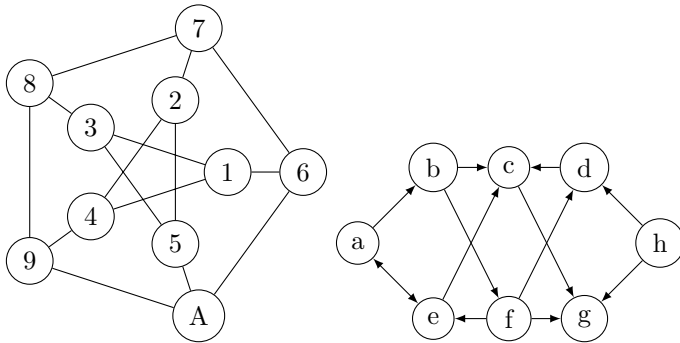


Parcours



1. Décrire les deux graphes : orientés/non orientés, non connexe/connexes/ fortement connexe, acycliques ou non.

Graph 1 est non orienté connexe, non acyclique. Graph 2 est orienté, connexe mais pas fortement connexe, non acyclique. Graph 1 est également 3-régulier et tous deux sont des graphes finis non pondérés

2. quel est le degré minimal de chaque graphe, le degré maximal? Quels sont les degré entrant minimal et maximal du second graphe

Graph 1 a comme degrés minimal et maximal 3. Graph 2 a comme degré total minimal 2 (a et h), degré total maximal 4 (c et f) degré entrant minimal 0 (h) degré entrant maximal 3 (c) degré sortant minimal 0 (g) et degré sortant maximal 3 (f)

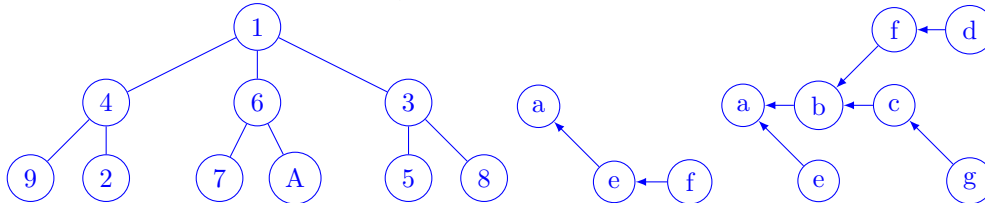
Un parcours est une exploration d'un graphe en suivant les arêtes, la liste des sommets et arêtes visités lors de cette exploration forme un sous graphe et est un arbre.

Un parcours en largeur privilégie la proximité à la racine : pour le faire, on visite les sommets selon une file d'attente ne contenant initialement que la racine, et chaque sommet y ajoute ses fils non déjà parcourus lors de sa visite. Les sommets sont ainsi visités par distance croissante à la racine.

Un parcours en profondeur privilégie les chemins. Un sommet visité déclenche la visite de tous ses fils avant de clore et remonter. On peut annoter un tel parcours par l'ordre de début de visite, de fin de visite ou les deux. À tout moment, la liste des sommets actifs est un chemin depuis la racine.

Les deux types de parcours couvrent exactement l'ensemble des sommets accessibles depuis la racine choisie.

3. Construire un parcours en largeur enraciné en 1 et en a, et un parcours en largeur du second graphe inversant les directions des arêtes, enracinés en a



notez le déplacement du dessin des sommets pour la lisibilité : le graphe et les sous graphe sont les paires d'ensembles : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A\}$,

$\{(13), (14), (1, 6), (2, 4)(2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 8), (4, 9), (5, A), (6, 7), (6, A), (7, 8), (8, 9), (9, A)\}$ pour le graphe 1, et $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A\}, \{(13), (14), (1, 6), (2, 4), (3, 5), (3, 8), (4, 9), (6, 7), (6, A)\}$ pour son sous arbre : le dessin n'est qu'une représentation intuitive de ces ensembles

Pouvez vous déterminer le diamètre de ces deux graphes ?

