Opti.discrète Non Linéaire : TD1,2

D. Quadri

October 27, 2023

1 Modélisation (Prog. Linéaire continue et/ou entière

EXERCICE 1

Un fleuriste dispose de 50 lys, 80 roses et 80 jonquilles. Il réalise ou bien des bouquets qu'il vend 40 euros comprenant 10 lys, 10 roses et 20 jonquilles, ou bien des bouquets dont il tire un prix de 50 euros qui comprennent 10 lys, 20 roses et 10 jonquilles. Comment le fleuriste doit il former les bouquets pour réaliser une recette maximale ? (on vous demande de modéliser le problème sous forme d'un programme linéaire).

EXERCICE 2

Une société de distribution de gaz de pétrole liquéfié (GPL) alimente, tout au long de l'année, les citernes de ses clients. Compte tenu de l'usage de ce gaz (chauffage, cuisine, eau chaude) on cnnaît assez précisément le volume des livraisons à effectuer en fonction des températures attendues pour chacune de saisons. Si en réalité l'analyse s'effectue selon un découpage fin du temps (en mois, voire en semaines), nous adopterons ici, pour alléger l'analyse, un découpage trimestriel. Le tableau ci-dessous présente le volume des livraisons à réaliser pour une année standard.

Trimestre	1	2	3	4
Quantité à livrer (t)	5190	2760	900	3150

Table 1: Tableau des livraisons à réaliser

Les livraisons sont supposées uniformément réparties à l'intérieur de chaque trimestre. Compte tenu de la stabilité de ce marché, on peut considérer que le volume des livraisons est identique chaque année. Pour effectuer ces livraisons la société peut:

- louer des camions “grande capacité” d'une capacité de livraison, à plein temps, de 200 tonnes par mois, à un tarif de location de 5000 euros par mois,
- louer des camions “petite capacité” d'une capacité de livraison, à plein temps, de 120 tonnes par mois, à un tarif de location de 3500 euros par mois,

- faire appel à un prestataire de service (affrètement) qui facture 35 euros la tonne livrée.

Les trois modes de livraisons peuvent être utilisés simultanément.

La société de distribution cherche à définir pour l'année A à venir son plan de location et/ou d'affrètement (appel au prestataire) compte tenu des contraintes suivantes dues à la spécificité du matériel:

- le contrat de location d'un camion de grande capacité est obligatoirement de 6 mois consécutifs. Le contrat de location d'un camion de petite capacité est obligatoirement de 3 mois consécutifs,
- l'affrètement ne peut dépasser 500t/trimestre. les dates de mise à disposition des camions loués sont: le 1er janvier, 1er avril, 1er juillet, 1er octobre,
- on dispose au maximum de 10 chauffeurs pendant les 1er, 2eme et 4eme trimestres, de 5 chauffeurs pendant le 3eme trimestre (vacances). ces chauffeurs conduisent tout type de camion loué.

1. Le plan de location de l'année en cours (A-1) a été défini comme suit:
   - au 1/01: 6 camions de grande capacité et 4 camions de petite capacité,
   - au 1/04: pas de camion loué,
   - au 1/07: 1 camion de grande capacité,
   - au 1/10: 1 camion de grande capacité et 6 camions de petite capacité.

   Pour toutes les périodes il est possible de faire appel à des prestataires pour combler l'éventuelle insuffisance de capacité.

   (a) Tracer (sur une feuille à la main) un graphique représentant lévolution mensuelle des besoins de livraisons et de la capacité totale de la flotte louée pendant l'année A-1.

   (b) Quel est le coût global annuel de transport pour les livraisons de A-1 ?

   Remarque: la question 1 est là pour vous donnez une idée d'une solution admissible mais si vous ne la faites pas vous pouvez tout de même faire la suite de l'application.

2. Modélisez la recherche du plan de l'année A (location + affrètement) de moindre coût, sous forme de programme linéaire.

   (a) Voici les variables de décision. Notez que la politique se définit par 3 notions: la date d'engagement des véhicules, le type de véhicule et le nombre de véhicules à engager. Remarquez que si la location s'exprime en véhicules, l'affrètement (recours au prestataire) s'exprime en tonnages à livrer.

   x_{it} correspond au nombre de véhicules de types i engagés au début de trimestre t de l'année A, i=1,2 et t=1,...,4.

   y_t correspond au tonnage à faire livrer par le prestataire pendant le trimestre t, t=1,...,4.

