TD3 : Programmation Quadratique Convexe en variables entières : du séparable au non séparable

QMKP séparable

Soit le problème séparable sous sa forme générale suivant :

$$(QMKP)\begin{cases} \max\ f(x)=\sum_{j=1}^n f_j(x_j)=\sum_{j=1}^n c_jx_j-d_jx_j^2 \\ s.t.\left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\le b_i, i=1,...,m \\ 0\le x_j\le u_j, j=1,...,n \\ x_j\in N, j=1,...,n \end{array}\right. \end{cases} \tag{1}$$

Partons de l'exemple suivant sur lequel nous allons dérouler la méthode visant ̀linéariser le problème $(QMKP)$ en un problème équivalent (MKP) en variables $0-1$.

Soit l'application numérique suivante :

$$(QMKP_{2var})\begin{cases} \max\ f(x)=\sum_{j=1}^n f_j(x_j)=69x_1+71x_2-15x_1^2-17x_2^2 \\ s.t.\left| \begin{array}{l} 81x_1+50x_2\le 61 \\ 17x_1+2x_2\le 105 \\ 0\le x_1\le 3 \\ 0\le x_2\le 3 \\ x_1,x_2\in N, j=1,2 \end{array}\right. \end{cases} \tag{2}$$

1. Ré écrivez les variables entières comme une somme de variables $0-1$ selon l'expansion directe des variables.
2. Effectuez une linéarisation par morceaux afin d'obtenir un problème linéaire en variables $0-1$ équivalent que vous noterez (MKP).

QMKP non séparable

Nous présentons dans ce chapitre une méthode visant à résoudre de manière exacte le problème $(QMKP)$ dont la fonction économique est concave et non séparable. Notre approche se déroule en deux étapes. La première repose sur une transformation du problème initial non séparable en un problème équivalent séparable $(QP_{x,y})$. Cette transformation est effectuée en utilisant la méthode de décomposition de Gauss appliquée à la matrice constituant le terme quadratique de la fonction objectif. Cette transformation nécessite l'ajout de variables de décision continues et de contraintes linéaires. Lors de la deuxième étape, le problème précédemment reformulé est linéarisé en approchant chaque terme carré par K fonctions linéaires correspondant à la tangente de l'hyperbole en K points de rupture. Le problème linéarisé est noté $(LP^K_{x,y})$. Nous établissons la preuve de la propriété intuitive suivante : lorsque K est très grand, alors la valeur optimale du problème linéarisé $(LP^K_{x,y})$ est extrêmement proche (voir égale) à la valeur optimale de $(QP_{x,y})$ (elle même égale à la valeur optimale de $(QMKP)$). Le reste du chapitre est dédié à l'implémentation d'un algorithme de *branch-and-bound* pour traiter le problème linéarisé $(LP^K_{x,y})$.

Nous consacrons la section suivante à l'énoncé du problème non séparable que nous traitons. La section suivante est dédiée à la description de la transformation de (QMKP) en un problème séparable. De plus, nous établissons une comparaison théorique de notre approche avec celle proposée par Djerdjour et al.. La partie suivante détaille la technique de linéarisation qui fournit de surcroît une méthode exacte de résolution pour (QMKP).

1 Contexte

Nous traitons dans ce chapitre le problème de **multi-sac-à-dos quadratique convexe non séparable en variables entières** que nous notons $(QMKP)$ et qui se présente sous la forme matricielle suivante :

$$(QMKP)\left\{\begin{array}{ll}\max & f(x) = c^t x - x^t Q x \\ s.c & \left|\begin{array}{l} Ax \leq b \\ 0 \leq x \leq u \quad x \text{ } entier\end{array}\right.\end{array}\right.$$

où

— Le vecteur c est de dimension n et ses coefficients c_i sont positifs ou nuls.

— La matrice Q est *symétrique* définie positive de dimension (n, n).

— La matrice des contraintes A est de dimension (m, n) et ses coefficients a_{ji} sont positifs ou nuls. On appelle ces contraintes des *contraintes de capacité*.

— Le vecteur *second membre* b, de dimension m, est à coordonnées, b_j, positives ou nulles.

