1 Flots

1.1 Flots pour clustering binaire

Cet exercice illustre une application des flots : étant donné une image noire et blanc, on souhaite partitionner l'image en zones de majorité noire et zones de majorité blanches, en minimisant le nombre de zone et en minimisant la quantité d'erreur (pixel de couleur opposée à leur partie).

1. Solutions triviales
   (a) Pouvez vous donner une approche si la priorité du premier critère (nombre de zones) écrase complètement celle du second (bruit) ?
   (b) Pouvez vous donner une approche si le second critère (bruit) écrase complement le premier (nombre de zone) ?
2. On représente l'image par un graphe : chaque pixel est un sommet, et chaque sommet est relié à ses voisins.
   (a) Quels options sont possible pour les voisinages ?
   (b) en écrire une rendant la majorité des sommets du graphe de degré 4,
   (c) une avec le mode des degrés 8,
   (d) une avec un graphe complet pondéré par une distance
   (e) une avec des degré 8 pondéré par la distance
3. (a) Que dire des parties qui correspondront aux différentes zones ?
   (b) Quel critère est mis en valeur par quel aspect de la structure du graphe partitionné ? On transforme le graphe en flot en rajoutant une source, que l'on connecte à tous les pixels blancs, et un puits, à qui l'on connecte tous les pixels noirs.
4. (a) Comment interpréter le clustering recherché ?
   + Peut on faire varier l'importance relative des deux critères ? Comment ?
   + En passant à la limite , retrouve-t-on les solutions triviales ?

2 Chaine de Markov

2.1 Match de Tennis

Un match de Tennis se termine lorsqu'un joueur gagne deux sets et remporte le match.
Un set se termine lorsque un joueur marque 6 points et remporte le set.
Un point se termine lorsque un joueur remporte plus de 4 échanges et au moins deux de plus que son adversaire (notés $15-$, $30-$ $40-$, puis Avantage $A - 40$ ou $40 - A$ ou point).

1. On suppose que les deux joueurs ne fatiguent pas et que la probabilité que le premier joueur remporte un échange est constante, notée p.
   (a) Combien d'état la chaine de Markov d'un match complet admet elle ?
   (b) Est elle ergodique ?
   (c) Construire la chaine de Markov d'un point. On s'intéresse aux chemins du point de départ $(0 - 0)$ aux états finaux, que l'on peut abstraire par leur probabilité et leur longueur.
   (d) En utilisant cette abstraction, représenter la chaine d'un set, puis d'un match.
   (e) Quelle est la probabilité de victoire du premier joueur en fonction de p ? Quelle est la durée (en terme d'échange) moyenne d'un match ?
2. On suppose que le second joueur a une motivation variable, et que la probabilité de victoire du premier joueur lors d'un échange de type avantage ($40-40$, $A-40$ ou $40-A$) est $p' < \frac{1}{2} < p$: même questions que précédemment.

+ On suppose qu'un joueur fatigue plus rapidement que son adversaire, et que la probabilité de victoire du premier joueur dépend du temps : $p(t) = q_0 + q_a e^{-bt}$.
  (a) Que dire de la chaine ?
  +,(long) Peut on quand même exprimer la probabilité de victoire d'un des joueurs ? le faire.

2.2 Roulette et martingale

Un casino comporte de nombreux jeux d'argents permettant de parier une mise avec une probabilité proche de 0.5 et de remporter le double en cas de succès. La roulette est l'un de ces jeux, avec la possibilité de parier sur 18 cases à travers les rouges /noires (0 est vert), les cases paires ou impaires (0 exclut) ou manque (1-18) versus passe (19-36). certaines règles de la roulette ajoutent une règle rendant une partie de ces mises sur une sortie du 0.

