

# Méthodes Numériques

## Cours 1 :

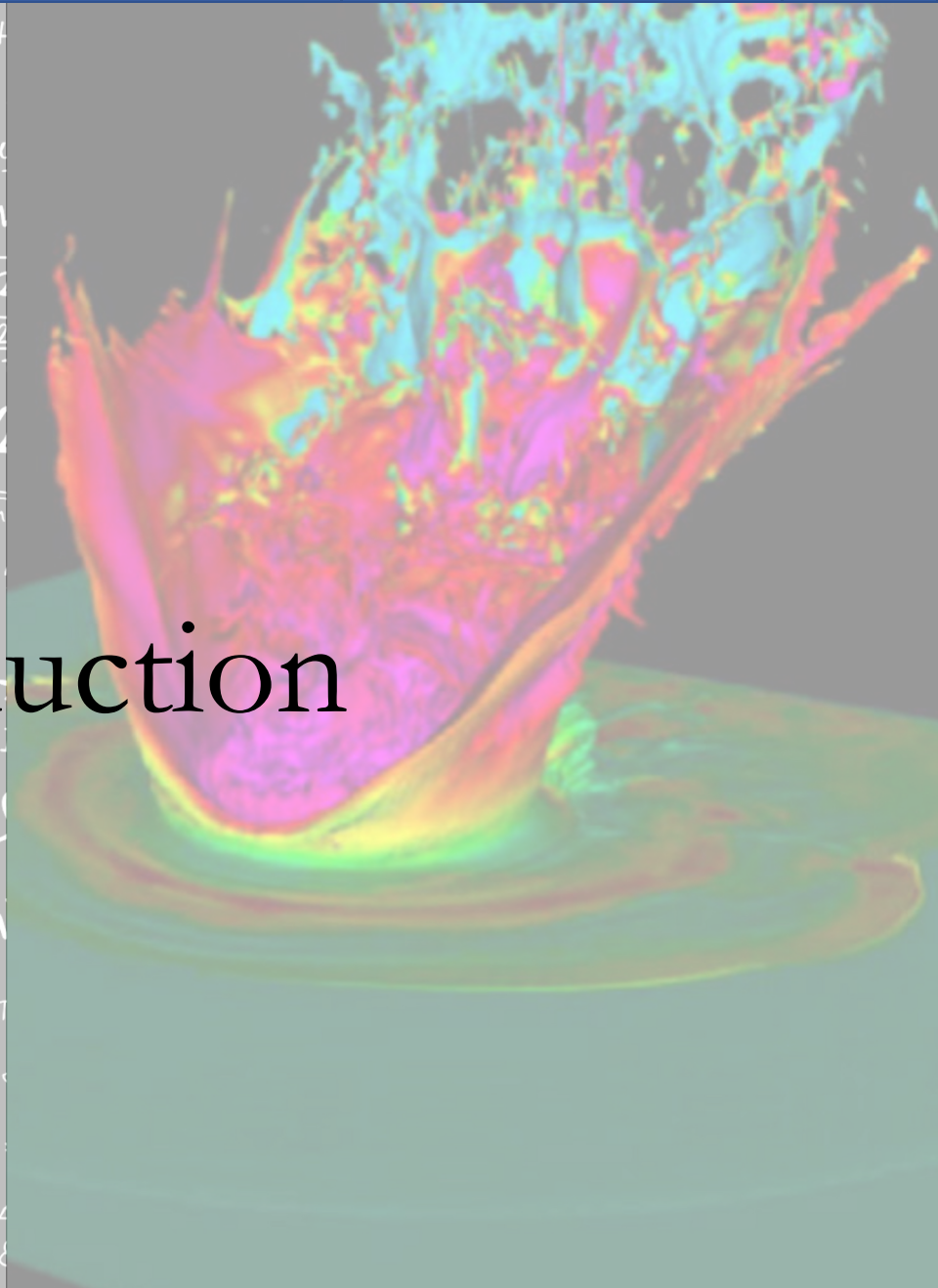
### Introduction aux méthodes numériques

Dr. Barbara PERRI

[barbara.perri@universite-paris-saclay.fr](mailto:barbara.perri@universite-paris-saclay.fr)

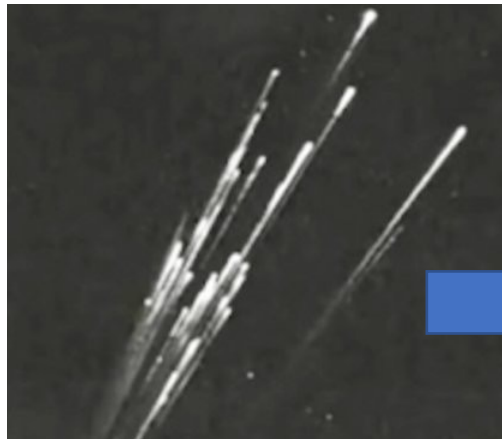
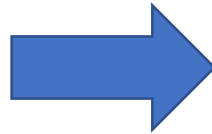
$$\begin{aligned}
 & v_2 \tan \theta_B = \frac{w_2}{w_1} = w_{21} \quad \rho V = nRT \quad \vec{\Psi} = \iint \vec{D} d\vec{S} = AD \\
 & M_e = \sigma T^4 \quad \phi_e = \frac{L}{4\pi r^2} \quad \int \frac{\Delta\psi}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \quad v = c/\lambda \\
 & \psi = E\psi \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad X_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L = 2\pi f L \quad \vec{v}_k = \sqrt{\frac{M_2}{R_2}} \quad \vec{F}_m = \vec{B} I l = \dots \\
 & E = \hbar\omega \quad U = \frac{W_{AB}}{|E_{PA} - E_{PB}|} = |\varphi_A - \varphi_B| \quad T = \frac{4 n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} \quad \vec{g} = \frac{m_1 n}{m_2 n} \\
 & \frac{M_m}{M_A} = \frac{M_r \cdot 10^{-3}}{N_A} \quad \varphi_E = \frac{E_c}{\rho_0} = k \frac{\varphi}{r} \quad m = N \cdot m_0 = \frac{\varphi}{v_e} \quad \frac{M_m}{N_A} \quad E = \frac{E_c}{a} \int_{-a/L}^{+a/L} \sin(\omega t + \phi) dy \\
 & \frac{M_m}{N_A} = \frac{M_r \cdot 10^{-3}}{N_A} \quad l_t = l_0(1 + d \Delta t) \quad I = \frac{U_e}{R + R_i} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{w_2}{w_1} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}} \\
 & \overline{m_e} \quad R = \rho \frac{l}{S} \quad E = mc^2 \quad \beta = \frac{\Delta I_c}{\Delta I} \quad \phi_e = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad \frac{M_1}{X} + \frac{M_2}{X'} = \dots \\
 & \psi(x) = \sqrt{2/L} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad E = \frac{1}{2} \hbar v / k/m \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad E_k = \frac{1}{2} \frac{v^2}{8mL^2} \\
 & \iint \vec{J} d\vec{S} \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad \Delta I_c = \frac{h^2}{8mL^2} \\
 & \frac{N_A}{m} = \sqrt{\frac{3R_m T}{M_r \cdot 10^{-3}}} \quad E = \hbar k^2 \quad 1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ AU}}{r} \quad S = \frac{U}{I} \quad \psi_2 = U_e \\
 & h = Shp g \quad f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{CL}} \quad \sigma = \frac{Q}{M} \quad M = F d \cos \alpha \\
 & \cos \theta_2 \quad \int \vec{E} d\vec{l} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \rho = \frac{E}{c} = \frac{hf}{\lambda} = \frac{h}{\lambda} \\
 & R = R_0 \sqrt[3]{A} \quad \oint \vec{H} d\vec{l} = \iint (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad \Phi = m c \Delta t \quad F_g = \dots \\
 & \vec{H} = \mu_0 \sum \vec{I}; \quad \rho = \frac{\vec{F}}{\Delta S} = \frac{m \Delta v}{\Delta S \Delta t} \quad \Delta \psi = \frac{2\pi \Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} \\
 & \frac{+g^2}{+g^2} \quad f' = \frac{v_a \cdot v_b}{(v-1)(v_0 - v_a)} \quad \nabla \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \dots
 \end{aligned}$$

# Introduction

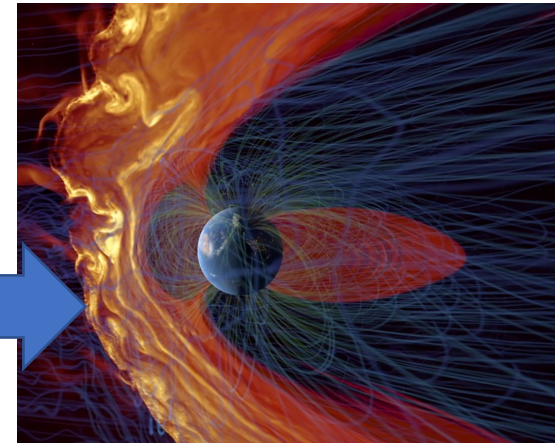


# Que sont les méthodes numériques ?

Les méthodes numériques permettent de communiquer à un ordinateur un problème physique pour le résoudre informatiquement et produire une solution



$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] &= 0 \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{B} \mathbf{B} + \mathbf{P}^*] &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + \mathbf{P}^*) \mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})] &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) &= 0 \\ \mathbf{P}^* &= P + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \\ E &= P/(\gamma - 1) + \frac{\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}\end{aligned}$$





# Pourquoi les méthodes numériques ?

Les méthodes numériques interviennent quand on ne peut pas trouver de solution analytique à une équation/un système d'équations :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{B} \mathbf{B} + P^*] = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + P^*) \mathbf{v} - \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})] = 0$$

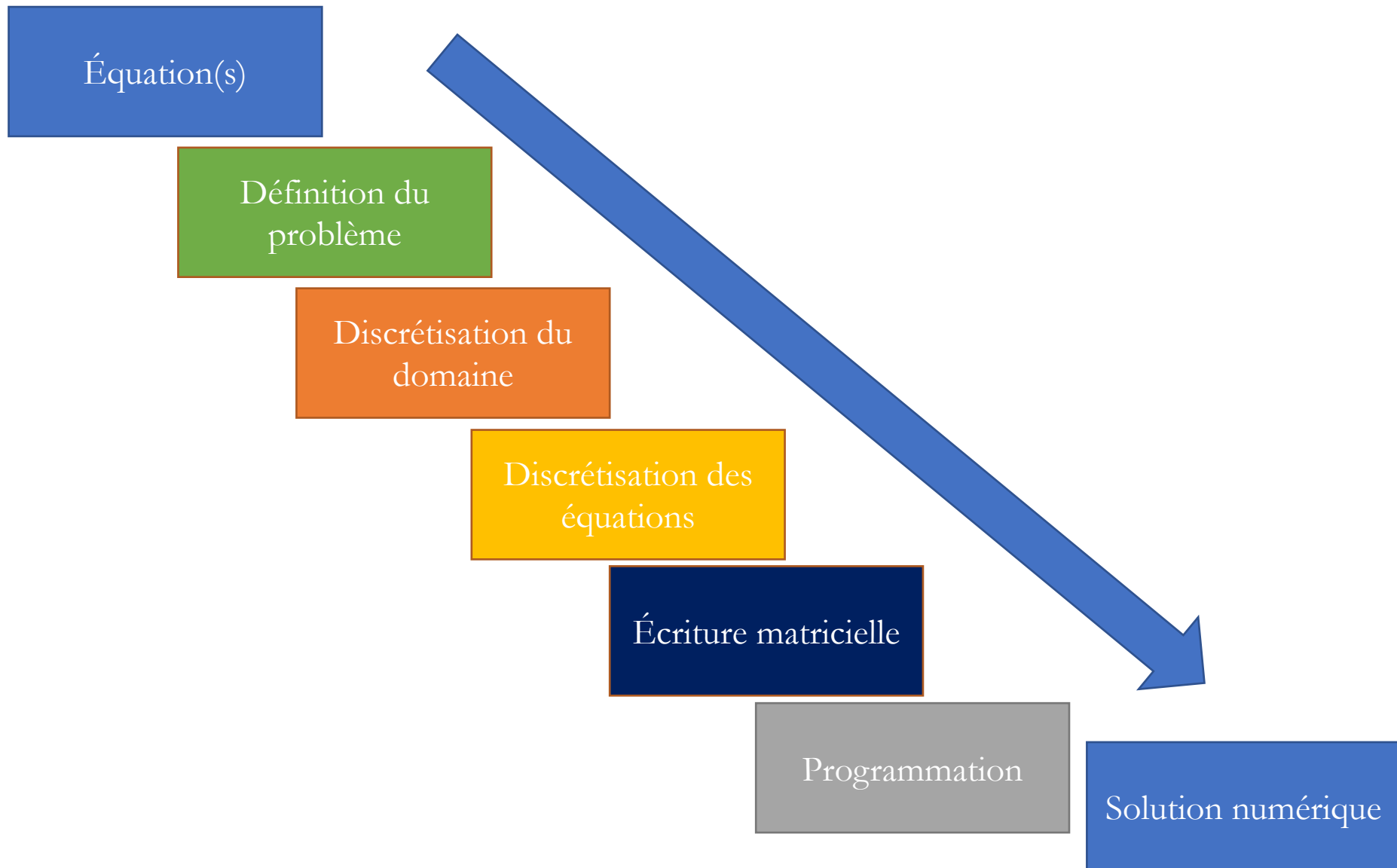
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$$

$$P^* = P + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}$$

$$E = P/(\gamma - 1) + \frac{\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}$$

- Le système est trop difficile à résoudre à la main,
  - Il n'existe pas de solution unique,
  - Il n'existe pas de solution analytique,
  - Il n'existe pas de solution stable,
- L'équation est dite raide (paramètres très sensibles),
  - Le système est chaotique,
  - Etc.