(b) Ecrire les différentes contraintes caractérisant le problème (on serappellera que pour le 1er trimestre de A on dispose d'un grand camion loué le 1/10 de A-1).

(c) Exprimer la fonction objectif (critère à optimiser).

EXERCICE 3

Une agence de publicité se voit confier pour l'année à venir un budget de 5 millions d'euros dont l'objet est de financer la campagne de publicité d'un produit de grande consommation sur le marché national.

Cette agence décide d'utiliser **simultanément** 5 types principaux de supports publicitaires: l'affichage, la presse écrite, la radio, la télévision et le cinéma. Plus précisément, elle est en relation avec un réseau d'affichage publicitaire, 3 quotidiens d'information (Q_1, Q_2 et Q_3), 2 hebdomadaires (H_1, H_2), 2 stations de radio (R_1, R_2), 1 régie de publicité télévisée et 1 chaîne de distribution de films.

L'agence souhaite mener une étude préliminaire afin de déterminer l'ordre de grandeur des budgets affectés à chacun des 10 supports choisis.

L'objectif est évidemment d'obtenir une efficacité maximale de l'investissement publicitaire global. Pour mesurer cette efficacité a priori, on dispose de coefficients d'efficacité obtenus à grands frais à la suite d'une étude statistique des effets des campagnes publicitaires antérieures visant des produits analogues. Ces coefficients sont au nombre de 5 , à raison d'un par type de support. Pour chaque type de support, lorsqu'on multiplie le coefficient correspondant par le montant total investi dans le support (exprimé en milliers d'euros), on obtient un nombre toujours compris entre 0 et 100 dont l'interprétation la plus communément admise est qu'il représenterait l'augmentation théorique du chiffre d'affaires (en pourcentage) dans le trimestre qui suit la campagne publicitaire, si les conditions économiques générales et le niveau de la concurrence avaient le bon goût de rester stables...
Il faut ajouter que la proportionnalité de l'effet au montant de l'investissement **par type de support** n'est admissible que dans certaines limites: un seuil minimal, en dessous duquel l'effet est quasi-nul et un seuil maximal, au dessus duquel l'effet rest pratiquement constant. On imposera que chacun des investissements par type de support reste dans son domaine de proportionnalité. Dans ce cas, il est raisonnable d'admettre que les effets conjugués s'additionnent. les coefficients par type de media et leurs domaines sont présentés dans le tableau suivant:

Support	**coeff. défficacité**	**seuil min** (Keuros)	**seuil** max (Keuros)
Affichage	2/1000	200	1000
Presse	3/1000	300	1500
Radio	4/1000	500	2000
Télévision	5/1000	600	3000
Cinéma	1/1000	300	600

Table 2: Efficacité des différents supports

1. *Définir précisement les 10 variables de décision du modèle.* <u>*Indication*</u>*: les 10 variables représentent des montant de budgets mais vous devez bien spécifier "montant du budget investi dans...."*

2. *Exprimer la fonction objectif et préciser sa signification.* <u>*Indication*</u>*: la constitution du plan media vise à obtenir une efficacité maximale pour l'investissement publicitaire global.*

3. *Il existe également un certain nombre de contraintes et de règles empiriques qui limitent le choix de la répartition du budget global entre les différents supports.*

   (a) *Ecrire 3 types de contraintes correspondant à la spécification du problème (limite budgétaire, respect des seuils, non négativité).*

   (b) *Ecrire les contraintes correspondant aux règles emprririques suivantes*:

      i. *l'ordre d'importance des sous-budgets consacrés à la presse écrite doit être conforme à l'ordre d'importance des tirages à savoir: tirages de $Q_1 \geq$ tirages de $Q_2 \geq$ tirages de Q_3 pour les quotidiens et tirages de $H_1 \geq$ tirages de H_2 pour les hebdomadaires,*

      ii. *le budget consacré à Q_3 ne peut pas être inférieur à* 50% *de celui consacré à Q_1,*

      iii. *le budget alloué à la télévision doit au moins être le double de celui alloué à la presse écrite, pour la radio, le budget de R_1 doit être exactement* 50% *plus élevé que celui de R_2.*

EXERCICE 4

Une société de conception de réseaux de télécommunivation vient de signer un contrat d'équipement en cabines téléphoniques publiques avec un pays de l'Europe de l'Est. Le plan d'équipement doit durer 6 mois et consiste à installer chaque mois i un nombre b_i de cabines ($i = 1, ..., 6$).

i	1	2	3	4	5	6
b_i	200	200	300	700	1000	200

Table 3: Cabines à installer chaque mois

Les cabines sont importées d'un pays d'Asie du Sud-Est et stockées dan sun entrepôt central avant d'être installées. L'approvisionnement du stock s'effectue en début de mois, la quantité approvisionnée pouvant correspondre à l'installation de plusieurs mois. Le stock final au terme du plan doit être nul.

