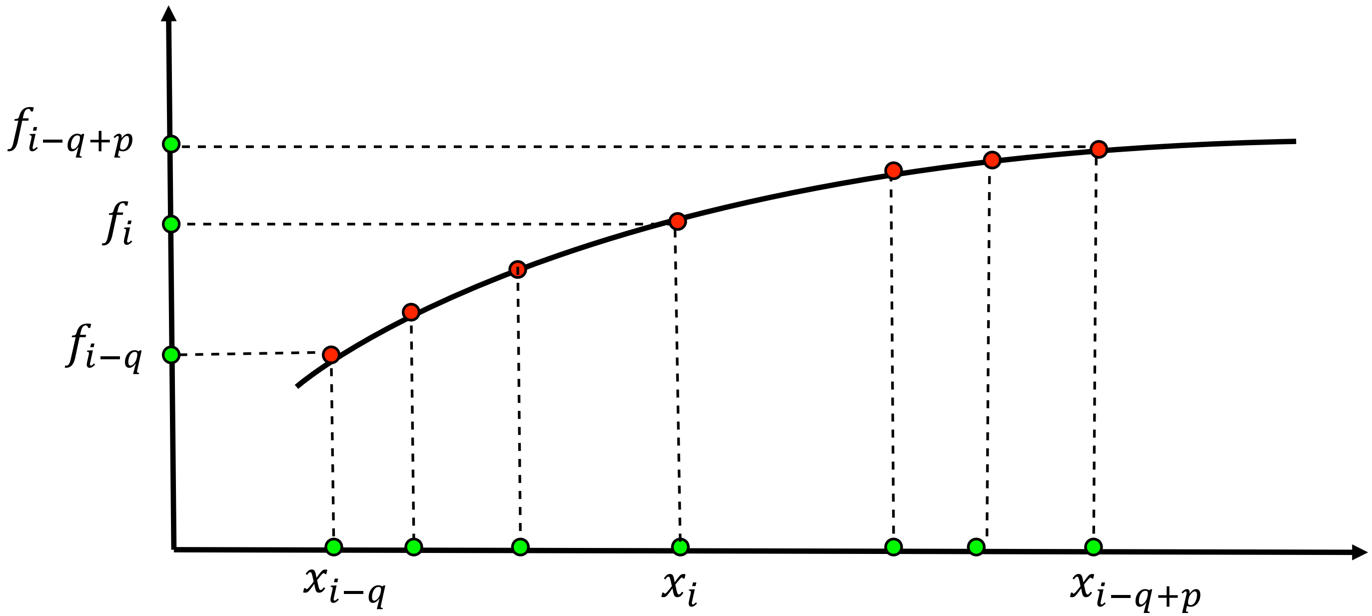
$$\Rightarrow \quad \frac{df_1}{dx} \approx \frac{1}{2\delta x}(-f_0 + f_2)$$

$$\frac{df_2}{dx} \approx f_0 \frac{x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{2x_2 - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{df_2}{dx} \approx \frac{1}{2\delta x}(f_0 - 4f_1 + 3f_2)$$

Dérivées d'ordre supérieur

Comme mon polynôme est construit sur p+1 points,
il est d'ordre p, et donc p-fois dérivable



→ On approche les dérivées de la fonction par la dérivée du polynôme d'interpolation :

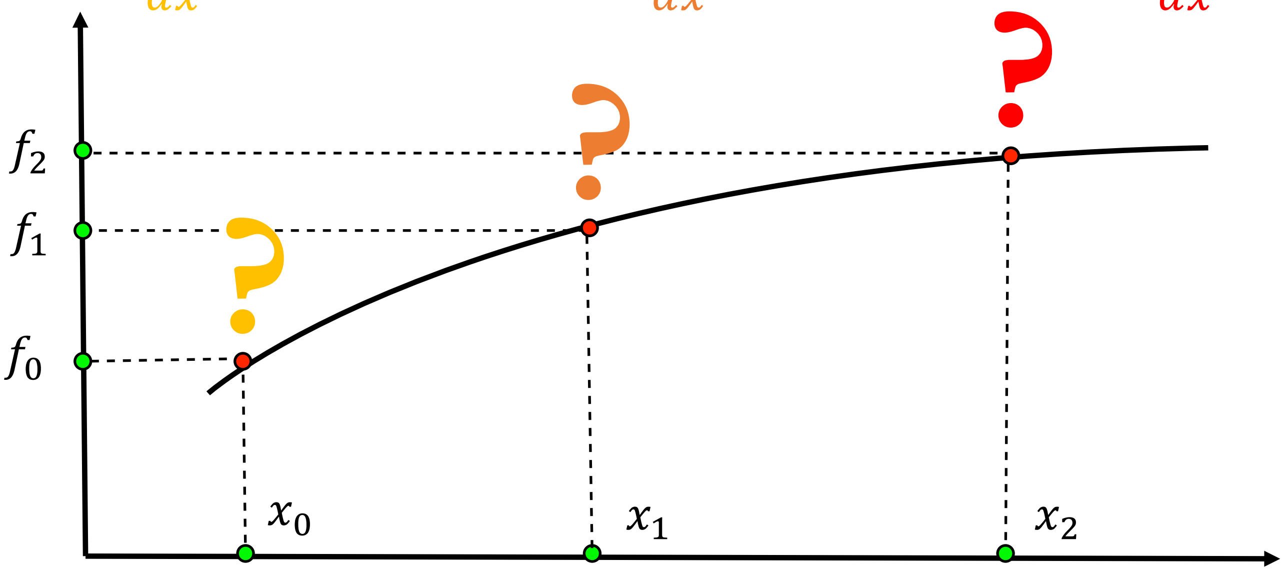
$$\frac{df}{dx}(x_i) \approx \frac{dP_L}{dx}(x_i) \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2}(x_i) \approx \frac{d^2P_L}{dx^2}(x_i) \Rightarrow \frac{d^{(p)}f}{dx^{(p)}}(x_i) \approx \frac{d^{(p)}P_L}{dx^{(p)}}(x_i)$$