# Cycle des méthodes numériques



# Plan de l'UE

## Idée générale :

Au premier semestre, on va introduire les notions de base, et s'intéresser en détails à une méthode numérique précise

Tous les jeudi matin (8h45-12h45) au bâtiment 625

21 Novembre : Cours 1 + Cours 2

4 Décembre : Cours 3 + TP 1

5 Décembre : Cours 4 + TP 2

12 Décembre : Cours 5 + TP 3

19 Décembre : Cours 6 + TP 4

9 Janvier : Cours 7 + TP 4

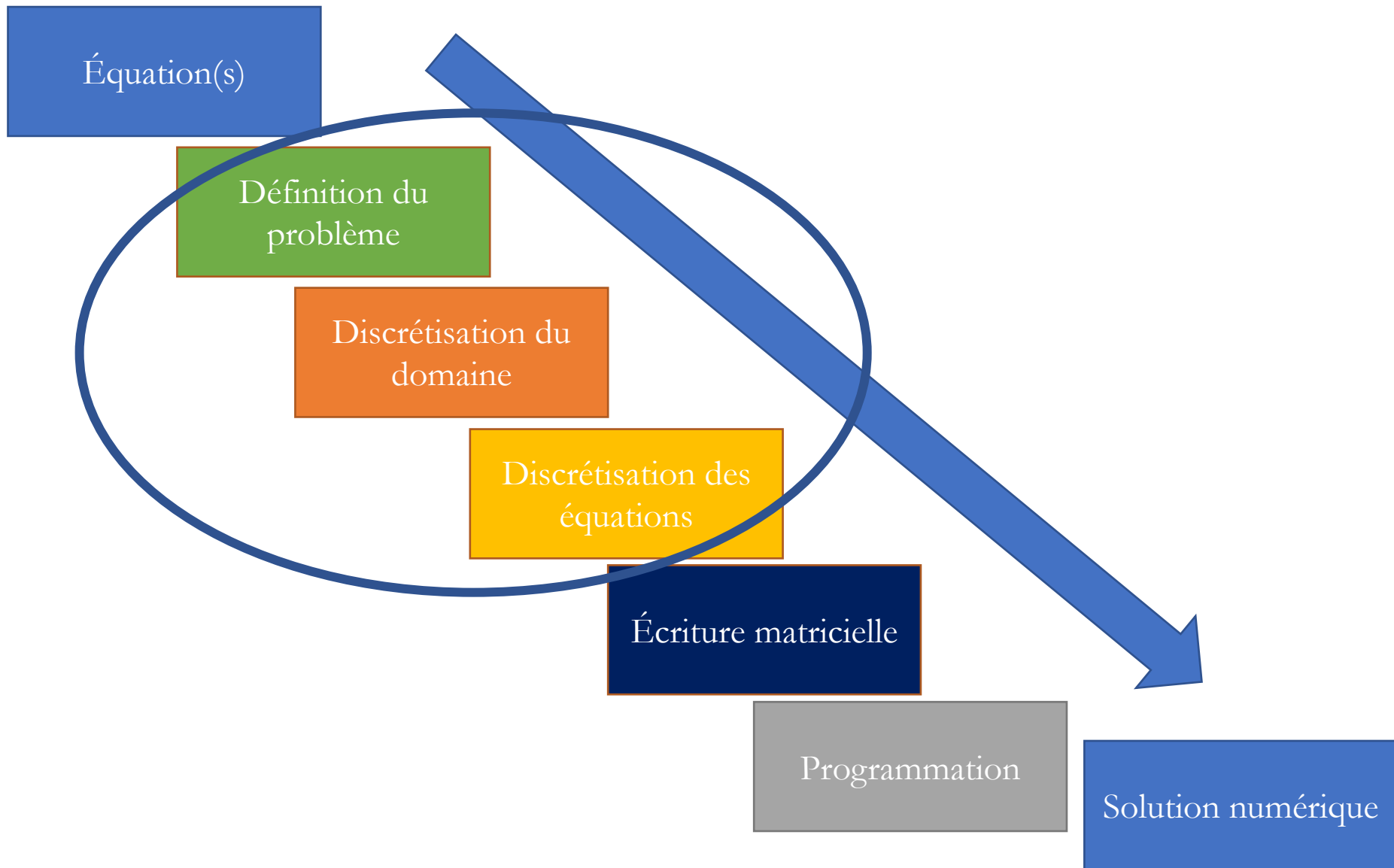
16 Janvier : Cours 8 + TP 5

23 Janvier : TP 5

30 Janvier : Examen

→ À la fin de l'UE, vous serez capable de coder vous-mêmes un solveur pour une équation de type Navier-Stokes !

# Cycle des méthodes numériques



$$v_2 \tan \theta_B = \frac{w_2}{w_1} = w_{21} \quad \rho V = nRT \quad \vec{\psi} = \iint \vec{D} d\vec{S} = AD$$

$$M_e = \sigma T^4 \quad \phi_e = \frac{L}{4\pi r^2} \quad \int \frac{\Delta\psi}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \quad v = c/\lambda$$

$$j = E\psi \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad X_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L = 2\pi f L \quad \vec{v}_k = \sqrt{\frac{M_z}{R_z}} \quad \vec{F}_m = \vec{B} I l = \dots$$

$$E = h\nu \quad U = \frac{W_{AB}}{|E_{PA} - E_{PB}|} = \frac{V_A - V_B}{|T|} = \frac{4 n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} \quad \vec{g} = \frac{m_1 n}{m_2 n}$$

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad \phi_e = \frac{E_e}{r} = k \frac{Q}{r} \quad m = N \cdot m_0 = \frac{Q}{v_e} \frac{M_m}{N_A} \quad E = \frac{E_c}{a} \int_{-a/L}^{+a/L} \sin(\omega t + \phi) dy$$

$$M_m = \frac{M_r \cdot 10^{-3}}{N_A} \quad l_t = l_0(1 + d \Delta t) \quad I = \frac{U_e}{R + R_i} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{w_2}{w_1} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}$$

$$m_e \quad R = \rho \frac{l}{S} \quad E = mc^2 \quad \beta = \frac{\Delta I_c}{\Delta I} \quad \phi_e = \frac{\Delta E}{\Delta t} \frac{w_1}{x} + \frac{w_2}{x'} = \dots$$

$$x) = \sqrt{2/L} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad E = \frac{1}{2} \hbar \omega \quad \vec{s} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} \quad \vec{F}_x = \frac{1}{2} c_x \rho \delta^2$$

$$\iint \vec{J} d\vec{S} \quad \vec{s} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} \quad \vec{F}_x = \frac{1}{2} c_x \rho \delta^2$$

$$N_A = \sqrt{\frac{3R_m T}{M_r \cdot 10^{-3}}} \quad E = \hbar k^2 \quad pc = \frac{h\nu}{\lambda} \quad \vec{R} = \frac{U}{I} \quad \vec{F}_v = \dots$$

$$h = Shp g \quad f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad \sigma = \frac{Q}{M} = \frac{F d \cos \alpha}{M} \quad \vec{S} I_m^2 = U_m^2 \left[ \frac{1}{R^2} + \left( \frac{1}{X_c} - \frac{1}{X_L} \right)^2 \right] \lambda$$

$$\cos \theta_2 \quad R = R_0 \sqrt[3]{A} \quad \int \vec{E} d\vec{l} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \rho = \frac{E}{c} = \frac{hf}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

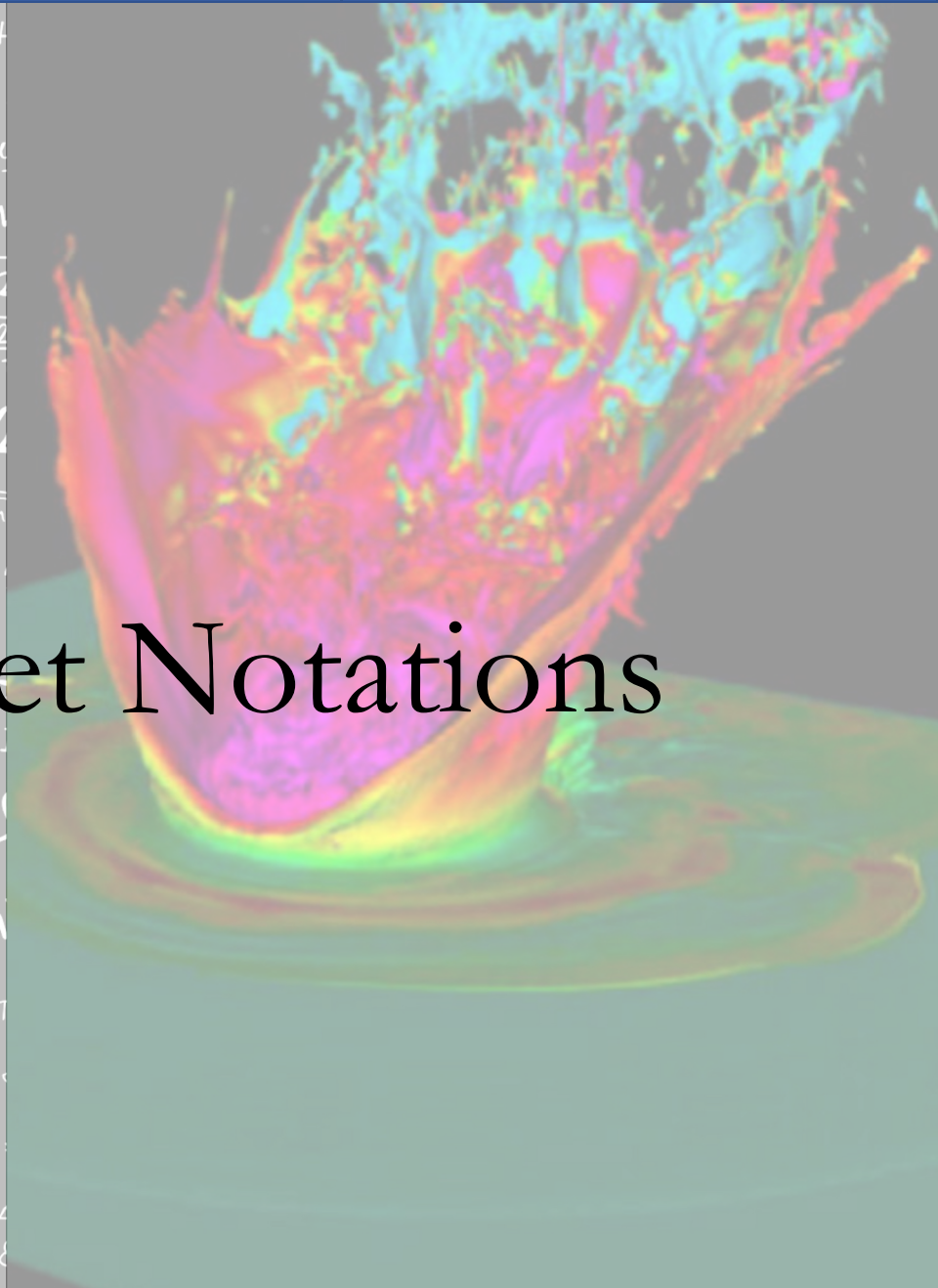
$$\vec{H} d\vec{l} = \iint (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad \omega = U_m \sin \omega(t - T) = U_m \sin 2\pi$$

$$\vec{H} d\vec{l} = \iint (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad \Phi = m c \Delta t \quad F_g = \dots$$

$$= \mu_0 \sum I_i \quad \rho = \frac{F}{\Delta S} = \frac{m \Delta v}{\Delta S \Delta t} \quad \Delta \psi = \frac{2\pi \Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad f' = \frac{n_a \cdot n_b}{(n-1)(n_0 - n_a)} \quad \nabla \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \dots$$

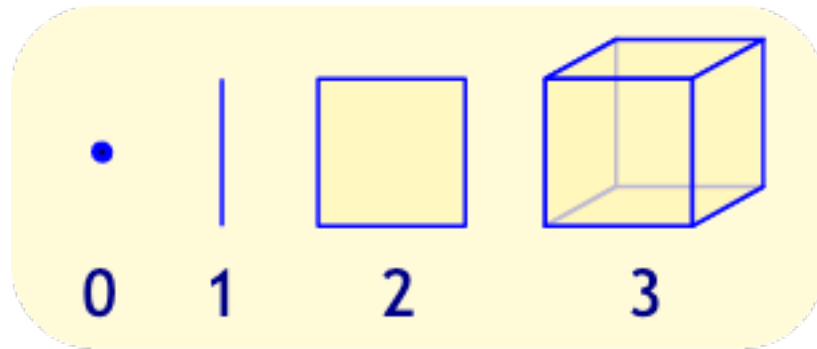
# Définitions et Notations





# Systeme de coordonnees

Pour definir un probleme, il faut le nombre de dimensions spatiales utilisees  
(le temps ne possede qu'une seule variable  $t$ )