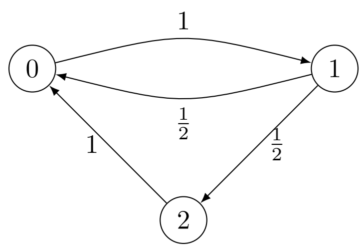
1. Supposons qu'un joueur joue de manière répétée, en misant toujours 1 sur les rouges. On considère dans un premier temps que la roulette est anormale et ne comporte pas de 0.
   (a) Définir et décrire la chaine de Markov correspondante.
   (b) Peut on définir une distribution à l'équilibre ?
   (c) Quel est le temps de retour à zero ?
2. On considère que la roulette est normale, mais que le casino est généreux avec la règle de partage et rends la mise complète sur un zero. Le même joueur revient, et mise cette fois toujours sur les pairs.
   (a) Définir et décrire la chaine de Markov correspondante.
   (b) Peut on définir la distribution à l'équilibre ?
   (c) Quel est le temps de retour à zero ?
3. Le casino change de propriétaire et le nouveau retire la règle de partage complètement : un zero est complètement perdant pour tous.
   (a) Définir et décrire la chaine de Markov correspondante.
   (b) Quel est le temps de retour à zero ?
   (c) Comment interpréter cette information, peut on en déduire une sorte de distribution à l'équilibre ?

   Les joueurs de jeux d'argent parlent parfois de martingales, de manière incorrecte : pour eux, une martingale est une manière de jouer qui garantie de finir gagnant.
   Une martingale populaire est le doublage éternel : miser 1 sur un choix binaire, puis, tant que l'on perds, recommencer et doubler la mise.
   (a) écrire la chaine de markov correspondante
   (b) Quel est le gain en cas d'arrêt.
   (c) En supposant une exécution parfaite et infinie, quel est la probabilité d'arrêt, quelle est le gain à l'arrêt ?
   (d) Que dire de ce résultat ?
   (e) Même question avec un contexte plus réaliste, que se passe-t-il alors ?
4. En mathématique, une martingale est ironiquement un outil permettant de montrer, entre autre, l'absurdité de ce que les joueurs appellent martingale : c'est une fonction qui associe à une distribution de probabilité sur une chaine de markov une valeur réelle, et qui se comporte comme une chaine de markov elle même.
   (a) Le gain cumulé est il une martingale ? Si non, comment le transformer en une telle fonction ?
   (b) Que dire de l'évolution de la martingale sur les différente versions de la roulette et du joueur d'origine ?
   (c) Que dire de son évolution pour les joueurs utilisant leur propre interprétation du terme et le doublage éternel ?

5. Supposez que vous êtes transporté dans le temps à Pompei. Le dernier bateau pour la journée va partir d'ici quelques heures et vous sentez déjà des tremblements volcaniques. Vous avez trouvé une réserve de 40 denarii, mais il vous en faudrait 42 pour obtenir une place sur le bateau. Heureusement, Pompei est aussi adepte de jeux d'argents, et inclue une version de la roulette basée sur des dés, même si elle avantage encore plus l'équivalent du casino que les variantes modernes (probabilité de gain : $p = 0.4$) . Quel est votre meilleur stratégie et quelle est votre chance de survie ?

2.3 Simulation en avant : illustration du biais

Considérez la chaine de markov suivante :



1. Exprimer la distribution un pas en avant en fonction de la distribution courante.
2. En déduire un système d'équation exprimant la distribution à l'équilibre.
3. Le résoudre.

2.3.1 simulation conditionnelle en avant

1. En notant $\mu^E(t) = \left(\mu_0^E(t), \mu_1^E(t), \mu_2^E(t)\right)$ la distribution à un temps t arbitraire partant d'un état E, et en notant $\mu^0(t), \mu^1(t)$ et $\mu^2(t)$ spécifiquement celles commençant avec tout le poids sur 0, 1 ou 2, exprimer $\mu^E(t)$ en fonction de $\mu^{0,1,2}(t)$ et E.
2. Que dire si E est la distribution à l'équilibre μ^* ?

   On considère maintenant que les variables aléatoires sont prétirées et découplées des états. Pour marquer cette différence, on considère les éléments de la chaine $X^E(t, v_1 \cdots v_t)$ au lieu de leur distribution. En particulier, si $E \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, alors $X^E(t)$ est un état unique.
3. Que dire de $X^E(t, v_1 \cdots v_t)$ vis à vis de $\mu^E(t)$ si les variables $v_1 \cdots v_t$ sont tirées correctement, cad indépendamment et uniformément ?
4. On part des trois états en parallèle, et on choisi comme valeur de t la valeur qui nous arrange : le plus petit t tel que $X^1(t) = X^2(t) = X^3(t)$. Quelle est la distribution correspondante $\mu^{1|2|3}\left(t(v_1 \cdots v_\infty)\right)$? est ce μ^* ?