— Le vecteur x est de dimension n et ses coordonnées x_i sont entières et bornées supérieurement par des entiers u_i $(i = 1, .., n)$. On note X_i l'ensemble de valeurs entières que peut prendre chaque variable x_i et $|X_i|$ le cardinal de cet ensemble.

Compte tenu des résultats encourageants obtenus dans la section suivante concernant le problème du multi-sac-à-dos quadratique concave séparable en variables entières, il semble naturel d'adopter l'idée de notre approche dans un contexte où la fonction économique est non séparable. Cette approche, qui ne pourra pas être suivie dans son intégralité est basée sur la linéarisation par morceaux du problème initial séparable. La linéarisation par morceaux ne peut être appliquée dans le contexte de ce problème parce que la transformation du non séparable vers le cas séparable nécessite l'introduction de variables réelles supplémentaires. En conséquence, il n'est plus possible d'utiliser le développement direct des variables entières visant à ré-écrire les variables entières en variables binaires. Développement des variables entières, qui constitue l'un des points clés de la linéarisation par morceaux. Toutefois, une autre linéarisation est proposée.

Pour ce faire, nous proposons de transformer le problème $(QMKP)$ non séparable en un problème séparable équivalent. Cette transformation est fréquemment envisagée en algèbre linéaire du fait que les formes quadratiques diagonales sont plus simples à analyser qu'une forme quadratique comportant des termes croisés.

Il existe, donc des méthodes de transformation bien connues qui transforment une forme quadratique quelconque en une forme quadratique dont la matrice représentative est diagonale. Bien entendu, nous ne pouvons pas appliquer n'importe quel changement de coordonnées à notre problème $(QMKP)$. En effet, notre forme quadratique initiale à matrice non diagonale admet des propriétés particulières que nous souhaitons conserver. D'autre part, cette forme quadratique est incluse dans un problème bien particulier dont nous devons tenir compte. C'est pourquoi, nous avons testé trois transformations (les deux premières sont bien connues, la troisième est adaptée à notre problème initial) du problème initial en un problème connu i.e. séparable.

Nous présentons, ci-dessous, les trois possibilités que nous avons envisagées pour transformer notre problème $(QMKP)$ non séparable en un problème séparable :

1. **Diagonaliser la matrice Q** de telle sorte que $Q = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale constituée des **valeurs propres** de la matrice Q et P est une matrice de passage (c'est-à-dire constituée des vecteurs propres associés aux valeurs propres de Q) orthogonale (c'est-à-dire telle que $P^t = P^{-1}$ et telle que les vecteurs propres soient orthonormaux). Cette diagonalisation est réalisable en raison de l'hypothèse

de symétrie de la matrice Q. Nous proposons alors d'appliquer le **changement de variables** $\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x} \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{P^{-1}}\mathbf{y}$. Une fois le changement de variables appliqué, nous traitons un problème séparable.

2. **Rendre diagonale la matrice Q** à l'aide de la **décomposition en carrés de Gauss** (méthode analytique) encore appelée décomposition en matrice diagonale à l'aide des **matrices d'éliminations de Gauss** (méthode matricielle). Supposons que la matrice Q soit symétrique et carrée de dimension n. Q est remplacée par le produit matriciel suivant : $E_1^{-1}E_2^{-1}...E_{n-1}^{-1}D(E_{n-1}^t)^{-1}...(E_2^t)^{-1}(E_1^t)^{-1}$ où les matrices E_i $\forall i = 1, ..., n-1$ sont les matrices d'éliminations de Gauss et la matrice D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les pivots de Gauss obtenus lors de la transformation. Le changement de variables serait le suivant : $\mathbf{y} = (\mathbf{E^t_{n-1}})^{\mathbf{-1}}...(\mathbf{E^t_2})^{\mathbf{-1}}(\mathbf{E^t_1})^{\mathbf{-1}}\mathbf{x} \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{E^t_1}\ \mathbf{E^t_2}\ ...\ \mathbf{E^t_{n-1}}\ \mathbf{y}$. Le problème ainsi obtenu est un problème séparable.