Dimensions

$$x \in [0, L]$$

$$x \in [0, L_x]$$

$$y \in [0, L_y]$$

$$y \in [0, L_y]$$

$$z \in [0, L_z]$$

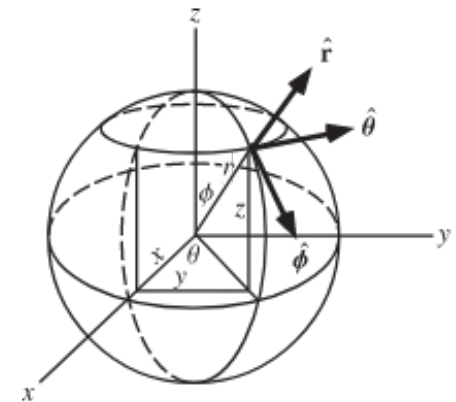
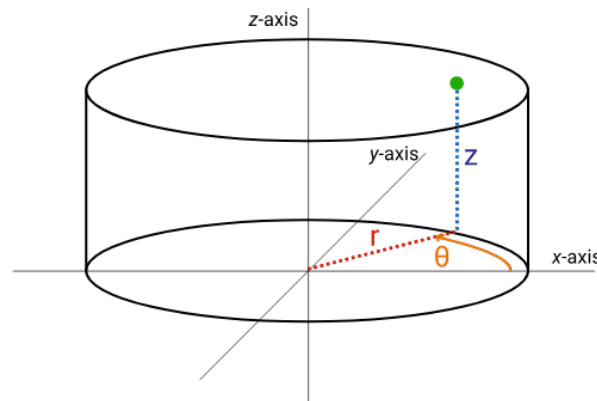
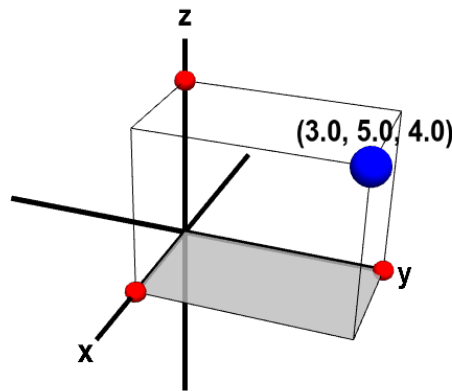
$$z \in [0, L_z]$$

On definit ensuite le systeme de coordonnees qu'on souhaite utiliser :

Cartesien :  $\vec{x} = (x, y, z)$

Cylindrique :  $\vec{x} = (r, \theta, z)$

Spherique :  $\vec{x} = (r, \theta, \varphi)$

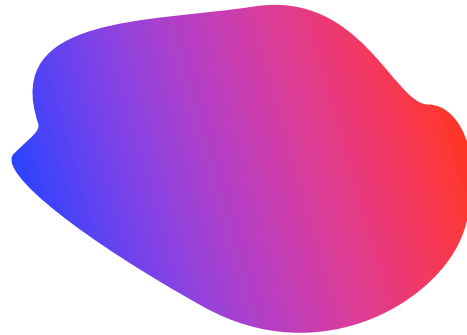


# Grandeurs physiques

On définit ensuite les grandeurs physiques à étudier, qui se présentent sous 3 formes :

Champ scalaire :

$$(t, \vec{x}) \mapsto f(t, \vec{x})$$

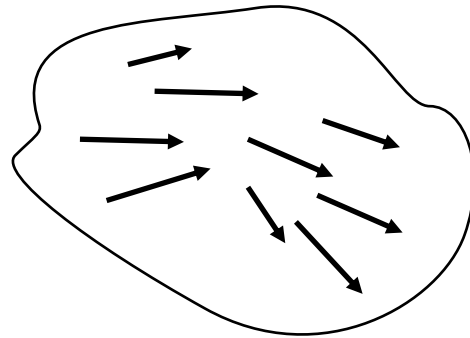


Exemples :

Température  $T$ ,  
Concentration  $C$ ,  
Fonction d'onde  $\Psi$

Champ vectoriel :

$$(t, \vec{x}) \mapsto \vec{f}(t, \vec{x}) \\ = (f_x, f_y, f_z)$$

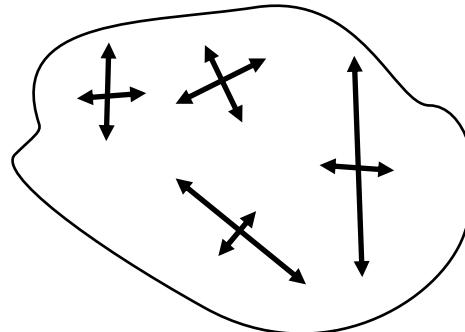


Exemples :

Vitesse  $\vec{v}$ ,  
Champ magnétique  $\vec{B}$

Champ tensoriel :

$$(t, \vec{x}) \mapsto \vec{\vec{f}}(t, \vec{x}) \\ = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$



Exemples :

Déformation  $\vec{\vec{\epsilon}}$ ,  
Contrainte  $\vec{\vec{\sigma}}$

# Équations (I)

Une équation est une relation contenant des inconnues et des paramètres :

$$x^2 = 2x + a$$

Un système d'équations est un ensemble d'équations utilisant les mêmes inconnues :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Une équation est dite différentielle quand son inconnue est une fonction dérivable :

$$f' + f = g$$

En méthodes numériques, on s'intéresse à deux grandes familles :

## Équations différentielles ordinaires (EDO)

= les inconnues ne dépendent que d'une seule variable

$$\frac{df(x)}{dx} + f(x) = g(x)$$

## Équations aux dérivées partielles (EDP)

= les inconnues peuvent dépendre de plusieurs variables

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + f(x, t) = g(x, t)$$

# Équations (II)

Dans ce cours, voici les types d'équations qui seront discutés :

**Équation homogène :**  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$   $\rightarrow$  Le terme source vaut 0

$\rightarrow$  Le contraire = équations à terme source

**Équation linéaire :**  $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V\Psi$   $\rightarrow$  On peut appliquer des superpositions de solutions

$\rightarrow$  Le contraire = équations non linéaires (ex : polynomiales)

**Équation stationnaire :**  $\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$   $\rightarrow$  Équation qui ne dépend pas du temps

$\rightarrow$  Le contraire = équations instationnaires

# Équations (III)

Il existe d'autres grandes familles d'équation :

**Équation elliptique :**  $\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$   $\rightarrow$  C'est un problème aux valeurs propres non nulles et de même signe

**Équation parabolique :**  $\frac{\partial T}{\partial t} - D\Delta T + \frac{S}{\rho C_p} = 0$   $\rightarrow$  C'est un problème aux valeurs propres non nulles et de même signe (sauf 1)

**Équation hyperbolique :**  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u = 0$   $\rightarrow$  La solution a des propriétés ondulatoires



# Opérateurs

Les équations font souvent apparaître des opérateurs différentiels :

**Opérateur différentiel Nabla :**  $\vec{\nabla}$

$$\text{ex : } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Opérateurs d'une fonction scalaire :

**Gradient :**

$$\vec{\nabla} f(t, \vec{x}) \quad (df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{x})$$

$$\text{ex : } \vec{\nabla} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

**Laplacien :**

$$\vec{\nabla}^2 f(t, \vec{x}) = \Delta f(t, \vec{x})$$

$$\text{ex : } \vec{\nabla}^2 f = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$$

Opérateurs d'une fonction vectorielle :

**Divergence :**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(t, \vec{x})$$

$$\text{ex : } \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \left( \frac{\partial f_x}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial y}, \frac{\partial f_z}{\partial z} \right)$$

**Rotationnel :**

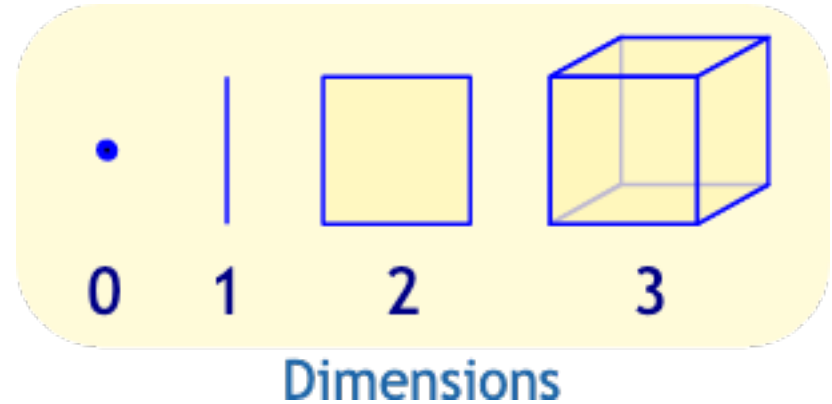
$$\vec{\nabla} \times \vec{f}(t, \vec{x}) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{f}(t, \vec{x})$$

$$\text{ex : } \vec{\nabla} \times \vec{f} = \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right)$$

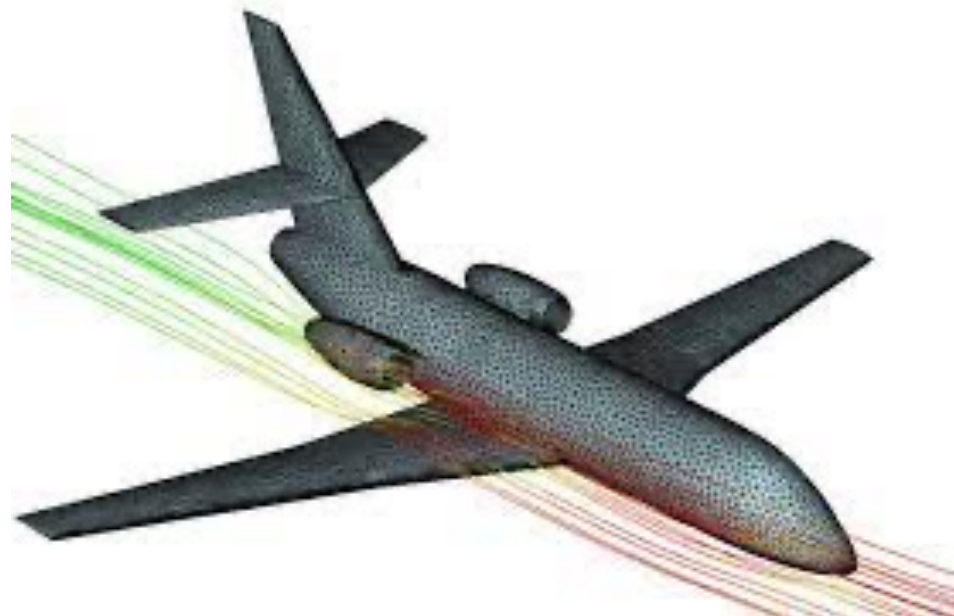
# Définition du domaine spatial

Il faut définir le domaine spatial dans lequel on souhaite résoudre l'équation :

Nombre de dimensions



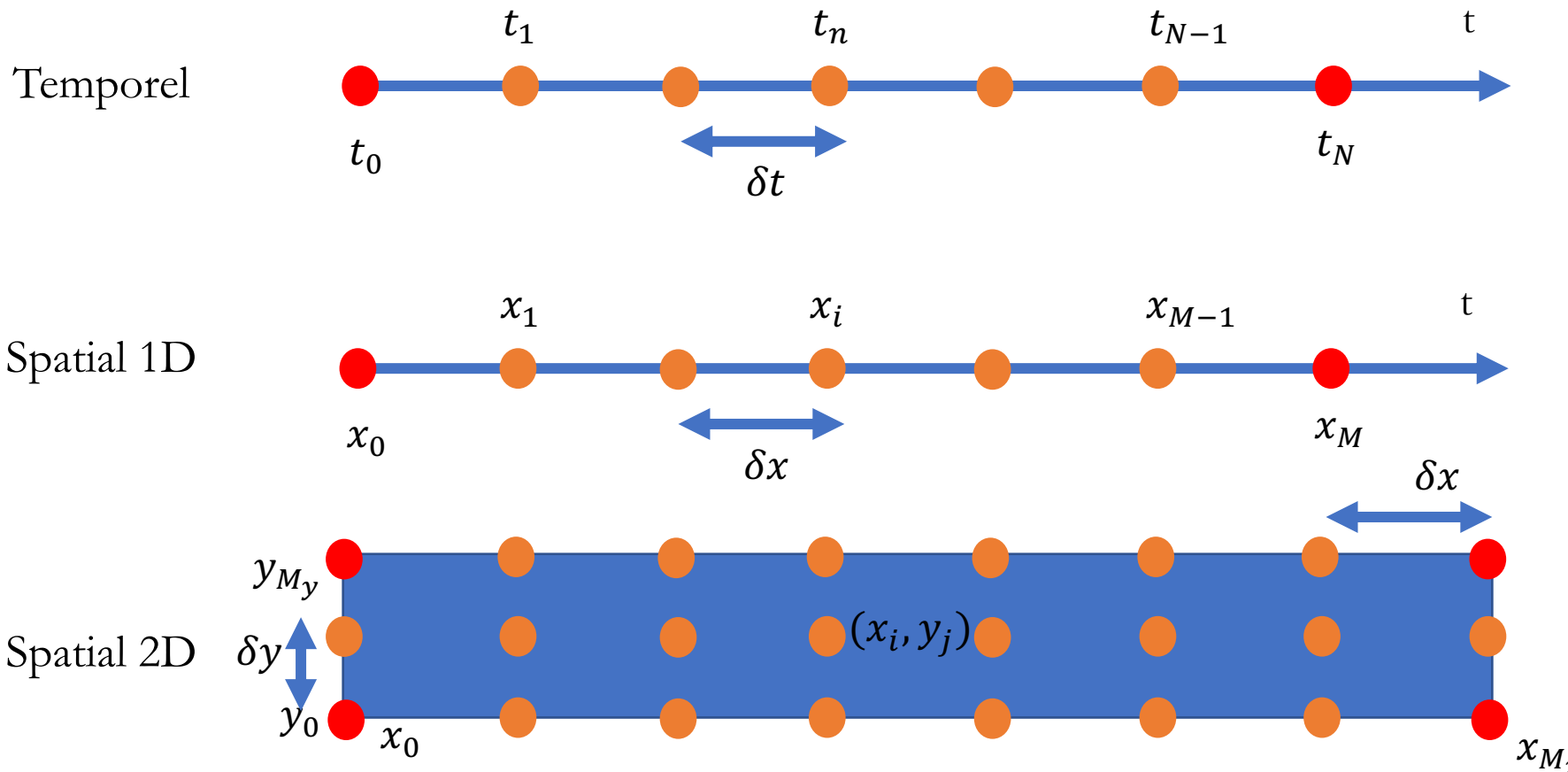
Géométrie



Taille

# Discrétisation du domaine

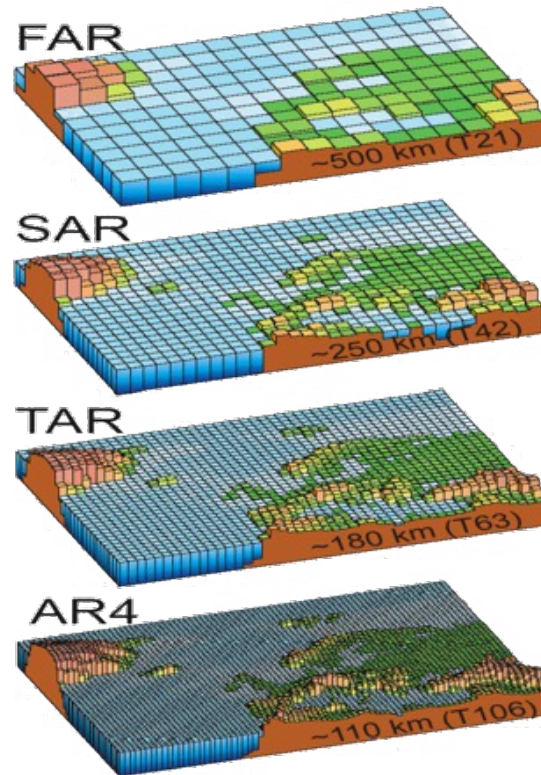
Un ordinateur ne comprend pas l'analogique et le continu  
 → il faut discrétiser le domaine spatial et le domaine temporel :