Le directeur des achats, précisant que chaque approvisionnement engendre des frais fixes d'un montant de $a = 2000$ euros (quelle que soit la quantité commandée), préfèrerait tout approvisionner en début de mois 1.

Le directeur financier, lui, voudrait limiter les stocks qui génèrent des coûts (entretien, location de containers, risque de détérioration, immobilisation,...) et propose d'approvisionner chaque début de mois la quantité à installer. Il a établi que article en stock en début de mois coûte $s = 2$ euros pour le mois.

Le directeur général souhaite déterminer une politique d'approvisionnement qui minimise la somme de ces 2 coûts (approvisionnement + stock).

Remarque: on notera qu'il n'est pas nécessaire de comptabiliser lors du mois i un coût de stockage pour les cabines à installer durant ce même mois i ($i = 1, ..., 6$).

Pour déterminer une politique optimale, on nous propose de modéliser le problème sous la forme d'un programme linéaire en nombre entiers.

1. Définissez précisément les variables de décision. Vous prendrez soin notamment de définir toutes les variables nécessaires à l'expression de la fonction objectif.
2. Ecrivez les différentes contraintes.
3. Ecrivez la fonction objectif.

2 Prog. Linéaire continue : résolution graphique et numérique (simplex en 1 phase et 2 phases)

EXERCICE 1

Soit le programme linéaire en variables continues suivant:

$$(P_1)\left\{\begin{array}{l} \max f_1(x_1,x_2) = \ 20x_1 + 30x_2 \\ s.c. \left| \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

1. Mentionnez une solution admissible évidente pour (P_1).
2. Résolvez graphiquement (P_1).
3. Ecrivez (P_1) sous sa forme santdard puis résolvez le problème à l'aide de la méthode du simplex en 1 phase.

EXERCICE 2

Soit le programme linéaire en variables continues suivant:

$$(P_2)\left\{\begin{array}{l} \max f_2(x_1,x_2) = \ 2x_1 + x_2 \\ s.c. \left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

1. Mentionnez une solution admissible évidente pour (P_2).
2. Résolvez graphiquement (P_2).
3. Ecrivez (P_2) sous sa forme santdard puis résolvez le problème à l'aide de la méthode du simplex en 1 phase.

EXERCICE 3

Soit le programme linéaire en variables continues suivant:

$$(P_3) \begin{cases} \max f_3(x_1, x_2) = \; x_1 + 3x_2 \\ s.c. \left| \begin{array}{l} 2x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

1. Mentionnez une solution admissible évidente pour (P_3).
2. Résolvez graphiquement (P_3).
3. Ecrivez (P_3) sous sa forme santdard puis résolvez le problème à l'aide de la méthode du simplex en 1 phase.

EXERCICE 4

Soit le programme linéaire en variables continues suivant:

$$(P_4) \begin{cases} \max f_4(x_1, x_2) = \; -2x_1 + 3x_2 \\ s.c. \left| \begin{array}{l} x_1 \leq 5 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

1. Résolvez graphiquement (P_4).
2. Que remarquez vous ?

EXERCICE 5

Soit le programme linéaire en variables continues suivant:

$$(P_5) \begin{cases} \max f_5(x_1, x_2) = \; 3x_1 + 2x_2 \\ s.c. \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

1. Résolvez graphiquement (P_5).
2. Que remarquez vous ?

EXERCICE 6

Soit le programme linéaire en variables continues suivant:

$$(P_6) \begin{cases} \max f_6(x_1, x_2) = \; 1000x_1 + 1200x_2 \\ s.c. \left| \begin{array}{l} 10x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ 2x_1 + 3x_2 = 60 \\ x_1 \leq 12 \\ x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

1. $(X_1, x_2) = (0, 0)$ est elle solution évidente de (P_6) ?
2. Ecrivez (P_6) sous sa forme standard.
3. Pouvez vous appliquer le simplex en 1 phase ?
4. Sinon, résolvez (P_6) au moyen du simplex en 2 phases.