3. La dernière transformation, que nous avons retenue en définitive, consiste à appliquer une méthode de **décomposition de Gauss à la matrice** Q mais en effectuant un **changement de variables partiel**, dérivé de celui évoqué dans la deuxième possibilité. Nous conservons les n variables initiales x et nous introduisons n variables supplémentaires y ainsi qu'au pire des cas n contraintes. Nous détaillons cette méthode ensuite.

Notre choix s'est donc porté sur la dernière transformation. Nous justifions dans la section suivante notre choix.

2 Du non séparable au séparable

Cette section est dédiée à la première étape de notre approche. Nous convertissons le problème non séparable en un problème séparable. Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, une technique classique consiste à diagonaliser la matrice Q en utilisant les valeurs propres de Q. Nous établissons ensuite les principaux inconvénients quant à l'utilisation de cette technique dans notre contexte. Pour ces raisons, nous proposons l'utilisation d'une décomposition de Gauss de la matrice Q dans la sous-section suivante.

Afin de rendre la lecture de ce chapitre plus aisée, nous proposons d'appliquer les transformations 1 et 3 sur un exemple simple en deux dimensions. Le programme quadratique $(QMKP_{ex})$ correspondant est le suivant :

$$(QMKP_{ex}) \begin{cases} \max \ f(x) = 69x_1 + 71x_2 - (15x_1^2 + 2x_1x_2 + 17x_2^2) \\ s.c. \left| \begin{array}{l} 81x_1 + 50x_2 \leq 61 \\ 17x_1 + 2x_2 \leq 105 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \ entiers \end{array} \right. \end{cases} \tag{3}$$

La formulation matricielle du problème est la suivante :

$$(QMKP_{ex}) \begin{cases} \max \ f(x) = c_{ex}^t x - x^t Q_{ex} x \\ s.c. \left| \begin{array}{l} A_{ex} x \leq b_{ex} \\ 0 \leq x \leq u_{ex} \\ x \ entier \end{array} \right. \end{cases} \tag{4}$$

avec

$$Q_{ex} = \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}, c_{ex} = \begin{pmatrix} 69 \\ 71 \end{pmatrix}, A_{ex} = \begin{pmatrix} 81 & 50 \\ 17 & 2 \end{pmatrix}, b_{ex} = \begin{pmatrix} 61 \\ 105 \end{pmatrix} \text{ et } u_{ex} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La valeur optimale $Z[IQP_{ex}]$ est éagle à 54 et sa solution optimale (x_1^*, x_2^*) vaut $(0, 1)$. La valeur optimale du problème relaxé continûment (IQP_{ex}) est $Z[\overline{IQP_{ex}}]$ et est égale à 62.87 et sa solution optimale correspondante $(\overline{x_1^*}, \overline{x_2^*})$ est égale à $(0.17, 0.95)$. Les solutions et valeurs optimales sont obtenues par l'emploi de IBM ILOG CPLEX 12.2. En effet, puisque le problème est convexe, CPLEX est en mesure de calculer les valeurs et solutions optimales des problèmes en nombres entiers et en variables continues.

2.1 Diagonalisation à l'aide des valeurs propres

Tout d'abord, rappelons deux théorèmes, bien connus d'algèbre linéaire, nécessaires pour établir la transformation utilisant les valeurs propres.

THEOREME : Soit Q une matrice (n, n) symétrique. Alors il existe une matrice orthogonale P qui diagonalise Q i.e. $P^tQP = D$ où P est orthogonale.

THEOREME : Soit $Q = (q_{ik})_{n\times n}$ une matrice symétrique de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Soit P une matrice orthogonale qui diagonalise Q. Alors le changement de coordonnées $x = Py$ transforme $\sum_{i,k}^n q_{ik}x_ix_k$ en $\sum_i^n \lambda_i y_i^2$.

D'après le théorème , le changement de variables $x = Py$ (i.e $y = P^{-1}x$) transforme $(QMKP)$ en un programme séparable en variables discrètes comme suit :

$$(QP_{sepVP}) \left\{ \begin{array}{l} \max\ g(y) = c^t P_{ex} y - y^t D y \\ s.c. \left| \begin{array}{l} APy \leq b \\ 0 \leq y \leq P^{-1}u \\ y \in Y \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{5}$$

où Y est un ensemble de valeurs discrètes induit du produit de P^{-1} (qui peut contenir des valeurs négatives) par chaque variable entière x prenant leur valeur entre 0 et u.