→ On appelle maillage l'ensemble des  $M+1$  points d'espace/ $N+1$  points de temps :  
 ex :  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_M = L$

# Résolution d'un maillage

La résolution d'un maillage est déterminée par le nombre de points utilisés pour le construire



## Avantages :

Plus un maillage est résolu, plus la solution sera proche de la réalité car plus complète

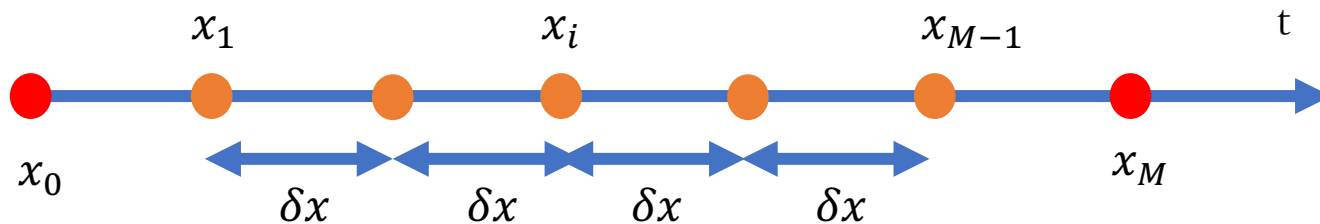
## Inconvénients :

Augmenter la résolution a un coût mathématique et numérique

# Maillage uniforme

Un maillage est dit uniforme (ou régulier) quand l'espacement entre les points du maillage est toujours le même :

$$\delta x = \text{constante}$$



$$\Rightarrow \delta x = \frac{x_M - x_0}{M + 1}$$

## Avantages :

Maillage facile à construire, formulations plus simples

## Inconvénients :

Très coûteux d'augmenter la résolution

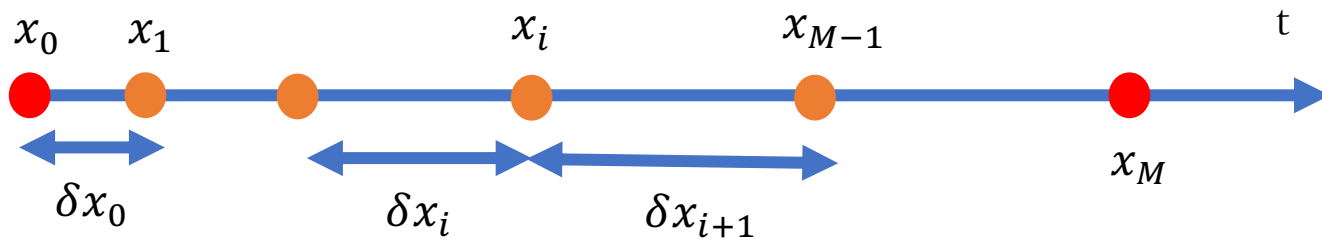


# Maillage irrégulier

Un maillage est dit irrégulier quand l'espacement entre les points du maillage est différent entre chaque point :

$$\delta x_i \neq \delta x_{i+1}, \forall i \in [0, M - 1]$$

Stretched  
(étiré)



$$\Rightarrow \delta x_{i+1} = r \delta x_i, r \frac{1 - r^{M+1}}{1 - r} = \frac{x_M - x_0}{\delta x_0}$$

**Avantages :**

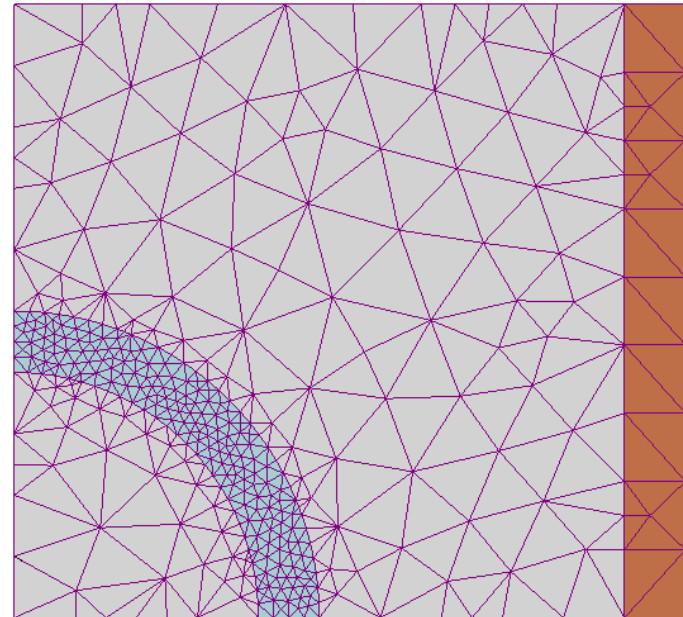
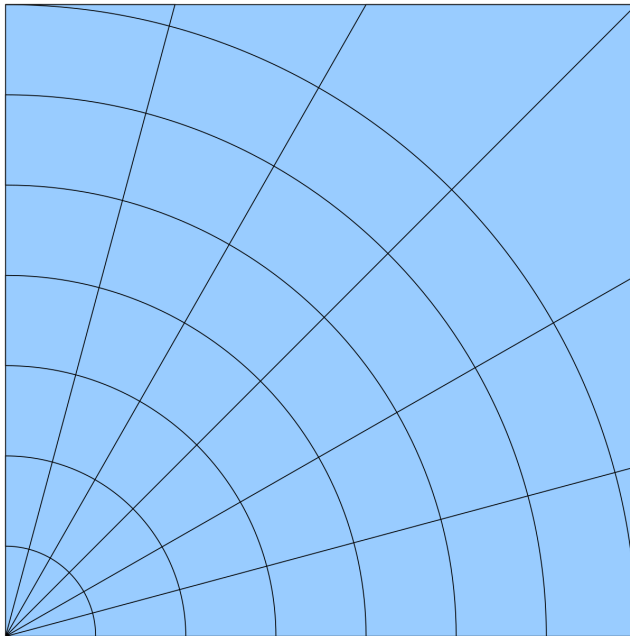
Maillage plus flexible, moins coûteux

**Inconvénients :**

Plus difficile à calculer, frontières plus dures à placer, formulations plus complexes

# Maillage non structuré

Un maillage est dit non structuré quand en plus des positions des points, il est nécessaire d'indiquer leur connectivité :



## Avantages :

Permet de s'adapter à des géométries plus complexes

## Inconvénients :

Maillage très difficile à calculer (logiciel), méthodes numériques différentes

# Définition des bords du domaine

On doit également être capable de définir les bords du domaine  $\delta D$  :

Domaine ouvert =  $\delta D$  à l'infini

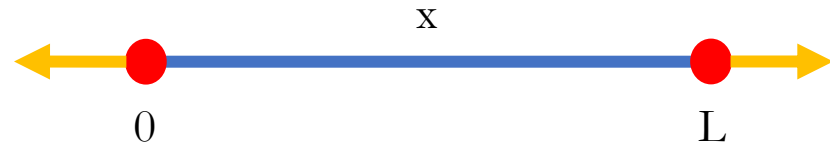
On notera  $\vec{n}$  la normale unitaire sortante du bord d'un domaine fermé

Segment 1D

$\delta D$  : 2 points

Gauche :  $x = 0$

Droite :  $x = L$



Rectangle 2D

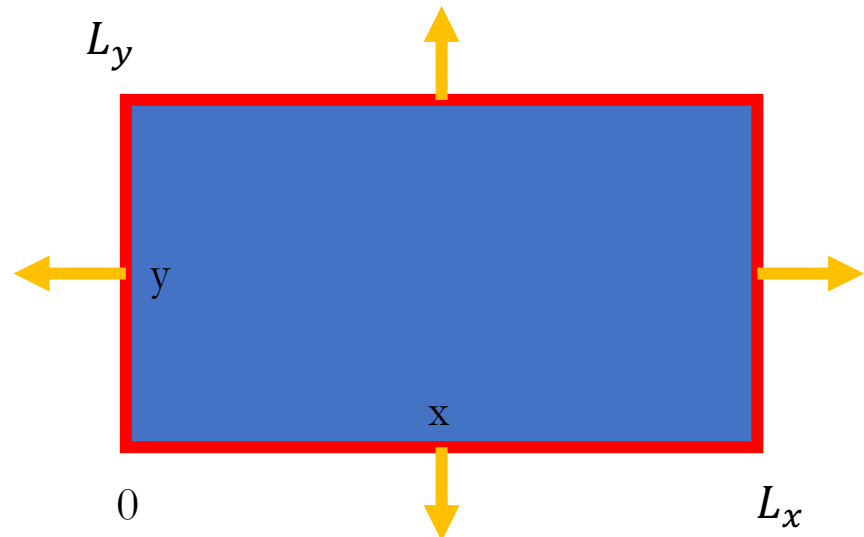
$\delta D$  : Union de 4 segments

Bas :  $(x, 0), \forall x \in [0, L_x]$

Haut :  $(x, L_y), \forall x \in [0, L_x]$

Gauche :  $(0, y), \forall y \in [0, L_y]$

Droite :  $(L_x, y), \forall y \in [0, L_y]$



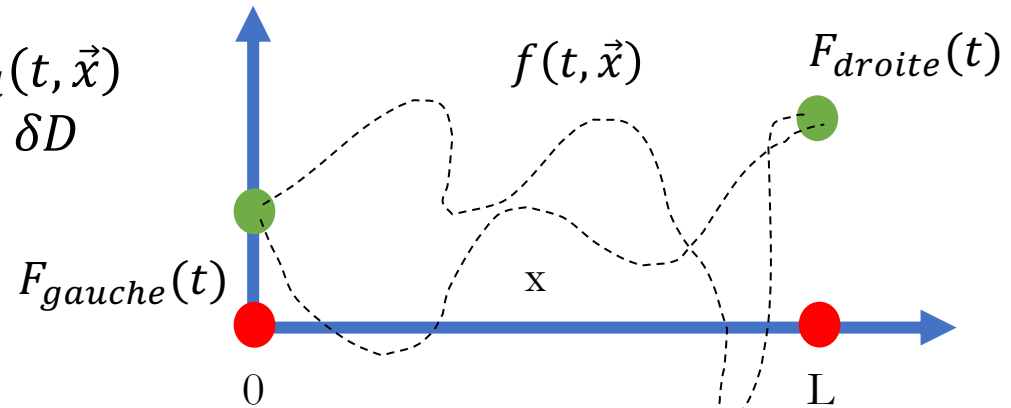
# Conditions aux limites

En plus des équations dans le domaine, il faut spécifier les conditions aux limites :

## Dirichlet:

On fixe la valeur de la fonction sur le bord

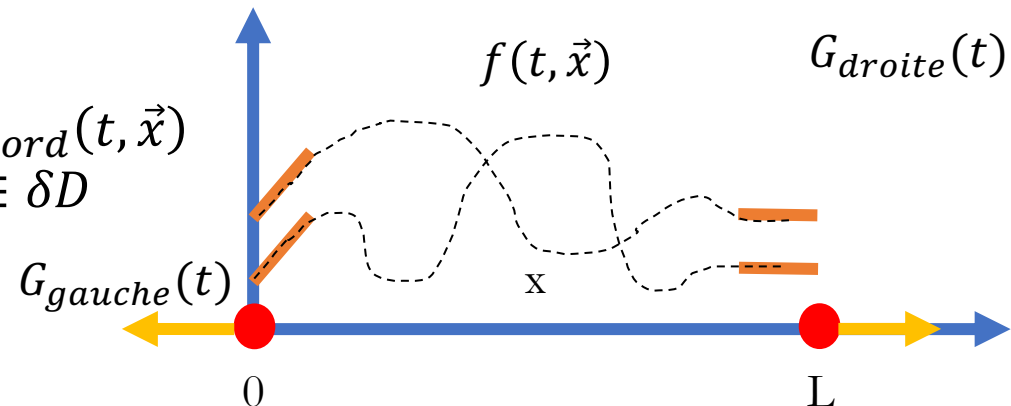
$$f(t, \vec{x}) = F_{bord}(t, \vec{x}) \\ \forall t \in I_t, \forall \vec{x} \in \delta D$$