4. Le diamètre est le max sur les paires de sommets du chemin le plus courts entre les deux sommets. on peut le réécrire comme le maximum sur les sommets du maximum sur les autre sommets du min sur

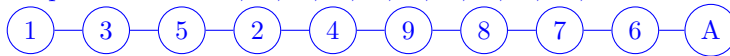
les chemins, ce qui est exactement le maximum des profondeurs des arbres correspondant au parcours en largeur enracinés sur chacun des sommets. Par symétrie sur Graphe 1, le diamètre est la profondeur de l'arbre obtenu à la question précédente, 3. Le second graphe est non fortement connexe, donc son diamètre orienté est infini, tandis que son diamètre non orienté est donné par la distance entre a et h : 4

5. Construire le parcours en profondeur enraciné en 1 et en f en utilisant l'ordre intuitif, (en inversant les directions des arêtes pour le second).
6. Construire le parcours en profondeur utilisant l'ordre intuitif enraciné en A et en h (en inversant les directions des arêtes pour le second).

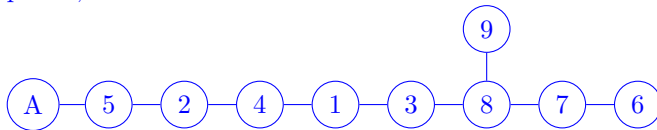
La manière la plus simple est de simplement suivre les arêtes en notant les sommets et leurs prédécesseurs respectifs au fur et à mesure.

Sur le graphe 1 :

En partant de 1 : $1, 3^1, 5^3, 2^5, 4^2, 9^4, 8^9, 7^8, 6^7, A^6$, donc



En partant de A : $A, 5^A, 2^5, 4^2, 1^4, 3^1, 8^3, 7^8, 6^7$, retour sur 7 en l'absence de continuation possible, puis 8, 9^8



Sur le graphe 2, même méthode : a, b^a, c^b, g^c remonter à c , remonter à b , f^b, d^f, e^f remonter à f , remonter à b , remonter à a , remonter à \cdot : le parcours termine sans avoir pu visiter tous les sommets. On remarque que le graphe obtenu est très similaire à celui du parcours en largeur, ne changeant que le sommet auquel e est rattaché. C'est une conséquence du fait que le second graphe est relativement creux et que les ordre secondaires choisis sont les même.

L'ensemble des sommets visités dans le graphe inversé est l'ensemble des sommets accessible depuis le sommet que l'on a choisi comme racine. Dans un graphe non inversé, on parle parfois de sommets co-accessible, les sommets tels qu'il existe un chemin partant d'eux et arrivant au sommet considérés

En h , toujours en inversé : h, d^h, c^d, g^c remonter à c, d, h, \cdot , le parcours termine, l'arbre est $h \leftarrow d \leftarrow c \leftarrow g$

Arbres

Nombre d'arête

Un graphe non orienté est un arbre si et seulement si il est connexe et acyclique.

Le but de cet exercice est de montrer qu'un graphe non orienté fini vérifiant l'une de ces propriétés et dont la différence entre le nombre de sommets et d'arêtes est exactement 1 est également un arbre.

1. (a) Quelle est le nombre maximal de sommets d'un graphe connexe ayant 0 arêtes, 1 arêtes, 2 arêtes ? 1, 2 et 3
- (b) En partant d'un graphe connexe quelconque de n sommets et m arêtes, exhiber un graphe connexe de $n - 1$ sommets et au plus $m - 1$ arêtes.

Ce que l'on veut faire est de retirer un sommet et ajuster le graphe. Il faut donc montrer que l'on peut retirer un sommet et les arêtes adjacente au sommet sans couper le graphe, et que ce sommet est de degré au moins 1. Pour cela, une solution est de réaliser un parcours quelconque jusqu'à obtenir une feuille. Le graphe d'origine est connexe, donc le sous graphe du parcours atteint tous les sommets. Retirer une feuille à un arbre donne un arbre plus petit, donc encore connexe. Puisque l'on a un sous graphe connexe du graphe d'origine sans la feuille, donc celui ci est connexe.

La feuille est de degré 1 dans le sous graphe, donc au moins 1 dans le graphe, et ce degré est le

nombre d'arête retirées dans l'opération.

