Optimisation Non Linéaire Discrète
M1 Informatique site d'Orsay
2022-2023

Programmation linéaire en variables entières (ou mixtes)

dominique.quadri@universite-paris-saclay.fr

Programmation linéaire en variables entières

Un programme linéaire en variables entières est une généralisation du cas continu

- Les variables de décision sont des entières (ou entières et réelles ie mixtes)
- La fonction objectif est linéaire
- Les contraintes sont linéaires
- Exemple :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } 2x + 3y + z \\ x + 4y + 2z \leq 10 \\ 2x + 3y + z \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ X, y, z \text{ entières} \end{array}}$$

Borne supérieure et borne inférieure

En maximisation si (P) est le problème en entier et (P) la version continue de (P) alors :

Soient, $x^{(0)}$ une solution admissible de (P),

x^* est la solution optimale de (P) et,

(x^*) la solution optimale de (P)

On a alors que :

- $f(x^*)$ et $f\ (x^*)$ sont respectivement les valeurs optimales de (P) et (P).
- $f(x^{(0)}\ )$ est une borne inférieure de $f(x^*)$ et $f\ (x^*)$ une borne supérieure de $f(x^*)$ i.e.

$$f(x^{(0)}\ ) <= f(x^*) <= f\ (x^*)$$

Méthode de résolution du cas en entiers

Résolution par « énumération implicite »

- Utilisée par la plupart des *solveurs* de PNE dont celui d'Excel ou Open Office
- Repose sur le principe dit de séparation et évaluation (*branch and bound* en anglais)
- Un arbre de recherche est associé à cette procédure
- Chaque noeud de l'arbre correspond au problème initial auquel on a ajouté un certain nombre de contraintes de bornes sur les variables.
- L'évaluation en chaque noeud de l'arbre est égale à la valeur optimale du problème de départ relaxé continuement.
    - Cette évaluation donne une Borne Sup. , calculée à l'aide la méthode du simplex.

B&B, partons d'un exemple déjà modélisé

(P1) : maximiser $f(x)=4\,x_1 - x_2$

sous les contraintes :

$7x_1 - 2\,x_2 \leq 14$

$x_2 \leq 3$

$2x_1 - 2\,x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

x_1 et x_2 entiers

Étape 1 → Évaluation

EVALUATION : la 1ere étape consiste à calculer une borne sup. De la valeur optimale f(x*) de (P1)

Cette borne est calculer en résolvant la relaxation continue (P1) de (P1) où (P1) est le programme linéaire suivant :

(P1) : maximiser $f(x)=4\ x_1 - x_2$

sous les contraintes :

$7x_1 - 2\ x_2 \leq 14$

$x_2 \leq 3$

$2x_1 - 2\ x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

Étape 1 → Évaluation

La solution optimale (x*) de (P1) est obtenue via la méthode du simplex de la manière suivante :

Écriture de (P1) sous sa forme standard à l'aide des variables d'écart (e1,e2,e3):

(P1) : maximiser $f(x)=4\,x_1 - x_2$

sous les contraintes :

$$7x_1 - 2\,x_2 + e1 = 14$$

$$x_2 + e2 = 3$$

$$2x_1 - 2\,x_2 + e3 = 3$$

$$x_1\ x_2\ e1,\ e2,\ e3 \geq 0$$

Étape 1 → Évaluation (la borne sup.)

Résolution de (P1) avec le simplex

Étape 0 : solution évidente → $(x^{(0)}) = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, e_1^{(0)}, e_2^{(0)}, e_3^{(0)}) = (0,0,14,3,3)$

Valeur objectif de (P1) correspondante : $f(x^{(0)})=0$.

Étape 1 → Évaluation (la borne sup.)

Étape 1 :

- Variable entrante (celle qui a le plus fort coeff. Objectif) : x1
- Variable sortante (celle qui correspond à la ligne qui réalise le minimum entre le b_j / a_{1j} avec a_{1j} > 0, ie le j tel que Min {14/7 ; interdit ; 3/2}=3/2 donc le j=3 (3e position où se situe 3/2)

  Donc la variable sortante est : e3
- Nouvelle Base = {e1,e2,x1}, Hors Base = {x2,e3}
- Solution courante : $(x^{(1)}) = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, e_3^{(1)})=(3/2,0,7/2,3,0)$
- Valeur objective courant : $f\ (x^{(1)}) = 6$

Étape 1 → Évaluation (la borne sup.)