## Neuman:

On fixe la valeur de la dérivée de la fonction sur le bord

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} f(t, \vec{x}) = G_{bord}(t, \vec{x}) \\ \forall t \in I_t, \forall \vec{x} \in \delta D$$

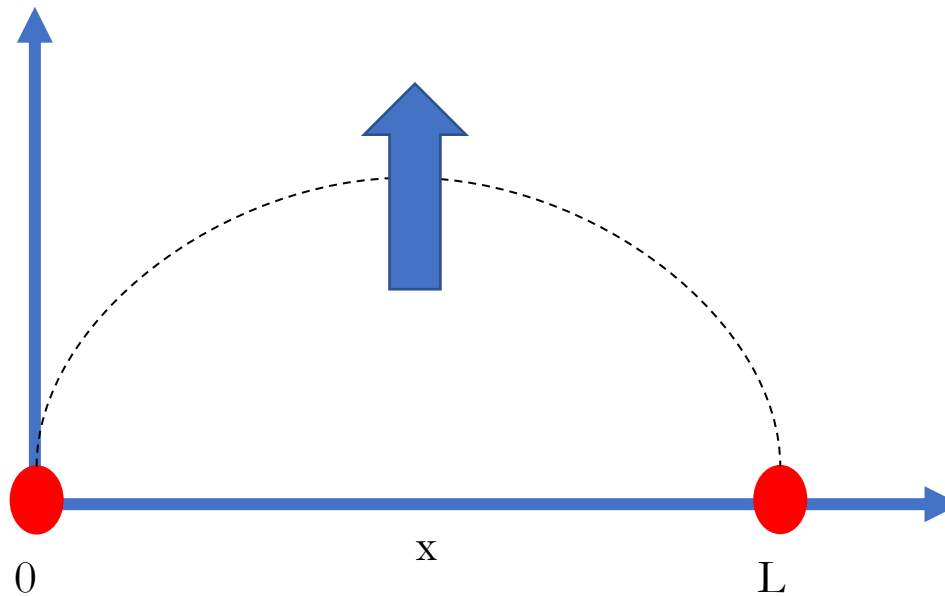


NB : il existe également des conditions mixtes (Robin)

où on fixe une combinaison linéaire de la fonction et de sa dérivée sur le bord

# Condition initiale

Enfin, il faut spécifier la solution initiale à partir de laquelle on va débiter la résolution



$$f(0, \vec{x}) = F_0(\vec{x})$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0, \vec{x}) = G_0(\vec{x})$$

→ Le nombre de conditions initiales dépend de l'ordre de la plus haute dérivée temporelle dans l'équation

→ Attention, ceci n'est nécessaire que dans un problème qui dépend du temps ! (instationnaire)



$$v_2 \tan \theta_B = \frac{w_2}{w_1} = w_{21} \quad \rho V = nRT \quad \vec{\psi} = \iint \vec{D} d\vec{S} = AD$$

$$M_e = \sigma T^4 \quad \phi_e = \frac{L}{4\pi r^2} \quad \int \frac{\Delta\psi}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \quad v = c/\lambda$$

$$j = E\psi \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad X_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L = 2\pi f L \quad \vec{F}_m = \vec{B} I l = \dots$$

$$E = h\nu \quad U = \frac{W_{AB}}{|E_{PA} - E_{PB}|} = \frac{\phi_A - \phi_B}{|T|} = \frac{4 n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} \quad \vec{g} = \frac{m_1 n}{m_2 n}$$

$$E = \frac{h\nu}{2\pi r m_e} \quad \phi_E = \frac{E_c}{\rho_0} = k \frac{\phi}{r} \quad m = N \cdot m_0 = \frac{\phi}{v_e} \quad \frac{M_m}{N_A} \quad E = \frac{E_c}{a} \int_{-a/L}^{+a/L} \sin(\omega t + \phi) dy$$

$$\frac{M_m}{N_A} = \frac{M_r \cdot 10^{-3}}{N_A} \quad l_t = l_0(1 + d \Delta t) \quad I = \frac{U_e}{R + R_i} \quad \omega = \dots$$

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad E = mc^2 \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{w_2}{w_1} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}$$

$$\vec{s} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad E_k = \frac{h^2}{8mL^2} \quad \oint \vec{D} d\vec{S} = \dots$$

$$E = \frac{h^2 k^2}{2m} \quad \sigma = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad M = F d \cos \alpha$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad \int \vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} \quad \rho = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

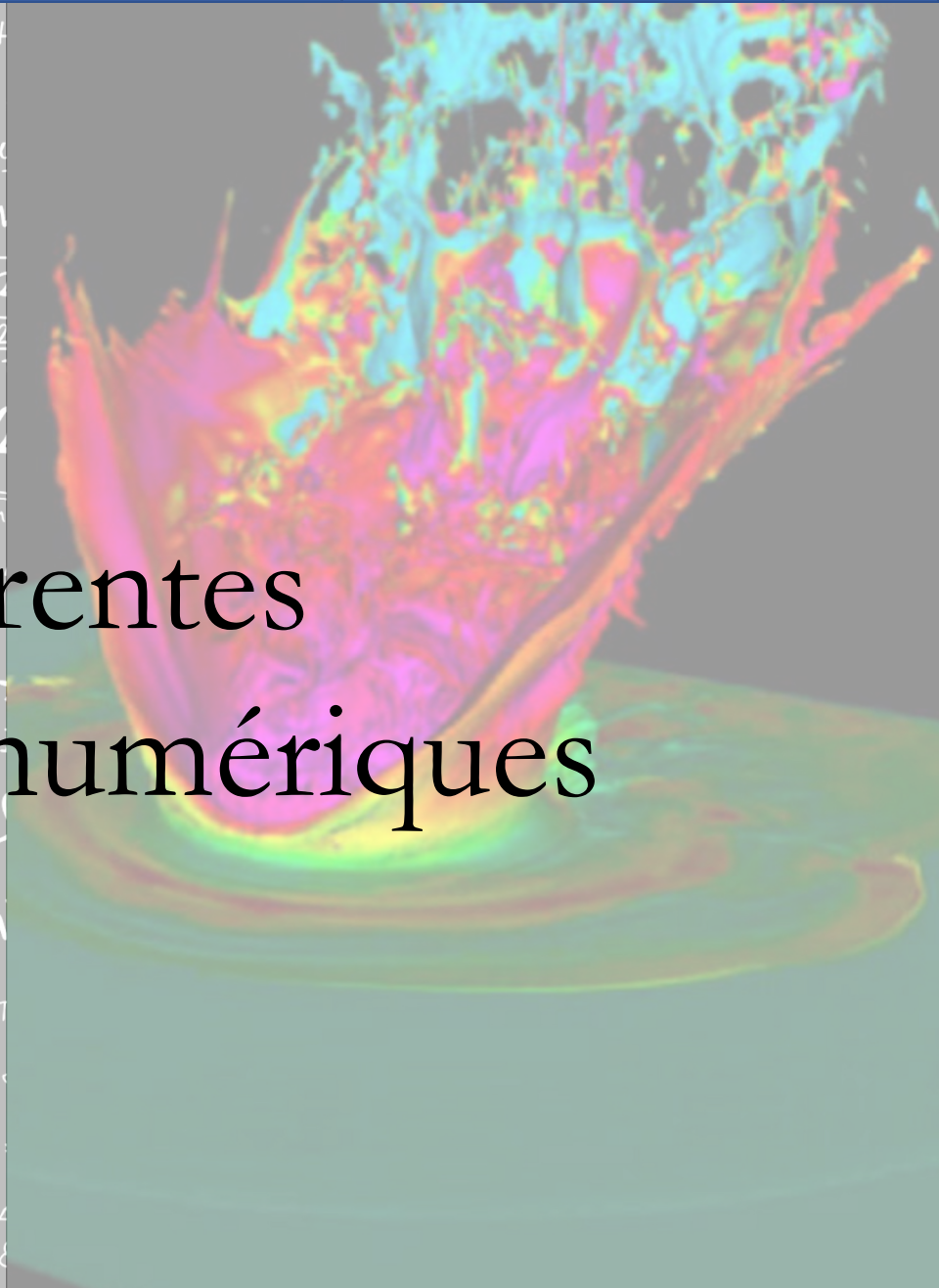
$$\vec{H} d\vec{l} = \int (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad \varphi = mc \Delta t \quad F_g = \dots$$

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad \Delta\psi = \frac{2\pi \Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

$$\vec{H} = \mu_0 \sum \vec{I} \quad \rho = \frac{\vec{F}}{\Delta S} = \frac{m \Delta v}{\Delta S \Delta t} \quad P = UI \quad h = \frac{1}{2} g t^2 \quad v = v_1(1 + \beta)$$

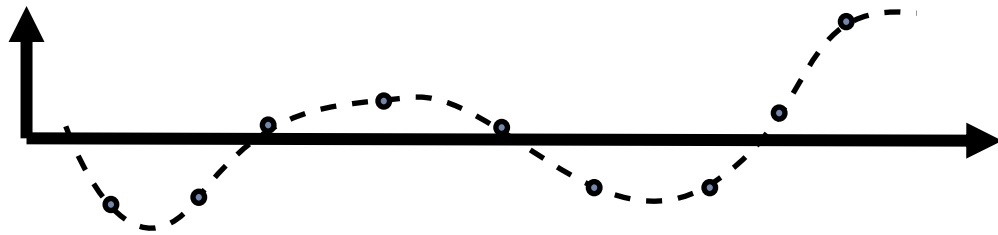
$$f' = \frac{v_a \cdot v_b}{(v - 1)(v_0 - v_a)} \quad \nabla \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \dots$$

# Différentes méthodes numériques



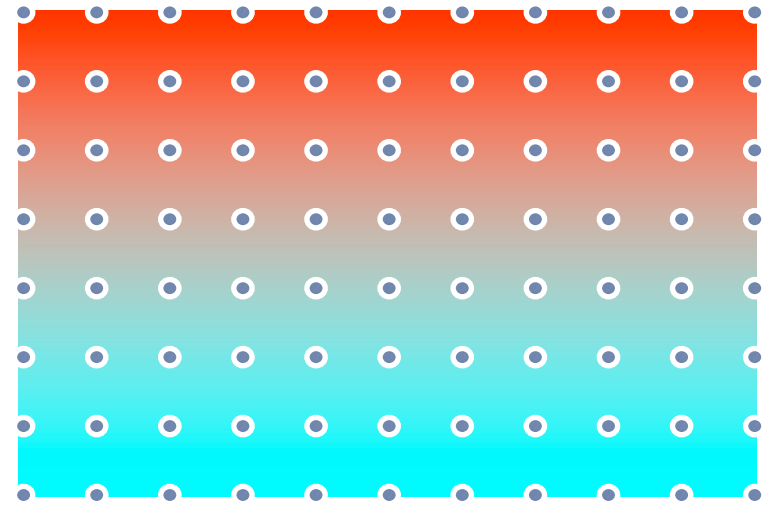
# Différences finies : Domaine

Les fonctions continues sont remplacées par des valeurs nodales :



$$f(x) \rightarrow f(x_i) = f_i$$

1D



2D

$$f(x) \rightarrow f(x_i) = f_i$$

$$f(x, y) \rightarrow f(x_i, y_j) = f_{i,j}$$

→ Les champs physiques ne sont évalués que en certains points définis par le maillage

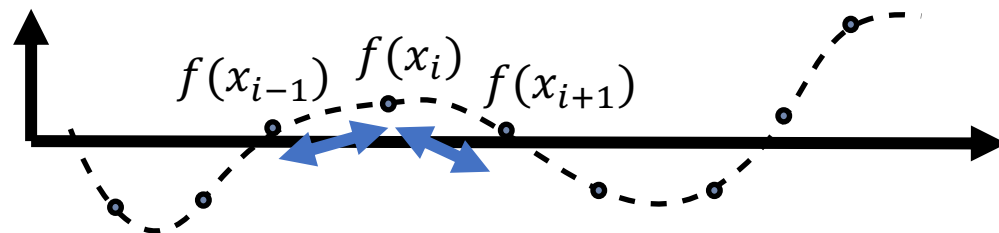
# Différences finies : Principe

On va approximer les dérivées comme une différence de variations  
 → En connaissant les valeurs voisines, on peut estimer la dérivée

$$\frac{df(x)}{dx} + f(x) = 0, \forall x \in D \quad \longrightarrow \quad \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\delta x} + f(x_i) = 0, \forall i \in [0, N - 1]$$

