

## Integer Non Linear Programmin : EXERCICES ON NON LINEAR PROGRAMMING

### ENGLISH VERSION

#### PROBLEM 1

An elegant student has to make a trip to the USA in order to start a summer internship. She has to choose in her wardrobe some clothes. Because of aviation regulations, the capacity of her suitcase can't exceed 4 kg.

She has chosen to make a choice, in addition with 1 dress she will wear during her trip, between 3 skirt, 3 pants, 4 tops and 3 dresses. The weight (in gram) of each clothe is reported in the following table n°1.

Clothes	Skirt			Pant			Top				Dress		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3
Weight (g.)	500	400	700	600	500	500	400	300	300	400	600	700	800

*Table n°1 : Weight in gram of each different clothe*

The student has decided that:

- She has to take with her AT LEAST a dress,
- IF she takes with her the skirt n°1 THEN she has to take with her the top n°2,
- IF she takes with her the tops n°1 AND n°2 THEN she does not take with her the top n°4.

The aim is to maximize the number of different outfits she will take with her in the USA. Let recall that a dress is a toilette, the other outfit is the result of the combination between a top with a skirt or a pant. However, the rules of elegance do not allow some combinations. The allowed combinations are indicated in table n°2 by a cross.

		Top			
		1	2	3	4
Skirt	1	×	×		×
	2	×			×
	3			×	
Pant	1	×		×	
	2		×		
	3			×	×

*Tableau n°2 : combinations allowed*

#### Indications :

1. Even if you do not provide an answer to a question, please deal with the other questions.
2. 1000g = 1kg

3. The proposed exercise can be modeled thanks to a 0-1 quadratic knapsack problem subjected to a capacity constraint and 3 other linear constraints (derived from the elegance rules).

1. Give a feasible solution taking into account all constraints and allowing the student to take with her in the USA 7 outfits..

**2. Formulation into a 0-1 quadratic program**

- a. Define 13 decision variables (0-1 variables)
- b. Give 4 linear constraints corresponding to: (i) the restricted weight of the suitcase, (ii) the student has to take with her at least a dress, (iii) IF she takes with her the skirt n°1 THEN she has to take with her the top n°2, (iv) IF she takes with her the tops n°1 AND n°2 THEN she does not take with her the top n°4.
- c. Write a quadratic objective function (that is a sum of cross term of two variables) which expression is the translation that she wants to maximize the different outfits she will take with her.
- d. Transform this quadratic function into a linear function (for each cross term you will use a new variable and two additional constraints)

**FRENCH VERSION**

**PROBLEM 1**

Une étudiante élégante et coquette doit se rendre aux états unis afin d’effectuer un stage d’été. Outre ses affaires professionnelles et quelques objets indispensables, elle doit choisir un certain nombre de vêtements dans sa garde-robe. Du fait des réglementations aériennes, il s’avère qu’il ne reste plus que 4 kg disponibles pour ses vêtements.

Une première sélection dans sa garde-robe conduit l’étudiant à retenir, en plus de la robe qu’elle a décidé de porter dans l’avion, 3 jupes, 3 pantalons, 4 hauts et 3 robes. Le poids en grammes de chaque vêtement est répertorié dans le tableau n°1.

Vêtements	Jupe			Pantalon			Haut				Robe		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3
Poids (g.)	500	400	700	600	500	500	400	300	300	400	600	700	800

*Tableau n°1 : Poids en gramme des différents vêtements*

L’étudiante décide que :

- elle doit emporter au moins une robe,
- si elle emporte la jupe 1 alors elle emportera également le haut 2 (qui s’assortit si bien avec sa jupe) ,
- elle ne prendra pas le haut 4 si elle emporte les hautes 1 et 2.

L’objectif poursuivi est de maximiser le nombre de tenues différentes qu’elle pourra porter aux Etats-Unis. Une robe constitue une tenue. Les autres tenues résultent de combinaisons d’un haut et d’une jupe ou d’un haut et d’un pantalon. Cependant les règles

de l'élégance n'autorisent que certaines combinaisons indiquées par une croix dans le tableau n°2.

		Haut			
		1	2	3	4
Jupe	1	x	x		x
	2	x			x
	3			x	
Pantalon	1	x		x	
	2		x		
	3			x	x

Tableau n° 2 : combinaisons autorisées

Indications :

1. même si vous ne répondez pas à une question n'hésitez pas à faire la suivante, chaque question appelle une réponse quelle qu'elle soit.
2. 1000g = 1kg
3. l'exercice proposé est une modélisation sous la forme d'un sac à dos quadratique en variables 0-1 soumis à 1 contrainte de capacité à laquelle s'ajoute 3 contraintes linéaires liées aux exigences de l'étudiante.

3. Déterminez une solution réalisable, compte tenu de toutes les contraintes, permettant d'emporter au moins 7 tenues différentes.

**4. Modélisation sous forme d'un programme quadratique en variables 0-1**

- a. Définissez les 13 variables de décision (variables binaires)
- b. Ecrivez les 4 contraintes linéaires, relatives respectivement à: (i) la limitation de poids disponible dans la valise, (ii) l'étudiante doit emporter au moins une robe, (iii) si l'étudiante emporte la jupe 1 alors elle doit emporter le haut 2, (iv) si l'étudiante emporte les hauts 1 et 2 alors elle n'emporte pas le haut 4.
- c. Ecrivez la fonction objectif traduisant le nombre de tenues différentes qu'elle pourra emporter à maximiser. Cette fonction est quadratique (c'est à dire une somme de produits de deux variables).

Rendez cette fonction linéaire (pour chaque produit de la somme précédente, vous utiliserez une nouvelle variable binaire et deux nouvelles contraintes

**PROBLEME 2**

Un problème de placement de tâches dans un système distribué. Soient  $n$  **tâches** communicantes et  $p$  **processeurs**; soit une matrice  $C$  ( $n$  lignes et  $n$  colonnes) représentant les **gains de communication** si les tâches sont placées sur des processeurs différents. Le gain de communication est négligeable si les tâches sont placées sur le même processeur. Enfin, soit  $Q$  une matrice ( $n$  lignes et  $p$  colonnes) représentant les **coûts d'exécution**.

Le modèle que vous devez proposer (sous forme d'un programme quadratique en variables 0-1) doit permettre de **trouver une affectation des tâches sur les**

**processeurs maximise le gain total (communications) tout en minimisant le coût total (exécution).**

En ce sens, répondez aux questions suivantes :

1. Définissez les variables de décision (0-1) de ce problème d'affectation (Aide : on se demande quelle tâche affectée à quel processeur, donc vos variables devront faire apparaître les deux éléments via leurs indices).
2. Quelle fonction objectif proposez-vous afin de traduire la maximisation du gain tout en minimisant le coût ?
3. Comment écrire une contrainte qui traduit le fait qu'une tâche ne peut être affectée qu'à un et un seul processeur ?
4. Ecrivez dans son intégralité le programme quadratique en variables 0-1 correspondant.
5. Comment pourriez-vous transformer ce programme non linéaire en un programme linéaire ?