Étape 2 :

- Variable entrante (celle qui a le plus fort coeff. Objectif) : x2
- Variable sortante (celle qui correspond à la ligne qui réalise le minimum entre le b_j / a_{2j} avec a_{2j} > 0, ie le j tel que Min {0,7 ; 3 ; interdit}=0,7 donc le j=1 (1e position où se situe 0,7)

  Donc la variable sortante est : e1
- Nouvelle Base = {x2,e2,x1}, Hors Base = {e1,e3}
- Solution courante : $(x^{(2)}) = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, e_3^{(1)})=(1.5,0.7,0,2.3,0)$
- Valeur objective courant : $f\ (x^{(1)}) = 8.1$

Étape 1 → Évaluation (la borne sup.)

Étape 3 :

- Variable entrante (celle qui a le plus fort coeff. Objectif) : e3
- Variable sortante (celle qui correspond à la ligne qui réalise le minimum entre le b_j / a_{6j} avec a_{6j} > 0, ie le j tel que Min {Interdit ; 3.2... ; interdit}=3.2... donc le j=2 (2e position où se situe 3.2...)

  Donc la variable sortante est : e2
- Nouvelle Base = {x2,e3,x1}, Hors Base = {e1,e2}
- Solution courante : $(x^{(3)}) = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, e_1^{(3)}, e_2^{(3)}, e_3^{(1)})=(20/7,3,0,0,23/7) = (x^{(*)})$
- Valeur objective courant : $f(x^{(3)}) = \underline{59/7 = f(x^{(*)})}$

Etape 1 → Evaluation (la borne sup.)

	Var. De Base et Ttes var.	x1	x2	e1	e2	e3	b_j	Min {b_j/aij, a_ij >0}
L1	e1	7	-2	1	0	0	14	2
L2	e2	0	1	0	1	0	3	Interdit
L3	e3 (var. Sortante)	2	-2	0	0	1	3	1,5 MIN
L4	c_i	4	-1	0	0	0	0	
		Var entrante						
L'1=L1-7*L'3	e1 (var. Sortante)	0	5	1	0	-3,5	3,5	0,7 MIN
L'2=L2	e2	0	1	0	1	0	3	3
L'3=L3/2	x1	1	-1	0	0	0,5	1,5	Interdit
L'4=L4-4*L'3	c_i	0	3	0	0	-2	-6	
			Var entrante					
L"1=L'1/5	x2	0	1	0,2	0	-0,7	0,7	Interdit
L"2=L'2-L"1	e2 (var. Sortante)	0	0	-0,2	1	0,7	2,3	3,285714286 MIN
L"3=L'3+L"1	x1	1	0	0,2	0	-0,2	2,2	Interdit
L"4=L'4-3*L"1	c_i	0	0	-0,6	0	0,1	-8,1	
						Var entrante		
L'''1=L"1+0,7*L'''2	x2	0	1	0	1	0	3	
L'''2=L"2/0.7	e3	0	0	-0,285714286	1,428571429	1	3,285714286	
L'''3=L"3+0,2*L'''2	x1	1	0	0,142857143	0,285714286	0	2,857142857	
L'''4=L"4-0,1L'''2	c_i	**0**	**0**	**-0,571428571**	**-0,142857143**	**0**	**-8,428571429**	

TOUS LES COEFF SONT <= 0 !!!! → OPTIMUM

Etape 1 → Evaluation

La solution optimale de (P1) obtenue en appliquant le simplex, est donc x* = (20/7, 3) et sa valeur est 59/7

On en déduit que la valeur optimale de (P1) f(x*) est telle que f(x*) <= 59/7

Puisque tous les coefficients de la fonction objectif de (P1) sont entiers, on peut dire que la valeur optimale de (P1) est telle que

f(x*) <= 8 (où 8 est la partie entière supérieure de 59/7)

Étape 1 → Évaluation

Le noeud 1 de l'arbre de recherche est associé à cette borne.

(1)

(P1)
Solution optimale :
$x1 = 20/7$, $x2=3$,
$e1=e2=0$, $e3=23/7$
Val. Opt.=59/7, borne = 8

Étape 2 → Séparation

(1)

(P1)

Solution optimale :

x1= 20/7, x2=3,

e1=e2=0, e3=23/7

Val. Opt.=59/7, borne = 8

?

?

Étape 2 → Séparation

On va maintenant diviser l'ensemble des solutions admissibles du problème (P1).

Soit x_j une variable de base dont la valeur b_j dans la solution optimale du relaxé (P1) est non entière.

Si une telle variable n'existe pas, alors la solution de (P1) est entière et c'est donc la solution optimale de (P1).