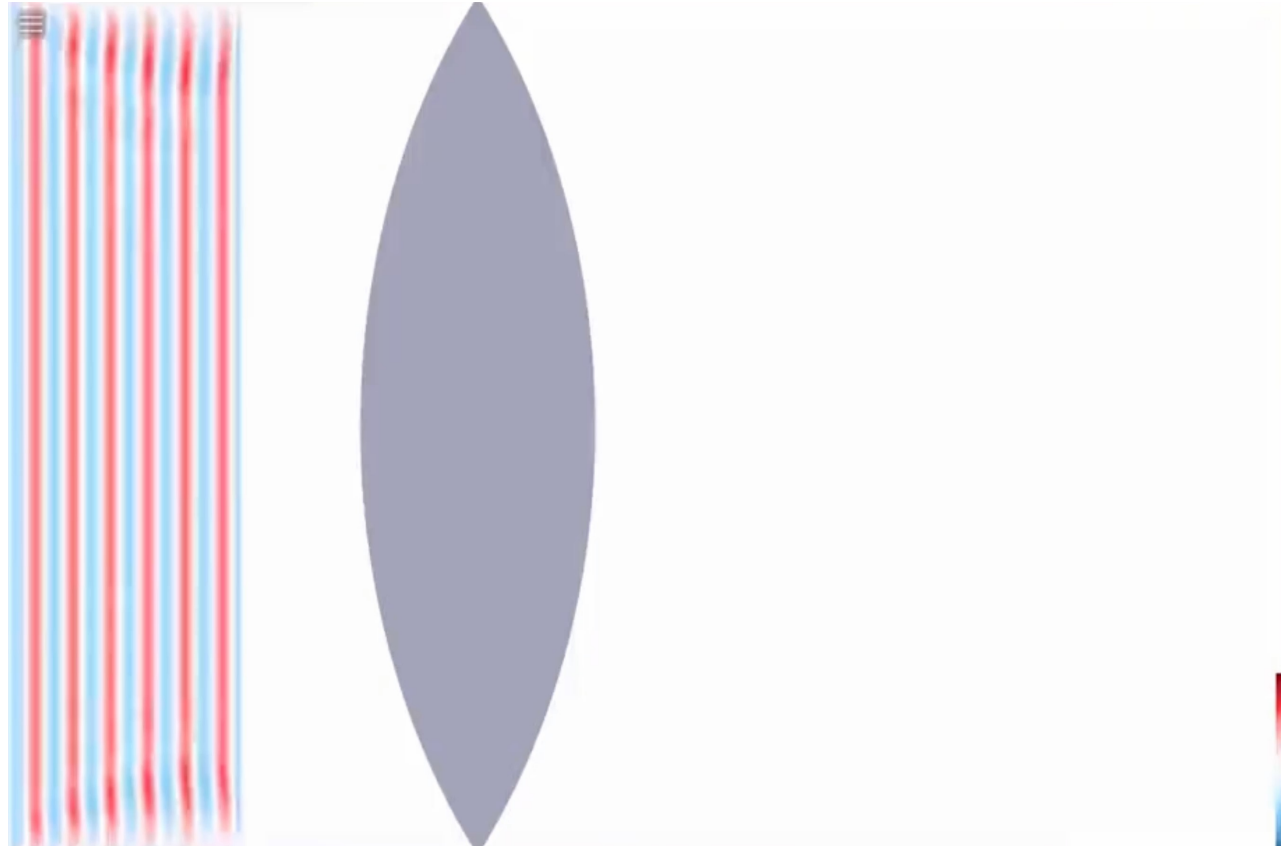
→ À partir des équations et conditions aux limites, on écrit  $N$  équations algébriques  
 (1 pour chaque point)

→ On résout chaque équation à partir des valeurs des points voisins



$$f(x) \rightarrow f(x_i) = f_i$$

# Différences finies : Exemples et Limites



## Avantages :

Formulation la plus intuitive et la plus simple, applicable à un grand nombre de problèmes

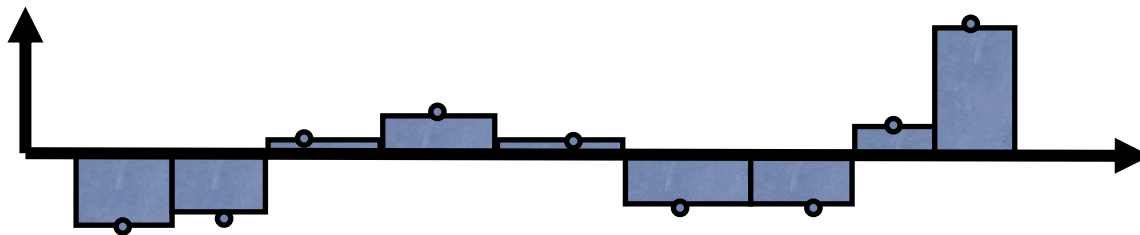
## Inconvénients :

On ne prend pas en compte ce qui se passe entre les points

→ Très dépendant de la résolution choisie

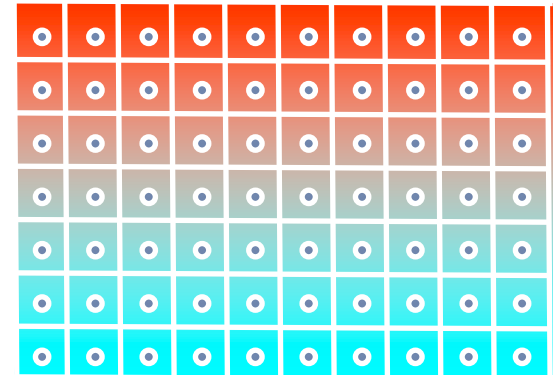
# Volumes finis : Domaine

Les fonctions continues sont remplacées par des fonctions constantes par morceau :



1D

$$f(x) \rightarrow f_i, x \in [x_i, x_{i+1}]$$



2D

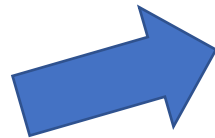
$$f(x, y) \rightarrow f_{i,j}, x \in [x_i, x_{i+1}], y \in [y_j, y_{j+1}]$$

→ Les champs physiques sont évalués à l'intérieur d'une cellule

# Volumes finis : Principe

Au lieu d'approximer les dérivées, on va chercher à calculer une intégrale  
 → On ramène les variations spatiales à des échanges de flux entre cellules

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \forall x \in D$$



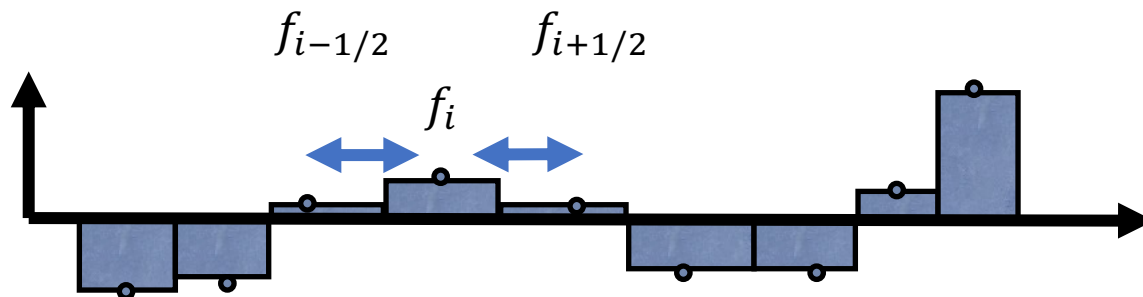
$$\rho(x, t_2) = \rho(x, t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$



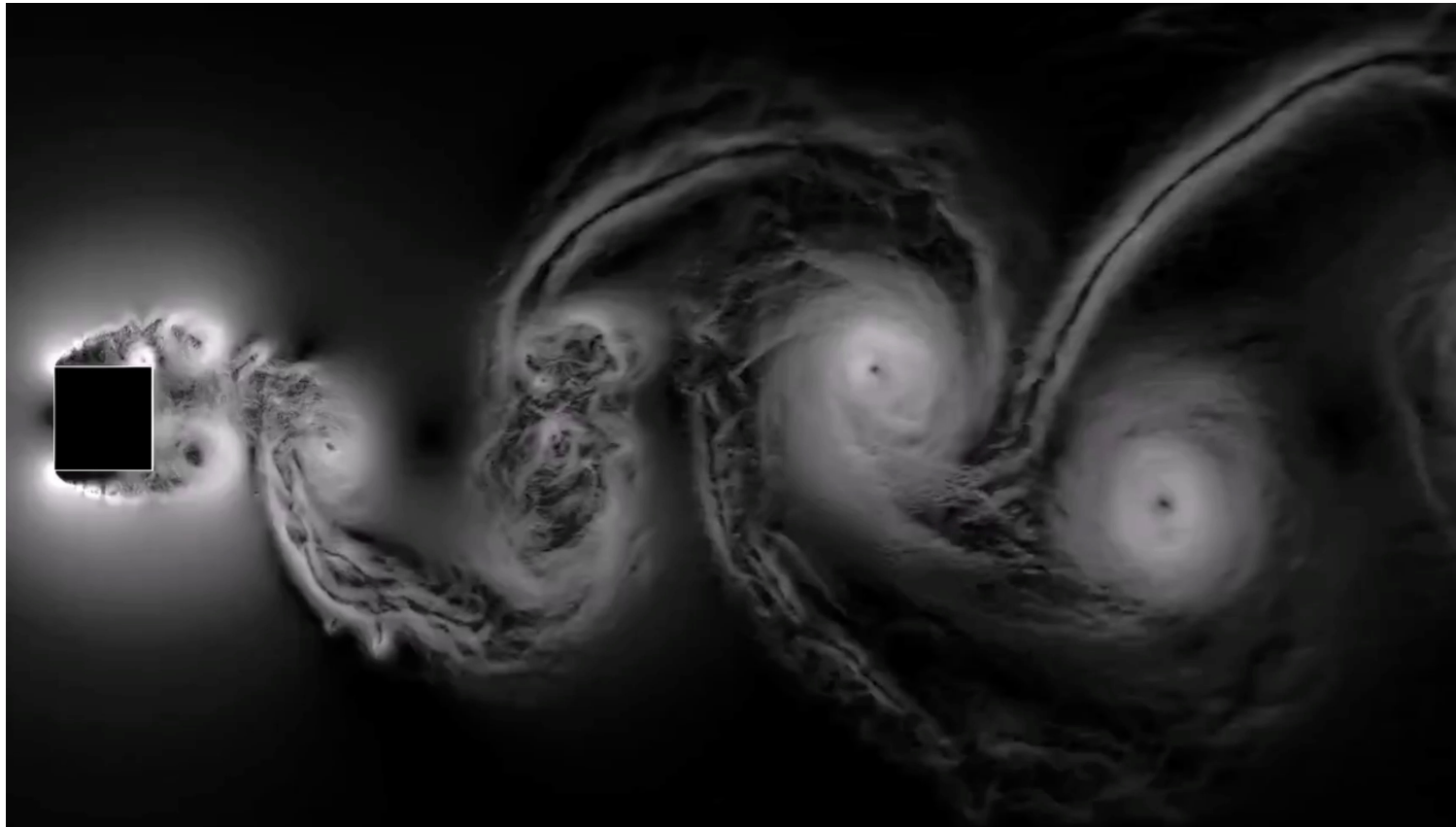
$$\frac{d\bar{\rho}_i}{dt} + \frac{1}{\Delta x_i} [f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}] = 0, \forall i \in [0, N-1]$$

→ À partir des équations et conditions aux limites, on écrit N équations algébriques  
 (1 pour chaque cellule)

→ On résout chaque équation en calculant les flux échangés entre les cellules



# Volumes finis : Exemples et Limites



## Avantages :

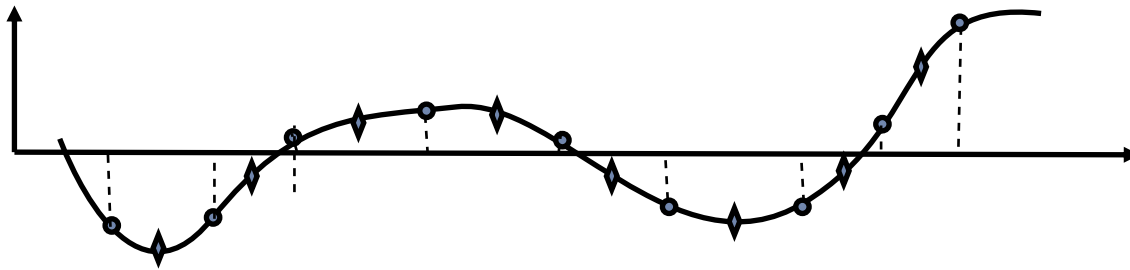
Conservatif de par sa formulation, flexible, formulation exacte

## Inconvénients :

Méthode uniquement spatiale, formulation conservative, précision améliorable

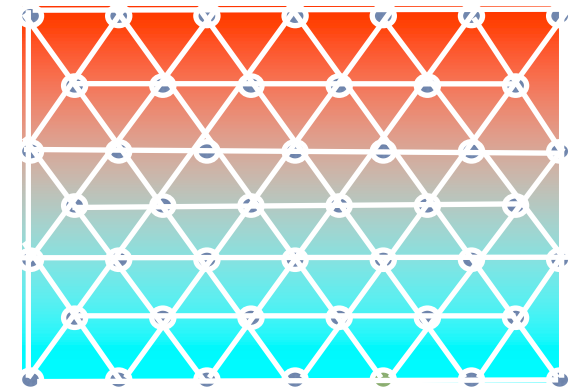
# Éléments finis : Domaine

Les fonctions continues sont remplacées par des fonctions polynomiales par morceau :



1D

$$f(x) \rightarrow f_i \Phi_i(x)$$



2D

$$f(x, y) \rightarrow f_{i,j} \Phi_{ij}(x, y)$$

→ Les champs physiques sont évalués à l'intérieur d'un élément  
= zone où on utilise une même fonction de forme



# Éléments finis : Principe

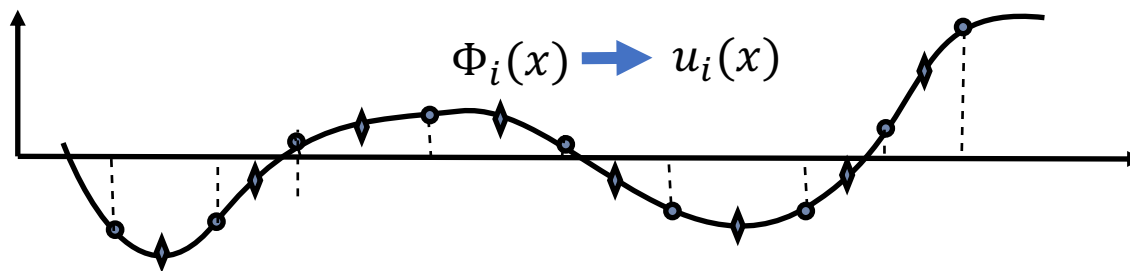
Sur chacun des éléments, on va linéariser l'EDP par approximation