Appliquons cette technique à $QMKP_{ex}$. La première étape consiste à diagonaliser Q_{ex}. Les valeurs propres correspondant à $QMKP_{ex}$ sont les deux valeurs réelles suivantes $\lambda_1 = 16 + \sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 16 - \sqrt{2}$, et les vecteurs propres orthonormés sont $v_1^t = (\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}})$ et $v_2^t = (\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}})$. Alors la matrice de passage orthogonale associée P_{ex} est égale à $P_{ex} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$. $(QMKP_{ex})$ devient alors :

$$(QMKP_{exVP}) \left\{ \begin{array}{l} \max\ g(y) = 92.0006036 y_1 + 36.57771 y_2 \\ -(17.4142136 y_1^2 + 14.5857864 y_2^2) \\ s.c. \left| \begin{array}{l} 77.1913346 y_1 + 55.7000705 y_2 \leq 61 \\ 8.35337742 y_1 + 14.9405852 y_2 \leq 105 \\ y_1 \in Y_1 \\ y_2 \in Y_2 \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{6}$$

où $Y_1 = \{0, 0.092, 0.38, 0.76, 1.14, 1.30, 1.68, 1.84, 2.07, 2.61, 2.99, 3.23\}$ et $Y_2 = \{0, -0.38, -0.76, 0.15, 0$

Remarque : Pour une bonne lisibilité des ensembles Y_1 et Y_2, nous avons tronqué les valeurs que peuvent prendre les variables y_1 et y_2, toutefois ces valeurs peuvent Ãªtre irrationnelles.

Concluons sur l'emploi de cette transformation au moyen des valeurs propres :

- Les problèmes $(QMKP)$ et (QP_{exVP}) devraient être équivalents (*i.e.* les valeurs optimales devraient être égales) mais ce n'est pas le cas en pratique. En effet, les valeurs optimales obtenues pour les deux problèmes en utilisant IBM ILOG CPLEX 12.2 sont différrentes du fait de l'irrationalité des valeurs propres.

- Les variables de décision y sont maintenant discrètes et non plus entières ce qui ajoute une difficulté supplémentaire pour résoudre (QP_{exVP}) à travers une méthode de *branch-and-bound*. En effet, même IBM ILOG CPLEX 12.2 ne gère pas ce type de variables.

Afin de contourner ces deux principaux obstacles, nous proposons dans la prochaine sous-section l'utilisation de la décomposition de Gauss avec changement de variables partiel pour rendre séparable $(QMKP)$.

2.2 Décomposition de Gauss

La décomposition de Gauss consiste à factoriser la matrice Q en un produit de matrice $Q = UDL$ où L est une matrice triangulaire inférieure, U une matrice triangulaire supérieure et D une matrice diagonale. Cette technique a déjà été utlilisée par Zheng et al. pour traiter $(QMKP)$ non convexe afin d'obtenir une relaxation intéressante pour le problème de départ.

Plus précisemment, les principales phases de cette technique consistent à rendre triangulaire la matrice Q en la multipliant par la gauche avec la matrice d'élimination de Gauss ($n-1$ matrices d'élimination si Q est une matrice $n \times n$ comme dans notre cadre d'étude).Par exemple, la matrices d'élimination E_1 à la première itération ($k = 1$) s'écrit de la façon suivante : $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & ... & 0 \\ -\frac{q_{21}^{(1)}}{q_{11}^{(1)}} & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & \\ -\frac{q_{i1}^{(1)}}{q_{11}^{(1)}} & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & \\ -\frac{q_{n1}^{(1)}}{q_{11}^{(1)}} & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$

L'algorithme de triangularisation est le suivant :

$$k = 1, ..., n-1 \left\{ \begin{array}{lll} q_{ij}^{(k+1)} = q_{ij}^{(k)} & & i = 1, ..., k \; j = 1, ..., n \\ q_{ij}^{(k+1)} = 0 & & i = k+1, ..., n \; j = 1, ..., k \\ q_{ij}^{(k+1)} = q_{ij}^{(k)} - \frac{q_{ik}^{(k)} q_{kj}^{(k)}}{q_{kk}^{(k)}} & & i = k+1, ..., n \; j = k+1, ..., n \end{array} \right. \tag{7}$$