3 Prog. Linéaire entière: résolution par méthode arborescente

EXERCICE 1: méthode de Dakin (une méthode arborescente)

Cette méthode arborescente “meilleur d'abord” est utilisée pour résoudre des PNE. On résout d'abord la relaxation conitnue du problème. Puis, la séparation se fait sur la variable qui a la plus grande partie fractionnaire dans la solution courante:

$$si \;\; x = a + \frac{b}{c} \; (avec \;\; b < c) \tag{1}$$

on sépare en $x \leq a$ et $x \geq a + 1$.

Développez l'arborescence pour l'exemple suivant:

$$(P_7) \left\{ \begin{array}{ll} \max f_7(x_1, x_2) = & 3x_1 + 2x_2 \\ & \left| \begin{array}{l} -2x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 9x_1 - 2x_2 \leq 36 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in N \end{array} \right. \\ s.c. & \end{array} \right.$$

Les solutions des programmes linéaires continus à résoudre en chaque noeud se trouvent facilement de façon géométrique (à faire donc). La solution continue du problème à la racine est obtenu au point que nous noterons $A = (4 + \frac{20}{31}; 2 + \frac{28}{31})$.

Indication pour la suite: voici les coordonnées des points à considérer successivement (mais pas obligatoirement dans cet ordre):
$B = (4; 3 + \frac{1}{3})$ avec $f_7(x) = 18 + \frac{2}{3}$; $C = (4 + \frac{4}{9}; 2)$ avec $f_7(x) = 17 + \frac{1}{3}$; $D = (4 + \frac{1}{2}; 3)$ avec $f_7(x) = 19 + \frac{1}{2}$; $E = (3; 4)$ avec $f_7(x) = 17$; et OPT à trouver.

EXERCICE 2: problème du sac à dos en variables 0-1

Pour embarquer dans l'avion, une valise ne doit pas peser plus de B kg. Il ne va pas être possible d'emporter les n objets que vous vouliez y placer et devez faire des choix. Vous avez pesé chaque objet, et p_i est le poids de l'objet i, $i = 1, ..., n$.

Pour optimiser le contenu de votre valise, vous attribuez à chaque objet une note “d'utilité” entre 1 et 20. c_i est donc la note attribuée à l'objet i, $i = 1, ..., n$.

Vous voulez maximiser l'utilité globale de la valise, égale à la somme des utilités des objets emportés.

1. On définit les variables de décision x_i, $i = 1, ..., n$ avec $x_i = 1$ si l'objet i est mis dans la valise et $x_i = 0$ sinon.
   Ecrivez le programme linéaire correspond.

2. Ecrivez le programme linéaire si le poids maximum autorisé est $B = 17$ kg et que vous avez 4 objets de poids respectifs 3,7,9 et 6 kg, et d'utilités respectives 8, 18, 20 et 11.

On suppose que les objets sont fractionnables. Le programme (P_r) est le programme (P) dans lequel on a remplacé $x_i \in \{0;1\}$ par $x_i \in [0,1]$. Dans le cas particulier du sac à dos, (P_r) se résout optimalement de la façon suivante (sans utiliser le simplex):

(a) Triez les ratios $\frac{c_i}{p_i}$ par ordre décroissant. Ensuite, selon cet ordre, mettez les objets dans le sac jusqu'à ce que l'on dépasse B. Le premier obejt qui dépasse B est mis fractionnaire de façon à compléter le poids de la valise jusqu'à B.

(b) Soit i_{max} tel que $\sum_{i=1}^{i_{max}} p_i \leq B$ et $\sum_{i=1}^{i_{max}+1} p_i > B$. On a donc:
$x_i = 1$ pour $i = 1, ..., i_{max}$;
$x_{i_{max}+1} = \frac{B - \sum_{i=1}^{i_{max}} p_i}{p_{i_{max}+1}}$;
$x_i = 1$ pour $i = i_{max} + 2, ..., n$.

3. Quelle est la solution dans le cas de l'instance de la question 2, si on suppose les objets fractionnables ?

4. Résolvez maintenant (P) avec l'instance donnée en 2) par une méthode arborescente. En chaque noeud on obtient un majorant en résolvant la relaxation continue du problème en chaque noeud.