- On obtient une formulation faible du problème
- On obtient une matrice associée par élément fini

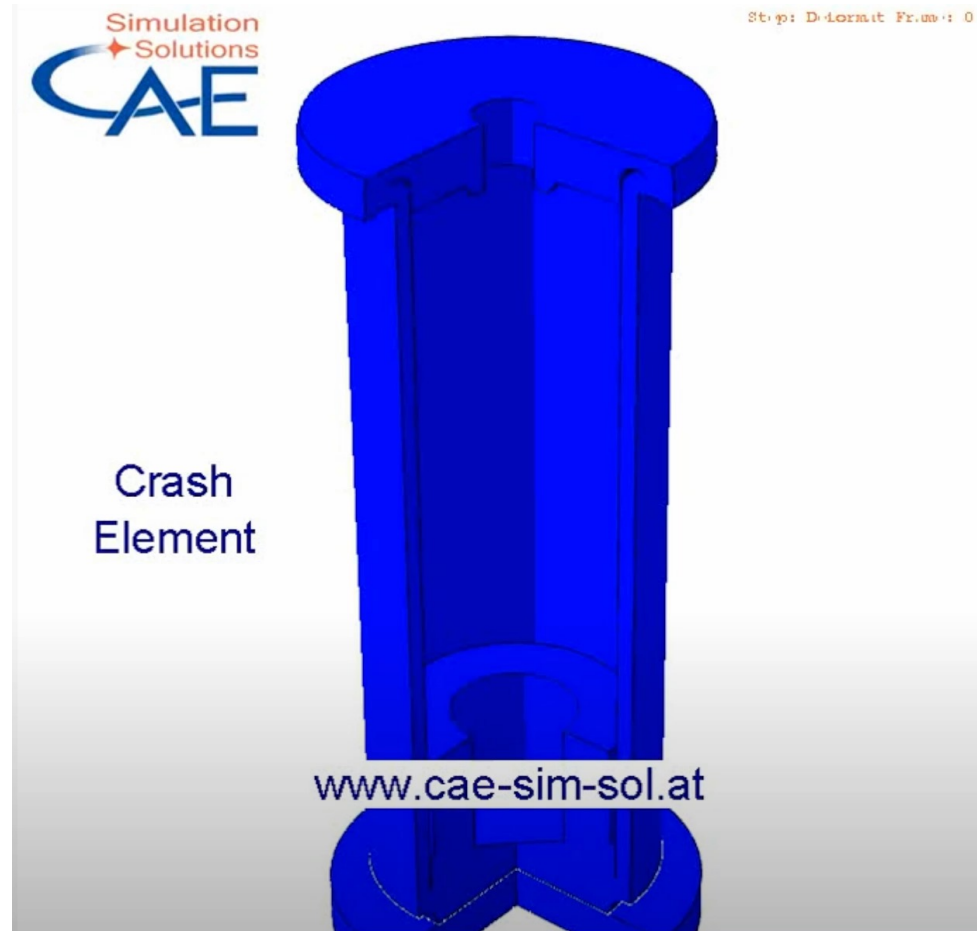
$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{l} -\Delta u + k^2 u = f \\ u \in V_0 \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{l} u \in V_0 \Rightarrow v \in V_0 \\ \int \nabla u \cdot \nabla v d\omega + k^2 \int v u d\omega = \int v f d\omega \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \sum_{i=1}^N u_i a(\Phi_i, \Phi_j) = L(\Phi_j) \\
 & & \underbrace{\hspace{10em}}_{a(u, v)} & & \underbrace{\hspace{10em}}_{L(v)} & & \downarrow \\
 & & & & & & AU = B
 \end{array}$$

→ À partir des équations et conditions aux limites, on écrit N matrices  
(1 pour chaque élément)

→ On regroupe chaque matrice d'élément en une matrice globale à inverser (CL)



# Éléments finis : Exemples et Limites



## Avantages :

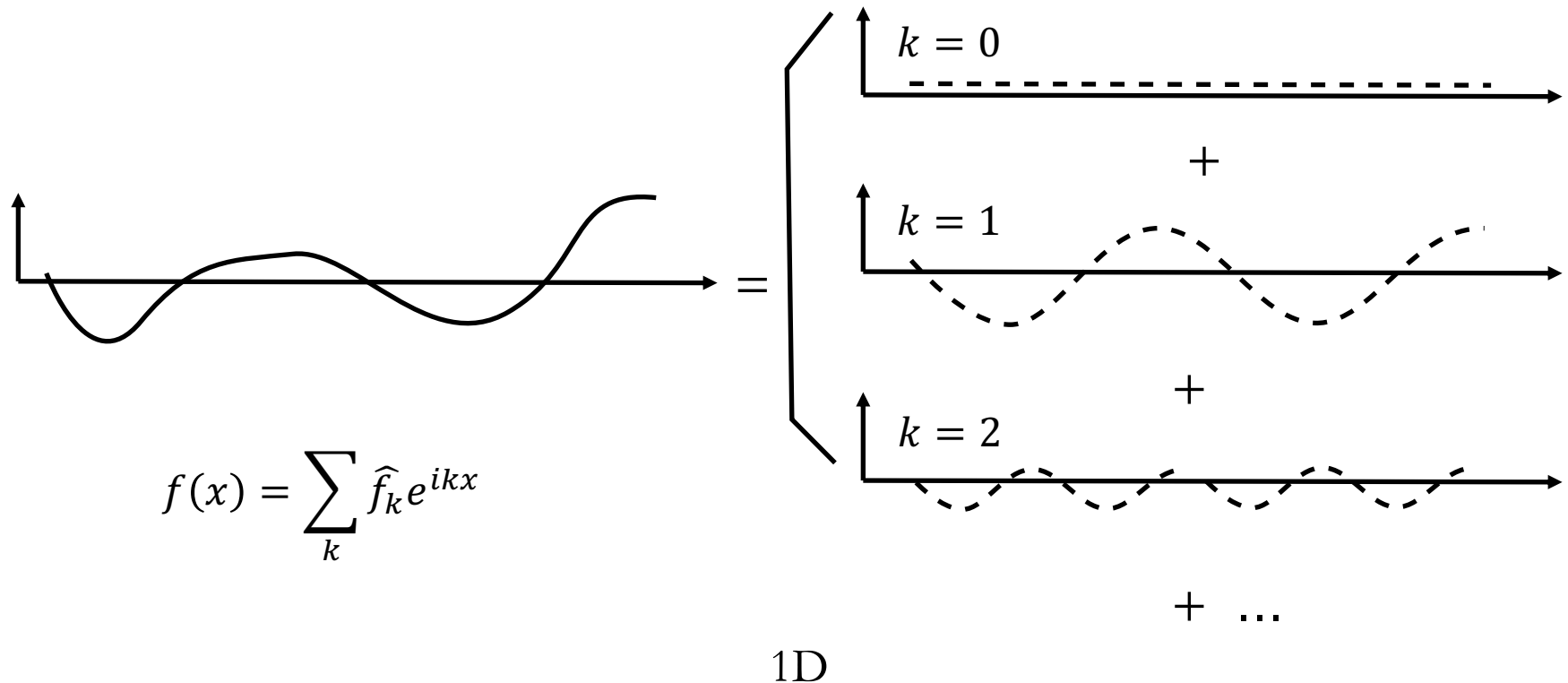
Plus précis, très robuste, applicable à de nombreuses géométries

## Inconvénients :

Plus complexe, formulation faible nécessaire, coûteux numériquement

# Méthodes spectrales : Domaine

Les fonctions continues sont décomposées sur une base de  $N$  fonctions (ex : Fourier) :



→ Les champs physiques sont transposés dans un autre espace où ils sont plus simples à manipuler = l'espace spectral

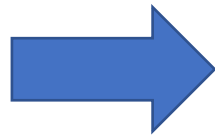
# Méthodes spectrales : Principe

Sur chacun des éléments, on va linéariser l'EDP par approximation

- On obtient une formulation faible du problème
- On obtient une matrice associée par élément fini

$$\Delta\phi(r, \theta, \phi) = \sigma(r, \theta, \phi)$$

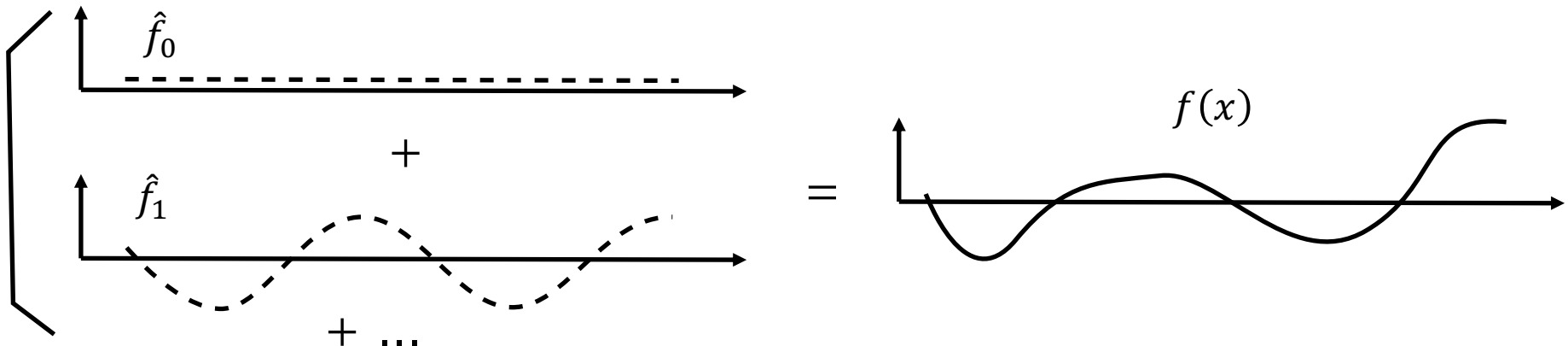
$$T_n(\theta), Y_\ell^m(\theta, \phi)$$



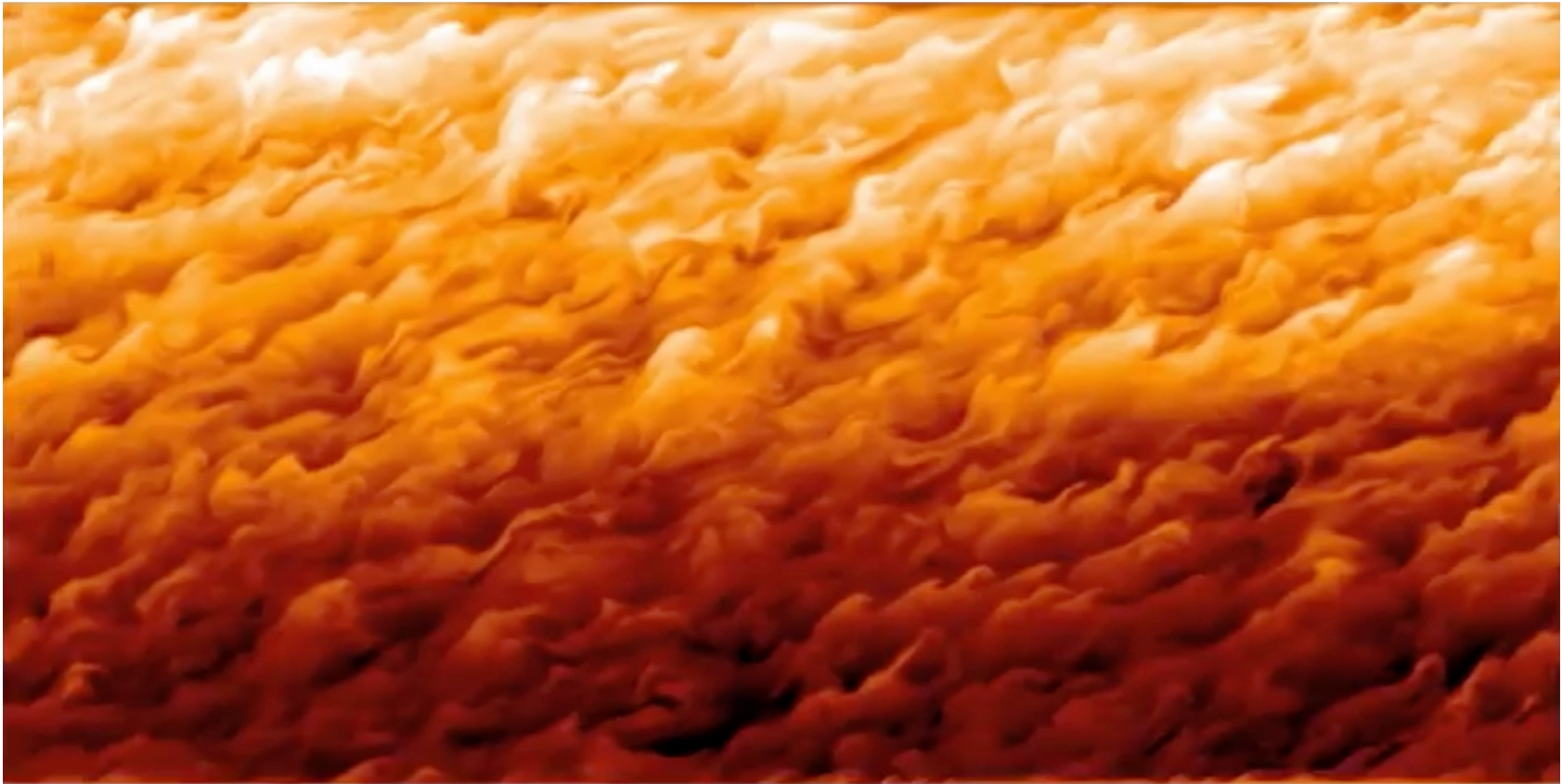
$$\forall \ell, \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) a_{\ell m}(r) = s_{\ell m}(r)$$

→ À partir des équations et conditions aux limites, on trouvera  $N$  équations  
(1 pour chaque coefficient d'expansion)

→ On résout chaque équation, afin de reconstruire la solution dans l'espace physique



# Méthodes spectrales : Exemples et Limites



## Avantages :

Méthode très précise, optimisée pour géométries à base, utile pour non-linéaire

## Inconvénients :

Complexe à coder, ne peut pas prendre en compte toutes les géométries

# Schéma numérique

Une fois qu'on a choisi la méthode numérique qu'on souhaite utiliser, il reste encore de nombreux choix possibles = schéma numérique

ex : différences finies  $\rightarrow \frac{df(x)}{dx} + f(x) = 0$

$\rightarrow$  comment approximer la dérivée ? quelle formulation ?