Afin d'obtenir une matrice diagonale, il suffit alors de multiplier Q par la droite par les transposées des matrices d'élimination successives. Plus généralement, à l'issue de l'algorithme de décomposition de Gauss on a :
$D = E_{n-1} \times .... \times E_1 \times Q \times E_1^t \times ... \times E_{n-1}^t$. Ainsi Q peut être remplacée par D de la

façon suivante :
$Q = (E_{n-1} \times .... \times E_1)^{-1} \times D \times (E_1^t \times ... \times E_{n-1}^t)^{-1}$. En conséquence, le changement de variable suivant peut être effectué $y = Rx$
tel que $x^tQx = \underbrace{x^tE_{n-1}^{-1} \times .... \times E_1^{-1}}_{=y^t} \times D \times \underbrace{(E_{n-1}^t)^{-1} \times ... \times (E_1^t)^{-1}x}_{=y}$,
où $R = (E_{n-1}^t)^{-1} \times ... \times (E_1^t)^{-1}$.

La méthode de décomposition de Gauss emploie des matrices de structures particulières (*i.e.* unidiagonales) ce qui simplifie aisément le calcul des matrices inverses.

A ce stade du raisonnement, nous aurions pu choisir d'effectuer un changement de variables complet. C'est à dire que nous aurions pu choisir de remplacer le vecteur de décision x par y (cf. transformation 2 présentée dans l'introduction de ce chapitre). Néanmoins, nous aurions été confrontés à l'une des difficultés rencontrée à l'occasion de la transformation au moyen des valeurs propres : la nature des variables serait discrète et non réelle ou entière. En conséquence, nous avons décidé de conserver les contraintes linéaires initiales exprimées à l'aide des variables de décision x. Nous avons remplacé x uniquement au sein de la fonction objectif et nous avons introduit le changement de variables dans les contraintes (c'est la transformation 3 présentée dans l'introduction de ce chapitre).

$(QMKP)$ devient alors le programme quadratique séparable en variables mixtes suivant :

$$(QP_{x,y}) \left\{ \begin{array}{ll} \max & g(y) = c'^t y - \frac{1}{2} y^t D y \\ s.c. & \left| \begin{array}{l} Rx = y \\ Ax \leq b \\ 0 \leq x \leq u \\ y \in \mathbb{R}^n \\ x \in \mathbb{N}^n \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{8}$$

où $c' = (c'_1, ..., c'_i, ..., c'_n) = c^t \times R^{-1}$ est le nouveau vecteur des coefficients de la fonction objectif.

Appliquons cette transformation à notre simple exemple. Le problème séperable résultant est le suivant :

$$
(QP_{ex,x,y}) \begin{cases} \max \; g(x,y) = 69x_1 + 71x_2 - 15y_1^2 - \frac{254}{15}y_2^2 \\ s.c. \left| \begin{array}{l} 81x_1 + 50x_2 \leq 61 \\ 17x_1 + 2x_2 \leq 105 \\ x_1 + \frac{1}{15}x_2 - y_1 = 0 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \\ 0 \leq y_1 \leq \frac{47}{7} \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ y_1, y_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right. \end{cases} \tag{9}
$$

La valeur optimale de $(QP_{ex,x,y})$ est $Z[QP_{ex,x,y}] = Z[IQP_{ex}] = 54$ est la valeur optimale de la relaxation continue est $Z[\overline{QP_{ex,x,y}}] = Z[\overline{IQP_{ex}}] = 62.87$.

Conclusions sur cette procédure :

- Le problème transformé séparable $(QP_{x,y})$ reste convexe.
- $(QMKP)$ et $(QP_{x,y})$ sont équivalents , dans le sens où les fonctions objectifs ont les mêmes valeurs.
- $(QP_{x,y})$ est un programme en variables mixtes *i.e.* les variables ne prennent pas leurs valeurs parmi un ensemble discret de valeurs.
- La transformation peut être réalisée en temps polynomial.