Application numérique : Maillage irrégulier

Exemple : on souhaite utiliser les indices $I = \{0,1,2\}$

Exercice : Calculer les approximations différences finies de :

$\frac{d^2 f_0}{dx^2}$ $\frac{d^2 f_1}{dx^2}$ $\frac{d^2 f_2}{dx^2}$



$$\frac{dP_L}{dx}(x) = f_0 \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{2x - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Application numérique : Maillage irrégulier

Solution générale :

$$\frac{dP_L}{dx}(x) = f_0 \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{2x - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\frac{d^2P_L}{dx^2}(x) = f_0 \frac{2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\frac{d^2f_0}{dx^2} \approx \frac{d^2P_L}{dx^2}(x_0) = f_0 \frac{2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\frac{d^2f_1}{dx^2} \approx \frac{d^2P_L}{dx^2}(x_1) = f_0 \frac{2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\frac{d^2f_2}{dx^2} \approx \frac{d^2P_L}{dx^2}(x_2) = f_0 \frac{2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Question piège : que se passerait-il si on essayait de calculer la dérivée d'ordre 3 ?

Application numérique : Maillage uniforme

→ Que se passe-t-il si on a un maillage uniforme ? $(\forall i, x_{i+1} = x_i = \delta x)$

<u>Solution maillage uniforme :</u>

$$\frac{d^2 f_0}{dx^2} \approx f_0 \frac{2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d^2 f_0}{dx^2} \approx \frac{1}{\delta x^2}(f_0 - 2f_1 + f_2)$$

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} \approx f_0 \frac{2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d^2 f_1}{dx^2} \approx \frac{1}{\delta x^2}(f_0 - 2f_1 + f_2)$$

$$\frac{d^2 f_2}{dx^2} \approx f_0 \frac{2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d^2 f_2}{dx^2} \approx \frac{1}{\delta x^2}(f_0 - 2f_1 + f_2)$$

Application à l'exemple

instant	t_0	t_1	t_2	…	t_n
position	f_0	f_1	f_2	…	f_n

On a les positions, on chercher les vitesses et accélérations

$$v = \frac{df}{dt}$$

On détermine le nombre de points qu'on veut utiliser (n ?)
→ on construit le polynôme de Lagrange

$$v_i = \frac{df}{dt}(x_i) \approx \frac{dP_L}{dt}(x_i)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 f}{dt^2}$$

On continue de dérivée le polynôme de Lagrange (si on a assez de points)