$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\delta x}$$

Schéma d'Euler Forward



$$\frac{df(x_i)}{dx} \Rightarrow \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\delta x}$$

Schéma d'Euler Backward



$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2\delta x}$$

Schéma d'Euler centré

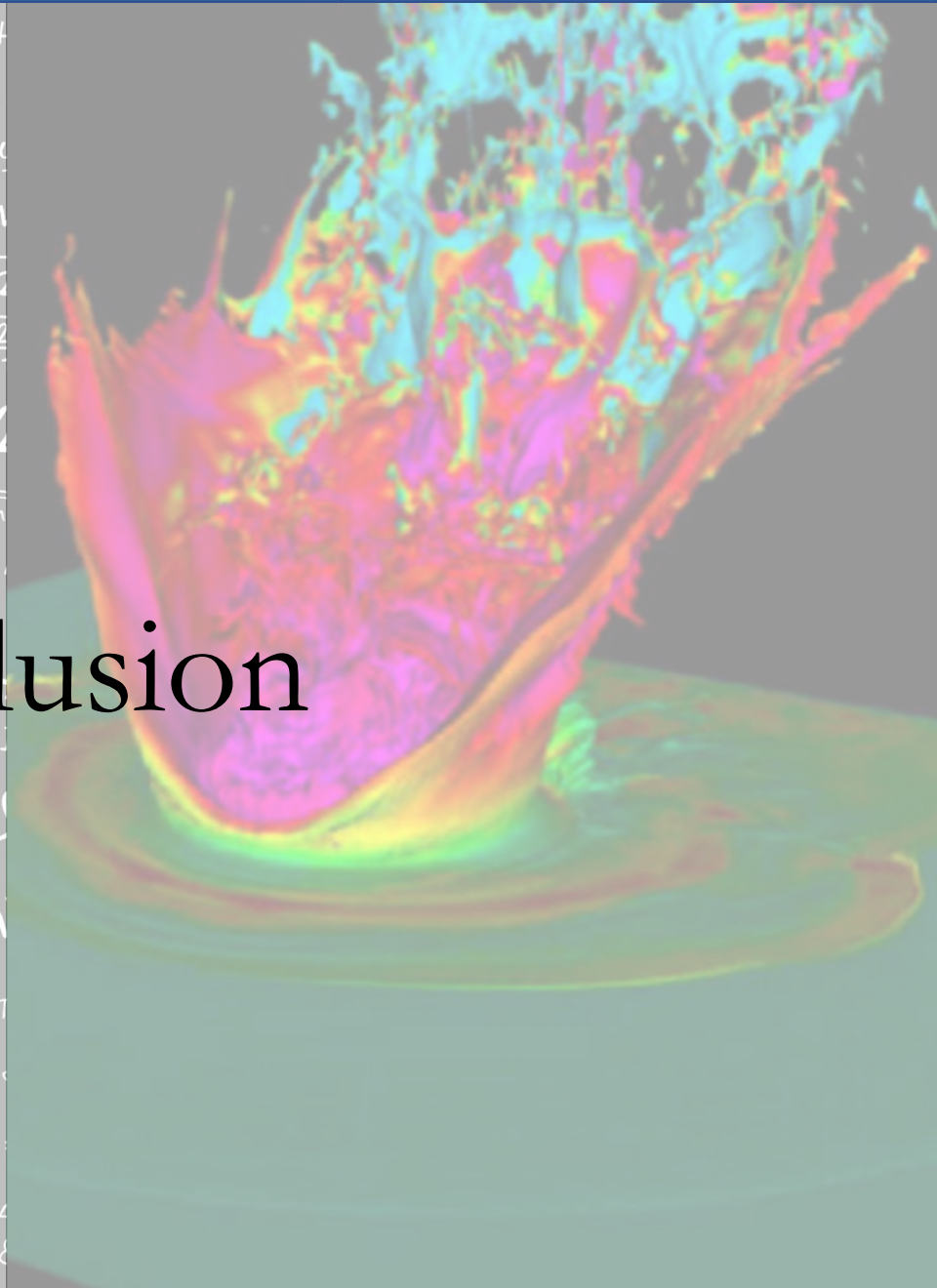
$\rightarrow$  Pour les volumes finis on choisit la manière de reconstruire les flux, pour les éléments finis les fonctions polynomiales pour effectuer la décomposition, etc.

$\rightarrow$  Chaque schéma possède ses propres caractéristiques (cf. cours 6 le 01/12)

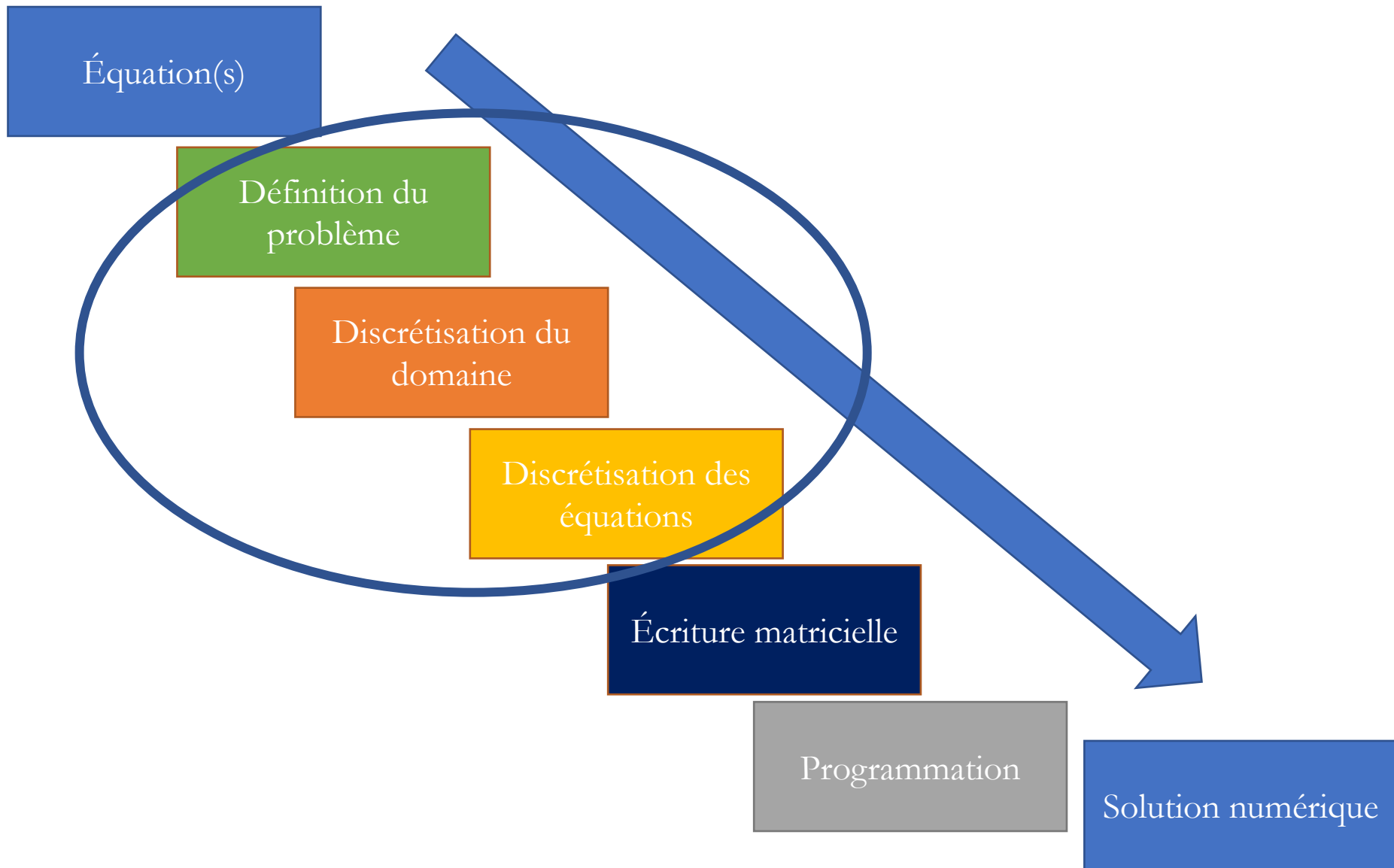


$$\begin{aligned}
 & v_2 \tan \theta_B = \frac{w_2}{w_1} = w_{21} \quad \rho V = nRT \quad \vec{\Psi} = \iint \vec{D} d\vec{S} = AD \\
 & M_e = \sigma T^4 \quad \phi_e = \frac{L}{4\pi r^2} \quad \int \frac{\Delta\psi}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \quad v = c/\lambda \\
 & \psi = E\psi \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad X_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L = 2\pi f L \quad F_g = \frac{m_1 m_2}{r^2} \\
 & E = \hbar\omega \quad U = \frac{W_{AB}}{|E_{PA} - E_{PB}|} = \frac{\phi_A - \phi_B}{|T|} = \frac{4 n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} \quad g = \frac{m_1 m_2}{r^2} \\
 & E = \frac{hc}{\lambda} \quad \phi_E = \frac{E_c}{\rho_0} = k \frac{\phi}{r} \quad m = N \cdot m_0 = \frac{M_m}{N_A} \quad E = \frac{E_c}{a} \int_{-a/L}^{+a/L} \sin(\omega t + \phi) dy \\
 & \frac{M_m}{N_A} = \frac{M_r \cdot 10^{-3}}{N_A} \quad l_t = l_0(1 + d \Delta t) \quad I = \frac{U_e}{R + R_i} \quad \omega = 2\pi f \\
 & \frac{M_m}{N_A} = \frac{M_r \cdot 10^{-3}}{N_A} \quad R = \rho \frac{l}{S} \quad E = mc^2 \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{w_2}{w_1} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}} \\
 & \psi(x) = \sqrt{2/L} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad E = \frac{1}{2} \hbar v / k/m \quad \beta = \frac{\Delta I_c}{\phi_e} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{x'} \\
 & \iint \vec{J} d\vec{S} \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad \Delta I_B = \frac{h^2}{8mL^2} h^2 \quad \phi = \frac{2\pi \sin^2 \theta}{\lambda} \\
 & \frac{N_A}{m} = \sqrt{\frac{3R_m T}{M_r \cdot 10^{-3}}} \quad E = \hbar k^2 \quad 1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ AU}}{r} \quad S = \frac{U}{I} \quad F_v = \dots \\
 & h = Shp g \quad f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{CL}} \quad \sigma = \frac{Q}{M} \quad M = Fd \cos \alpha \\
 & \cos \theta_2 \quad R = R_0 \sqrt[3]{A} \quad \int \vec{E} d\vec{l} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \rho = \frac{E}{c} = \frac{hf}{\lambda} = \frac{h}{\lambda} \\
 & \oint \vec{H} d\vec{l} = \iint (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad \Phi = m c \Delta t \quad F_g = \dots \\
 & \vec{H} = \mu_0 \sum \vec{I}; \quad \rho = \frac{\vec{F}}{\Delta S} = \frac{m \Delta v}{\Delta S \Delta t} \quad \Delta \psi = \frac{2\pi \Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} \\
 & \frac{+g^2}{+g^2} f' = \frac{r_a \cdot r_b}{(r_a - 1)(r_b - r_a)} \quad \nabla \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \dots
 \end{aligned}$$

# Conclusion



# Cycle des méthodes numériques





# Récapitulatif

## Définition du problème :

- Coordonnées,
- Dimensions,
- Équations,
- Domaine,
- Conditions aux limites,
- Condition initiale.

## Discretisation du domaine :

- Dimensions,
- Type de maillage,
- Résolution.

## Discretisation des équations :

- Choix de la méthode (différences finies, volumes finis, éléments finis, méthode spectrale),
- Choix du schéma numérique,
  - Choix de la formulation (explicite/implicite).

# Application à l'UE

## Définition du problème :

- Cartésien,
  - 1D-2D,
- Plusieurs équations,
  - Domaines rectangulaires,
- Dirichlet et Neuman.

## Discrétisation du domaine :

- 1D-2D,
- Maillage régulier.

## Discrétisation des équations :

- Différences finies,
- Exploration du plusieurs schémas,
- Impact explicite vs. implicite.

# Plan de l'UE

## Idée générale :

Au premier semestre, on va introduire les notions de base, et s'intéresser en détails à une méthode numérique précise

Tous les jeudi matin (8h45-12h45) au bâtiment 625

21 Novembre : Cours 1 + Cours 2

4 Décembre : Cours 3 + TP 1

5 Décembre : Cours 4 + TP 2

12 Décembre : Cours 5 + TP 3

19 Décembre : Cours 6 + TP 4

9 Janvier : Cours 7 + TP 4

16 Janvier : Cours 8 + TP 5

23 Janvier : TP 5

30 Janvier : Examen

## Modalités d'évaluation :

TPs + examen oral (question de cours + exercice)