\+ On part des trois états en parallèle, sur lesquels on fait 10 pas, en gardant le résultat si les trois valeurs sont identiques et en recommençant avec d'autre valeurs de v sinon. Quelle est la distribution correspondante ? est ce μ^* ?

2.3.2 Simulation en arrière

On suppose maintenant que v est prétirée pour un ensemble d'indice allant de $-\infty$ à 0.

1. On considère les valeurs de -10 à 0 en partant des trois trajectoires en parallèle, et en ne gardant le résultat que s'il a convergé : comparer à la question précédente.
2. On considère les trajectoires de -10 à 0, puis les trajectoires de -20 à -10 puis à 0
   (a) Exprimer l'état des trois trajectoires $-20 \to 0$ en fonction de celui de $-10 \to 0$ et $-20 \to 10$.
   (b) Que dire de la première si la seconde à convergé ?

(c) Que dire de toutes les trajectoires plus longues ?

+ En choisissant comme $t(v)$ la valeur qui nous arrange, ie le plus petit t permettant convergence sachant v, exprimer la distribution au temps 0

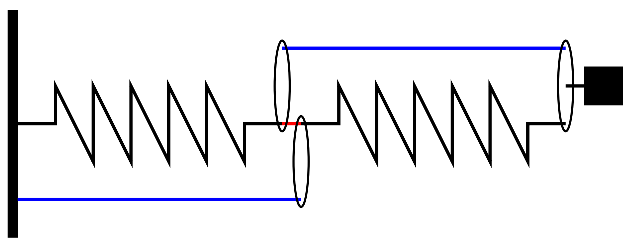
+ Alternativement, choisir $t = \infty$ et comparer l'état final à celui du $t(v)$ précédent, puis conclure sur la distribution au temps 0

  Le temps de convergence moyen d'une chaine de markov est le temps de mixage, qui est fini. En doublant la valeur de t à chaque passage, on garantie de n'avoir a calculer des transition que pour au plus 4 fois ce temps par tirage, ce qui est une valeur finie.

Braes Springs, ou une congestion de graviton

George et Henri regardent des vidéos sur youtube, en pariant sur la présence ou l'absence de trucage. Une de ces vidéos leur parait éminemment absurde , mais refuse d'admettre tout trucage.

L'expérience semble simple et n'utilise que des ressorts, fils et masses, donc ils font le parie d'être le premier à en démontrer l'impossibilité, George part chercher des outils et matériaux tandis qu' Henri sort simplement une feuille de papier et un crayon.



Tout en pensant tout haut "la vidéo n'indique pas de valeur de ressorts ni les longueurs, mais faisons simple : une constante de 1, une longueur de fil rouge négligeable à ϵ, et une longueur des fils de $1 + \epsilon$, pour être cohérent avec le reste de la vidéo, il me faut juste une masse de 1".

1. Peut on traduire le problème en un problème de flot ? Quel graphe, quelles valeurs de capacité quel interprétation ?
2. Est ce pratique ?

   On peut modéliser le problème physique par un jeu de congestion : les joueurs sont infinitésimaux et représentent la force compensant la gravité sur la masse, les stratégies sont les chemins entre la poutre et la masse, et les coûts correspondent aux longueurs : constante pour les fils, proportionnels à la charge pour les ressorts.
3. à équilibre, toutes les stratégies non dominées ont le même coût. Comment traduire cela en terme de physique, est ce vérifié ?
4. Quel est la hauteur de la masse ?

La démonstration de la vidéo correspond à couper le fil rouge (tendu) et regarder l'évolution du système

1. Dessiner le nouveau système, et le représenter avec le même formalisme.
2. Combien y a t il de points d'équilibres possibles ? Est ce surprenant, étant donné qu'il s'agit d'un problème sous forme physique ?
3. Choisir un équilibre et calculer le coût total, ie la hauteur de la masse.
4. Que dire du mouvement de la masse ? Est ce intuitif ?

George revient ensuite avec les matériaux et commence à construire son système, mais, à sa surprise, Henri a changé d'avis et considère désormais la vidéo comme étant non truquée.

(Il s'agit d'une des formes du paradoxe de Braes, où l'ajout ou (la suppression) de routes dans un réseau congestionné peut empirer (ou relaxer) l'état.)