On a obtenu un graphe connexe de $n - 1$ sommets et au plus $m - 1$ arêtes

- (c) Que peut on en conclure sur les nombres de sommets et arêtes d'un graphe connexe en général ?
Il s'agit d'une récurrence : la propriété de récurrence au rang n est "tout graphe connexe de n sommets a au moins $n - 1$ arêtes.
Cette propriété est vraie au rang 1.
Si cette propriété est vraie au rang n , et si on considère un graphe connexe de tailles n, m , alors on peut exhiber un graphe de taille $n - 1, m' \leq m - 1$, appliquer la propriété au rang $n - 1$ pour obtenir $m' \geq (n - 1) - 1$ et donc $m \geq m' + 1 \geq n - 2 + 1$, prouvant la propriété au rang n
- (d) En partant d'un graphe connexe de n sommets et m arêtes, ayant un cycle, exhiber un graphe connexe de taille n sommets et $m - 1$ arêtes.
Il suffit de retirer une arête e du cycle : On considère deux sommets i et j . Dans le graphe d'origine, connexe, il existe un chemin de i vers j . Si ce chemin ne contient pas e , alors il existe dans le nouveau graphe. Si le chemin contient e , alors on remplace e par la suite des arêtes du cycle entre e et le sommet final et initial, puis celle des arêtes du cycle postérieure à e : on a $i \rightarrow e_1 \rightarrow^* x_0 = x_m \rightarrow^* e_2 \rightarrow^* j$, un chemin dans le nouveau graphe entre i et j . Comme ceci est vrai pour toute paire de points, le nouveau graphe est connexe
- (e) Que peut on en conclure sur le nombre de sommet et d'arête d'un graphe connexe non acyclique ?
Puisqu'il existe un graphe de tailles n et $m - 1$ connexe, et puisque tout graphe connexe vérifie $|E| \geq |V| - 1$ alors $m \geq n$: l'inégalité est décalée d'une unité.
- (f) Que peut on conclure sur un graphe connexe de n sommets et exactement $n - 1$ arêtes ?
Que ce graphe ne contient pas de cycle, et est donc un arbre
2. Une bonne illustration du besoin de préparer une correction complète avant de donner la feuille de TD, même quand je suis en retard : cette seconde partie était fautive. Du coup je met des questions alternatives, avec une correction à la fin
- (a) On est tenté d'utiliser la même approche que pour l'implication $|V| - |E| = 1$, connexe \Rightarrow acyclic, mais cela échoue : donner un graphe acyclique de 5 sommets et d'un nombre d'arêtes choisi m tels qu'il n'existe pas de graphe acyclique de 4 sommets et $m - 1$ arête.
- (b) On considère un graphe acyclique. Que peut on dire de ses composantes connexes ?
- (c) Exprimer le nombre de sommet et d'arête du graphe en fonction des nombres de sommet et d'arête des composantes
- (d) En déduire une relation entre les nombre d'arête, de sommet et de composante connexe, en utilisant la première partie de l'exercice.
- (e) Que peut on conclure sur un graphe acyclique de n sommet et $n - 1$ arête ?

Arbre de récurrence

On prend comme ensemble de sommet l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{T\}$.

Soit P une propriété paramétrée, en notant $P(i)$ la valeur de vérité de la propriété au rang i .

Pour chaque assertion de la forme "On peut prouver $P(j)$ en utilisant $P(i)$ ", on insère une arête $j \rightarrow i$ dans le graphe. Intuitivement $i \rightarrow j$ signifie que l'on peut ramener la preuve de $P(j)$ à celle de $P(i)$. De même, pour tout i telle que $P(i)$ est prouvable, on ajoute une arête de i vers T .

— Comment interpréter un chemin en terme de preuve, comment interpréter un cycle ?

Une arête est une implication, orienté dans le sens inverse, un chemin est une suite d'implication successive, que l'on peut simplifier en une implication unique du sommet final vers le sommet initial.

Un cycle est une implication circulaire, c'est à dire un groupe d'assertions équivalentes

— En particulier interpréter l'existence d'un chemin vers T , ainsi que l'ensemble des sommets admettant un tel chemin.

T est le vrai. un chemin de x vers T est une implication du vrai vers x donc une preuve de x . L'ensemble des sommets co accessible depuis T est l'ensemble des paramètres pour lesquels la propriété est prouvable immédiatement

- Peut on interpréter l'absence d'un chemin ? **non** : les chemins correspondent à l'application triviale des preuves partielles, et ne couvrent ni toutes les valeurs où la propriété est vraie, ni toutes les valeurs où la propriété est prouvable

- Quel graphe apparaît avec les hypothèses d'une récurrence classique sur P ?



- Peut on étendre la notion de récurrence à l'aide de cet outil ?

Oui et non. Une récurrence classique appliquée naïvement s'appuie sur l'ordre des entiers, ce qui paraît plus limitant qu'utiliser un graphe arbitraire pour lequel il existe un arbre enraciné en T . Mais la récurrence est également définie comme pouvant exploiter tout ordre partiel, et portant la conclusion sur l'ensemble des éléments supérieurs ou égaux à l'une des initialisations. Couvrir le graphe des implications par un arbre enraciné en T est exactement créer cet ordre partiel : la nouvelle perspective ne fait que représenter différemment le raisonnement existant, sans étendre les opérations possibles.