3 Un schéma de linéarisation

Dans cette section nous proposons de résoudre exactement $(QMKP)$ *via* un programme linéarisé équivalent $(LP^K_{x,y})$. Ce dernier est paramétré par K.

Le problème linéarisé fournit un majorant pour le problème quadratique initial quand K est fixé. De plus, quad K est suffisamment grand alors le problème linéarisé est équivalent au problème quadratique initial. De surcroît, une méthode exacte peut être obtenue grâce au problème transformé. Nous décrivons dans cette section le schéma de linéarisation proposé ainsi que des propriétés relatives à ce présent schéma fournissant un majorant ou une solution optimale pour $(QMKP)$.

3.1 Linéarisation de $(QP_{x,y})$

Voici les principales étapes de la linéarisation de $(QP_{x,y})$.

Linéarisation de la fonction objectif. La fonction objectif de $(QP_{x,y})$ peut s'écrire comme $\sum_{i=1}^{n} g_i(y_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^{'} y_i - d_i y_i^2$, où $c_i^{'} = [cR^{-1}]_i = \sum_{i=1}^{n} c_i R_{ji}^{-1}$.

Tout d'abord, calculons les bornes supérieures et inférieures B_i^- et B_i^+ de chaque variable y_i en utilisant les contraintes $Rx = y$ et les bornes sur les variables x_i :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, B_i^- \leq y_i \leq B_i^+ \, avec \begin{cases} B_i^- = \sum_{j|R_{ij}<0} R_{ij} u_j \\ B_i^+ = \sum_{j|R_{ij}>0} R_{ij} u_j) \end{cases}$$

Puis, chaque fonction $g_i(y_i)$ est remplacée par une fonction linéraire par morceaux $h_i(y_i)$ telle que $h_i(y_i) \geq g_i(y_i) \; \forall y_i \in [B_i^-, B_i^+]$. Nous construisons $h_i(y_i)$ en utilisant K segments tangents à la courbe G_i qui représente la fonction g_i. K est un paramètre de la procédure et son choix est évidemment une étape clef afin de calculer une sur-estimation de la valeur optimale de $(QP_{x,y})$ la plus fine possible. Ce point crucial est discuté dans la sous-section suivante.

Transformation des variables y en z. Afin de résoudre le programme associé à la courbe H_i, nous associons une variable z_{ik} au k^{eme} segment de H_i. Nous remplaçons donc chaque variable y_i par K non-négatives variables réelles z_{ik} en posant :

$$y_i = B_i^- + \sum_{k=1}^{K} z_{ik}$$

Introduisons les notations suivantes pour formuler $(LP_{x,z}^K)$:

- $cst = \sum_{i=1}^{n} g_i(B_i^-)$;
- $step_i = \frac{B_i^+ - B_i^-}{K-1}, i = 1, ..., n$;

et pour chaque $i \in \{1, ..., n\}$ et $k \in \{1, ..., K\}$:

- $r_{ik} = B_i^- + (k-1) \times step_i$: r_{ik} est l'abscisse du k^{eme} point tangent entre H_i et G_i ;
- $\alpha_{ik} = c_i^{'} - d_i r_{ik}$: α_{ik} est le coefficient directeur du k^{eme} segment ;
- $\beta_{ik} = g(r_{ik}) - r_{ik}\alpha_{ik}$: β_{ik} est l'ordonnée à l'intersection du k^{eme} segment ;
- $t_{i1} = B_i^-, t_{i,K+1} = B_i^+, t_{ik} = \frac{\beta_{i,k-1} - \beta_{i,k}}{\alpha_{i,k} - \alpha i,k-1}$, $k = 2, ..., K$: t_{ik} est l'abscisse du point d'intersection entre les k^{th} et $(k+1)^{eme}$ segments ;
- $Z_{ik} = t_{i,k+1} - t_{ik}$: Z_{ik} est la borne supérieure de la variable z_{ik}.