$$a_i = \frac{d^2 f}{dt^2}(x_i) \approx \frac{d^2 P_L}{dt^2}(x_i)$$

Résumé

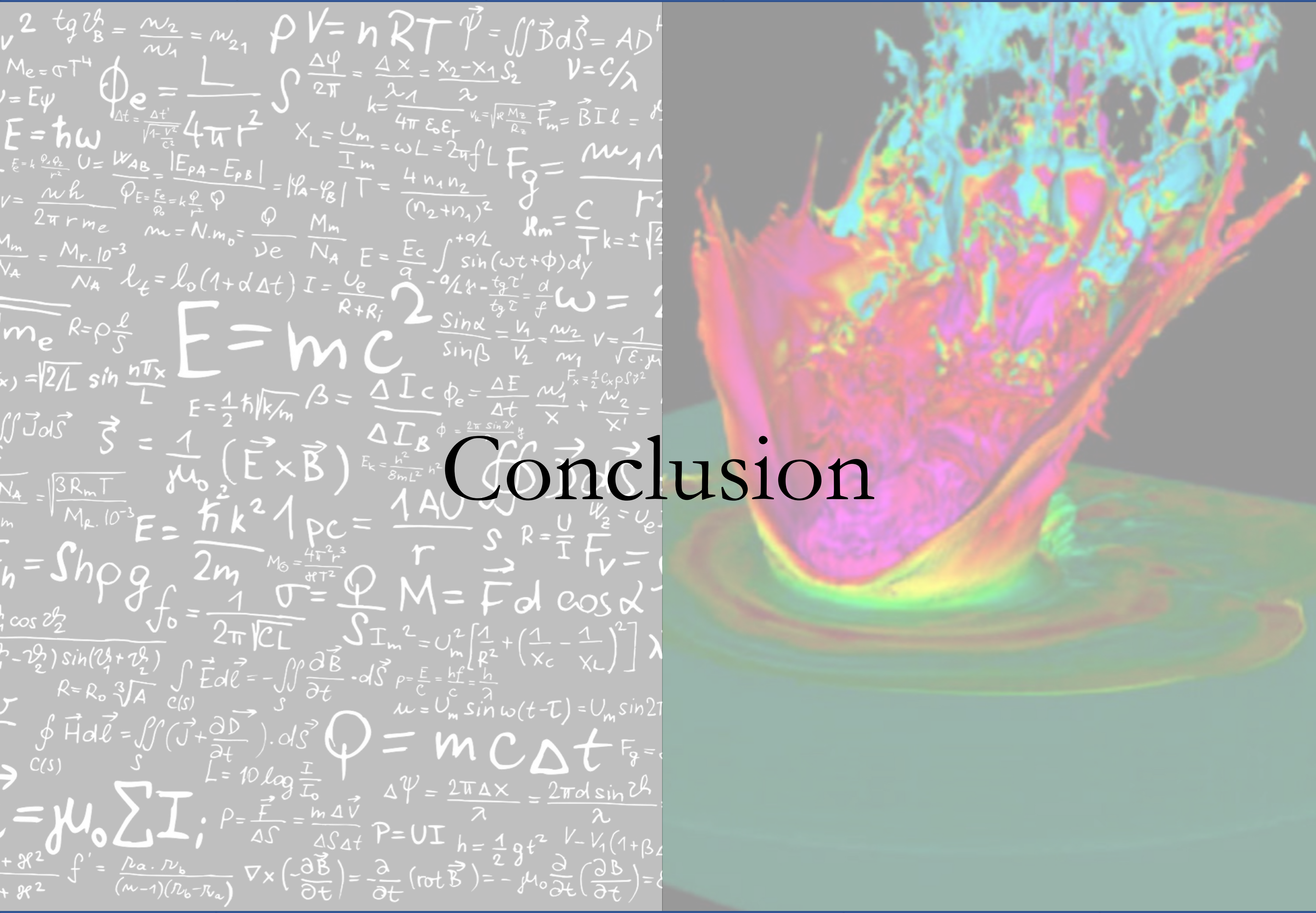
On peut approximer une dérivée
en utilisant le polynôme de Lagrange associé

On choisit le nombre de points pour construire le polynôme de Lagrange

On dérive le polynôme de Lagrange

→ Pour les dérivées d'ordre supérieur, il s'agit alors de continuer à dériver

Avantages :
Formulation systématique, toujours la même précision
Inconvénients :
Peu précis pour les dérivées d'ordre supérieur à 3



Conclusion

Récapitulatif

Pour trouver la formulation en différence finie, on peut utiliser 3 méthodes :

La tangente

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

<u>Ordres supérieurs :</u>
Combinaison de Forward, Backward et Centré

Avantages :
Facile et intuitif
Inconvénients :
Pas systématique

Les développements limités

$$\frac{df}{dx}(x_i) = \sum_{k=0}^{p} A_k f(x_{i+k})$$

<u>Ordres supérieurs :</u>
Bonne combinaison linéaire de DLs

Avantages :
Précis
Inconvénients :
Difficile

Le polynôme de Lagrange

$$\frac{df}{dx}(x_i) \approx \frac{dP_L}{dx}(x_i)$$

<u>Ordres supérieurs :</u>
Dérivation du polynôme de Lagrange

Avantages :
Systématique
Inconvénients :
Peu précis

Application à l'UE

À retenir :

- Savoir créer un schéma de différences finies (tangente, DLs ou polynôme de Lagrange),
- Savoir quelle méthode utiliser et comment les caractériser (cours suivants),
- Applications dans TP4

Plan de l'UE

Idée générale :

Au premier semestre, on va introduire les notions de base, et s'intéresser en détails à une méthode numérique précise

Tous les jeudi matin (8h45-12h45) au bâtiment 625

21 Novembre : Cours 1 + Cours 2

4 Décembre : Cours 3 + **TP 1**

5 Décembre : Cours 4 + TP 2

12 Décembre : Cours 5 + TP 3

19 Décembre : Cours 6 + TP 4

9 Janvier : Cours 7 + TP 4

16 Janvier : Cours 8 + TP 5

23 Janvier : TP 5

30 Janvier : Examen

Modalités d'évaluation :

TPs + examen oral (question de cours + exercice)