- + Certaines récurrences s'appuient sur plusieurs autres valeurs du ou des paramètres à chaque étape. Pouvez vous décrire la validité d'une telle récurrence comme propriété du graphe ? Comment interpréter un cycle dans ce nouveau contexte ?

Une récurrence avec plusieurs prémisses nécessaires à chaque étape retourne le problème : au lieu d'un OU logique sur les chemins autour du choix d'une preuve, nous avons maintenant un ET logique entre les prémisses sur les arêtes, qui ne sont plus des implications, mais des dépendances. Dans ce nouveau graphe, qui ne contient plus T , un sommet sans successeurs correspond à une initialisation, et un sommet tel que tous les chemins issus de ce sommet sont finis est un sommet prouvable.

Les cycles et les chemins partant vers l'infini sont les éléments non prouvables

Autour de \mathbb{N} , |

On considère le graphe $(\mathbb{N} \{i \rightarrow j, \forall i, j \in \mathbb{N} / \exists k, j \times k = i\})$

1. Décrire le graphe : est il orienté, direct, acyclic, connexe fortement connexe ?
2. le graphe est orienté, connexe (tout élément est divisible par 1 et divise 0) mais non fortement connexe (par exemple il n'existe pas de chemin de 1 vers 0).
3. Quels sont les degrés (entrant, sortant, total) des sommets ?

le degré sortant d'un entier est son nombre de diviseur (incluant lui même). Le degré entrant de 0 est 1, les degrés entrant des entiers sont infinis, et le degré sortant de 0 est infini, donc les degrés totaux de chaque sommets sont infinis

4. Quel est le diamètre du graphe ?

le diamètre du graphe ne tant que graphe orienté est infini, le diamètre non orienté est 2 : $\forall i, j, i \leftarrow 1 \rightarrow j$

même question en retirant les sommets 1 et 0. le diamètre est encore 2 : $\forall i, j, i \leftarrow i * j \rightarrow j$

même questions en remplaçant $\exists k$ par $\exists k$, premier dans la définition. Le chemin le plus court entre deux valeurs passe par leur plus grand commun diviseur ou leur plus petit multiple commun, avec une distance égale à la somme des valeurs absolues des différences de puissance dans la décomposition en facteurs premiers des deux entiers.

5. Comment décrire sur le graphe et ses variations que deux nombres sont premiers entre eux, comment caractériser le pgcd et le ppcm d'un ensemble d'entier ?

Le graphe est un treillis : un graphe dont les seuls cycles sont les boucles et tels que tout sous ensemble de sommet admet une borne inférieure et une borne supérieure. Ces bornes sont les pgcd et ppcm. Deux sommets sont premiers entre eux si leur plus proche successeur commun, la racine du plus petit sous arbre les contenant tous les deux, est 1, sinon ce successeur est leur pgcd.

0.1 correction partie 2 exercice 1

1. le graphe $\{1, 2, 3, 4, 5\}, \emptyset$ est un exemple : il serait difficile d'exhiber un graphe avec un nombre négatif d'arête
2. Les composante connexe d'un graphe sont des sous graphe de ce graphe, ce qui préserve le caractère acyclique. Les composante connexes d'un graphe acyclique sont donc des graphes connexes et acycliques : des arbres.
3. Comme il s'agit d'ensemble disjoints, les nombres de sommets et d'arêtes sont la somme de ces valeurs sur les composantes.
4. On peut exploiter les deux implications sur inégalités de la première partie : connexe $\Rightarrow |E| \geq |V| - 1$ et connexe $+|E| = |V| - 1 \Rightarrow$ acyclique, donc sur chaque composante, $|E_i| = |V_i| - 1$. En sommant sur toutes les composantes, dont on note le nombre ℓ on obtient $|E| = |V| - \ell$.
5. en appliquant l'égalité précédente, on obtient $\ell = 1$: il n'y a qu'une seule composante, dont le graphe est connexe.

1 Graphes et Jeux

Jeu des bâtonnets

Règles du jeu Ce jeu se joue à deux joueurs, agissant chacun à leur tour. Entre les deux joueurs se trouve un tas de bâtonnets, duquel les deux joueurs retirent entre 1 et 5 éléments, en espérant ne pas prendre le dernier élément.