Nous pouvons maintenant établir le problème $(LP_{x,z}^K)$ qui est un problème en variables mixtes comptant, n variables entières x_i, Kn non négatives et bornées variables réelles z_{ik} et $m + n$ contraintes linéaires :

$$(LP^K_{x,z}) \begin{cases} \max \; h(z) = cst + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} z_{i,k} \\ s.c. \left| \begin{array}{ll} Ax \leq b & \\ \sum_{j=1}^n R_{ij} x_j = B_i^- + \sum_{k=1}^K z_{ik} & i = 1, \ldots, n \\ 0 \leq x_i \leq u_i & i = 1, \ldots, n \\ x_i \in \mathbb{N} & i = 1, \ldots, n \\ 0 \leq z_{ik} \leq Z_{ik} & i = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, K \end{array} \right. \end{cases} \tag{10}$$

$(LP^K_{x,z})$ est une sur-estimation de la valeur optimale de $(QMKP)$ si K n'est pas assez grand. Cependant nous montrons dans la sous-section suivante comment déterminer la bonne valeur de K telle que $(LP^K_{x,z})$ fournisse la valeur optimale de $(QMKP)$.

3.2 Une propriété intuitive pour un problème linéarisé équivalent

Le théorème suivant indique que la linéarisation proposée peut être utilisée non seulement pour produire un majorant fin mais également pour résoudre de façon exacte le problème initial.

Introduisons les notations suivantes. Nous notons z^K la valeur optimale de $(LP^K_{x,z})$ pour K fixé et z^* la valeur optimale de $(QMKP)$.

$$\lim_{K \to +\infty} z^K = z^*$$

L'intérieur de l'enveloppe constituée par l'ensemble des tangentes devient intuitivement très proche de la courbe représentant chaque fonction $g_i(y)$ quand K devient grand. De plus quand K tend vers $+\infty$ l'enveloppe se confond avec la courbe. Montrons formellement ce résultat. Nous démontrons que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists K > 0 \text{ tel que } |z^K - z^*| = z^K - z^* < \epsilon. \tag{11}$$

Soeint $\epsilon > 0$ et K fixé. Nous considérons la solution optimale (x^K, z^K) de $(LP^K_{x,z})$. x^K est une solution réalisable de $(QMKP)$. Nous posons ensuite $y_i^K = B_i^- + \sum_{k=1}^K z_{ik}^K$. Nous obtenons

$$z^K = h(x^K, z^K) = \sum_{i=1}^n \left[g_i(y_i^K) + \epsilon_i^K \right] = f(x^*) + \sum_{i=1}^n \epsilon_i^K$$

où $\epsilon_i^K = h_i(y_i^K) - g_i(y_i^K) \geq 0$.

Puisque x_k est réalisable pour $(QMKP)$ (pas nécessairement optimale), nous prenons

$$z^k \leq z^* + \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^K, \text{i.e. } z^K - z^* \leq \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^K$$

Pour démontrer (11), il suffit maintenant de montrer que, pour K assez grand

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^K < \epsilon$$

Nous montrons que pour K assez grand, $\epsilon_i^K < \frac{\epsilon}{n}$, le résultat est obtenu. L'idée réside dans le fait que l'écart maximal entre l'enveloppe constituée par les tangentes et la courbe doit réduire selon la précision choisie (ici $\frac{\epsilon}{n}$) et ce, en ajoutant des tangentes autant que nécessaire. Considérons deux tangentes successives aux points A et B ayant respectivement pour abscisse y_1 et y_2, tels que $y_1 \leq y_2$. Sans perte de généralité, nous pouvons considérer que A et B sont tous les deux situés soit sur la droite de la parabole, soit sur la gauche, puisque l'on peut toujours ajouter un point tangent au sommet de la parabole. Supposons que A et B sont situés, tous les deux, à gauche du sommet de la parabole. Notons h l'écart maximal entre h_i et g_i dans l'intervalle $[y_1, y_2]$. Puisque la fonction g_i est croissante, nous avons que : $h \leq H$ avec
$H = g(y_2) - g(y_1) = c_i^{'}y_2 - \frac{1}{2}d_iy_2^2 - c_i^{'}y_1 + \frac{1}{2}d_iy_1^2$.