On va d'abord s'intéresser aux sol. admissibles de (P1) telles que x_j <= Partie entière inférieure de b_j puis aux sol. admissibles de (P1) telles que x_j <= Partie entière supérieure de b_j

Étape 2 → Séparation

On va maintenant diviser l'ensemble des solutions admissibles du problème (P1).

Soit x_j une variable de base dont la valeur b_j dans la solution optimale du relaxé (P1) est non entière.

Si une telle variable n'existe pas, alors la solution de (P1) est entière et c'est donc la solution optimale de (P1).

On va d'abord s'intéresser aux sol. admissibles de (P1) telles que $x_j <=$ Partie entière inférieure de b_j puis aux sol. admissibles de (P1) telles que $x_j <=$ Partie entière supérieure de b_j

Étape 2 → Séparation

En effectuant une telle division de l'ensemble des solutions admissibles de (P1), on ne perd aucune solution.

Remarquons que dans les deux cas, la solution courante b, ne vérifie aucune de ces deux contraintes.

Pour notre exemple : la séparation consiste à considérer les deux cas :

$X1 <= 2$ et $x1 >= 3$

Étape 2 → Séparation

(1)

(P1)
Solution optimale :
x1= 20/7, x2=3,
e1=e2=0, e3=23/7
Val. Opt.=59/7, borne = 8

(2)

(P1) + x1 <=2
Solution optimale :
x1= 2, x2=1/2,
e1=1, e3=5/2, e2=s=0
Val. Opt.=15/2, borne = 7

(3)

(P1) + x1 >=3
Pas de solution admissible
=> Abandon du sommet

Étape 3 → Ré-optimisation

On a résolu en fait les noeuds (2) et (3) en ajoutant respectivement au problème (P1) les contraintes $x1<=2$ et $x1 >=3$

On peut repartir du dernier tableau du simplex.

Et on obtient (avec ajout de la variable d'écart s pour la contrainte $x1 <=2$)

Solution de base : $x1=2$, $x2=1/2$, $e3=s=0$, $e1=1$, $e2=5/2$

Valeur : $15/2=7.5$ donc la borne est à 7

Étape 3 → Ré-optimisation

Idem pour la contrainte additionnelle x1 >=3

On peut repartir du dernier tableau du simplex.

Et on obtient (avec ajout de la variable d'écart s et la variable artificielle a pour la contrainte x1 >= 3)

Pas de solution admissible pour le problème relaxé donc abandon du noeud

Étape 2 → Séparation

On peut séparer le noeud (2) par rapport à x2 maintenant

X2 <= 0 ou x2 >= 1

Étape 2 → Séparation

(1)

(P1)
Solution optimale :
x1= 20/7, x2=3,
e1=e2=0, e3=23/7
Val. Opt.=59/7, borne = 8

(2)

(P1) + x1 <=2
Solution optimale :
x1= 2, x2=1/2,
e1=1, e3=5/2, e2=s=0
Val. Opt.=15/2, borne = 7

(3)

(P1) + x1 >=3
Pas de solution admissible
=> Abandon du sommet

(4)

(P1) + x1 <=2 + x2 <= 0
Solution optimale :
x1=3/2, x2=0
(e1=7/2,e2=3,e4=0,s=1/2,t=0)
Val opt : 6, Borne 6

(5)

(P1) + x1 <=2 + x2 >= 1
Solution optimale :
x1=2, x2=1
(e1=2,e2=2,e4=1,s=t=0)
Val opt : 7
Sol. Entière et OPTIMALE

Résolution exacte via le solveur d'Excel

Variables de décision	Valeur	Fct obj.	
x1	2	7	
x2	1		
Contraintes			
c1	12	<=	14
c2	1	<=	3
c3	2	<=	3

Pseudo code du Branch & Bound

```
1. Initialisation:
        Calculer un LB (borne Inférieure : valur de la fonction provenant d'une solution admissible en nombres entiers pour (P)
        Calculer un UB(borne supérieure par la méthode du simplex (var. continues) soit graphiquement
        si e deux dimensions sinon par tableau

2. Choisir une variable xi et une constante k et ajouter la contrainte xi >= k+1 et xi <= k
cette variable est choisie parmi celle qui est la plus fractionnaire dans la solution fournie par la rexlation
continue
3. Diviser l'arbre selon ces deux contraintes
4. Pour chaque nœud i calculer Ubi de ce nœud par la méthode du simplexe
        Si (Ubi < LB)
        ne poursuivez pas sur ce noeud
        Sinon (si la solution dérivée de UBi est fractionnée)
        Allez à 2
        Sinon (Si la solution dérivée de Ubi est entière)
        Si LB < UBi alors LB <- Ubi
        Allez à 2
```