Notons $step$ l'espace entre les abscisses de A et B ($step = y_2 - y_1$). En utilisant des notions de base d'algèbre, on obtient facilement que :

$$h \leq step\left(c_i^{'} - \frac{1}{2}d_i(y_1 + y_2)\right),$$

et comme $y_1 \geq B_i^-$ et $y_2 \geq B_i^-$ nous avons :

$$h \leq step\ (c_i^{'} - d_iB_i^-)$$

Supposons maintenant que A et B se situent tous les deux à droite du sommet de la parabole, la précédente sur-estimation h devient :

$$h \leq step\ (d_iB_i^+ - c_i^{'})$$

Comme $step = \frac{B_i^+ - B_i^-}{K}$ alors nous pouvons sur-estimer ϵ_i^K :

$$\epsilon_i^K \leq \frac{B_i^+ - B_i^-}{K}\ \max(c_i^{'} - d_iB_i^-, d_iB_i^+ - c_i^{'})$$

Pour s'assurer que $\epsilon_i^K < \frac{\epsilon}{n}$, il est maintenant suffisant de choisir K tel que :

$$K > \frac{n\ \max(c_i^{'} - d_iB_i^-, d_iB_i^+ - c_i^{'})}{\epsilon\ (B_i^+ - B_i^-)}$$

Notons que la preuve du Théorème fournit une borne supérieure théorique pour le paramètre K. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que les coefficients du problème initial $(QMKP)$ sont entiers. Ainsi, lorsque l'écart (entre le majorant z^K et la valeur de la solution réalisable $\tilde{z}$) est strictement plus petit que 1, nous pouvons considérer que la solution réalisable est optimale et que nous connaissons alors la valeur optimale de $(QMKP)$.

En considérant la preuve du Théorème , et en posant ϵ égal à 1, nous savons qu'en fixant le paramètre K à la valeur $\frac{n\ \max(c_i^{'}-d_iB_i^-,d_iB_i^+-c_i^{'})}{(B_i^+-B_i^-)}$ nous obtiendrons la valeur optimale de $(QMKP)$. Bien entendu, cette borne supérieure sur K n'est pas très pertinente en pratique puisqu'elle nécessite une valeur très grande. Voyons comment mettre en oeuvre cette méthode.

4 Mise en œuvre de la méthode exacte

La résolution de $(QMKP)$ repose sur les trois étapes suivantes :
(i) calcul d'une solution admissible (borne inférieure) de bonne qualité ;
(ii) une étape de pré-traitement afin de borner les variables de décision du problème) ;
(iii) un calcul itératif du majorant z^K nécessitant de choisir les points de ruptures et le nombre de segments tangents à chaque courbe g_i.

4.1 Solution admissible

Nous proposons deux voies possibles pour calculer une solution réalisable. La première est obtenue par amélioration successive au fur et à mesure de la méthode de résolution exacte de $(QMKP)$. Cette solution exacte est obtenue *via* l' $Heuristique1$ et est dérivée de la relaxation continue de $(QP_{x,y})$.
La deuxième solution admissible (fournie par $Heuristique2$) provient de la solution de $(LP_{x,z})$.
Nous précisons lors de l'écriture de l'algorithme quand chacune des heuristiques est employée.

Heuristique 1. Cette heuristique est utilisée une fois au début de la méthode exacte (voir Algorithme).
Considérons la solution optimale $\overline{x} = (\overline{x_1}, ..., \overline{x_i}, ..., \overline{x_n})$ de la relation continue de $(QP_{x,y})$.Nous restreignons l'ensemble des solutions admissibles autour de la solution trouvée afin de résoudre $(LP^K_{x,z})$. Plus précisément, nous restreignons les bornes sur chaque variable aux parties entières inférieures et supérieures en partant de sa valeur dans $\overline{x}$. On obtient alors

un problème $0-1$ non équivalent au problème initial $(QMKP)$. La solution entière ainsi calculée est réalisable pour $(QMKP)$. Sa valeur $f(x)$ est alors un minorant pour $(QMKP)$ et, en pratique est optimale dans la plupart des cas .

Heuristique 2. Cette heuristique est employée plusieurs fois au cours de la méthode de résolution exacte : après chaque calcul des bornes z^K. Nous partons de la solution de $(LP^K_{x,z})$ écrite à l'aide des variables x. Elle est admissible pour $(QMKP)$. Alors, sa valeur objectif correspondante $f(x)$ est un minorant pour $(QMKP)$.