1. En prenant les valeur du nombre de bâtonnets comme sommets et les actions possibles comme arêtes, Que peut on dire du graphe obtenu ?
2. À quel objet correspond une partie ?
Stratégiquement, l'état 1 est perdant : arrivé dans cet état un joueur ne peut plus gagner la partie. Inversement les états 2,3,4, 5 et 6 sont gagnants : un joueur dans cet état peut choisir $i - 1$, et forcer son adversaire dans un état perdant.
On généralise cette notion : un état est perdant s'il n'existe aucune arête de cet état vers un état perdant, et un état est gagnant s'il existe une telle arête.
3. Calculer les états perdants et gagnants pour $n < 20$ par programmation dynamique
4. Retirer les arêtes amenant sur un état gagnant.
 - Que dire du graphe obtenu en terme de stratégie ?
 - Que dire du graphe obtenu en terme de graphe ?
 - Que dire du graphe obtenu par rapport aux entiers
5. en déduire une méthode rapide pour évaluer si une position est gagnante

Tic-Tac-Toe

Tic tac toe se joue sur une grille de 3×3 entre deux joueurs. Chaque joueur marque une case libre lors de son tour jusqu'à ce que soit trois cases alignées soient marquées par le même joueur ou la grille est remplis complètement

1. Quels sont les état possible du plateau lors d'une partie ?
2. En jouant sur la représentation, montrer que le nombre d'état possible est fini, par exemple inférieur à $3^9 = 19683$.
+ Pouvez vous trouver une borne plus précise ?
3. Choisir quels ensemble utiliser comme sommets et arêtes pour définir un graphe correspondant au jeu, que peut on dire de ce graphe.

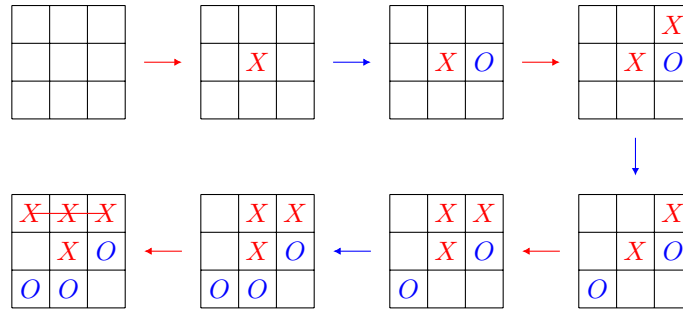


FIGURE 1 – exemple de partie, victoire du joueur 1

4. Adapter les notions d'état gagnant et perdant pour inclure les positions nulles.

Un algorithme intuitif pour choisir sa stratégie est de "prévoir n coups en avance", c'est à dire de créer et explorer l'ensemble des états accessibles en n transitions, effectivement un parcours en largeur, puis évaluer les feuilles accessibles et ne laisser à chaque étapes que les arêtes amenant au meilleur choix pour le joueur, alternant les objectifs : il s'agit d'un arbre min-max

5. Quels sont les état possibles aux feuilles ?

+ Pensez vous qu'une telle approche puisse fonctionner en général ? Sur quelles propriété du jeu et du graphe s'appuie t on ?

6. Dans le cadre du tic tac toe, quel borne peut on placer sur l'horizon, combien d'état cela nécessite d'analyser

Dans le cas particulier du Tic Tac Toe, on peut utiliser un parcours en profondeur, cad suivre les lignes de coups .

+ Que pensez vous de cette algorithm en général, y compris pour un jeu dont le graphe n'est pas acyclique ?

1.1 bâtonnets -correction

1. le graphe est : orienté, acyclique : chaque arête diminue le nombre de bâtonnet, et connexe : de tout état il existe un chemin vers (0). Il s'agit d'un DAG.

2. Une partie est un chemin d'un état choisi au préalable vers l'état (0)

3. perdant : 1, 7, 13, 19

gagnant : 0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20

4. Le graphe obtenu est une foret d'arbre de profondeur 1 ; les arêtes sont la liste des coup gagnants ; On peut voir que le graphe est périodique : $\{(1 + 5k, 2 + 5k), (1 + 5k, 3 + 5k), (1 + 5k, 3 + 5k), (1 + 5k, 4 + 5k), (1 + 5k, 5 + 5k)\}$

5. Prendre $n - 1$ modulo 5, si 0 la position est perdante, sinon, la position est gagnante avec la stratégie à suivre de retirer ce modulo.

1.2 tictactoe correction

1. l'état est caractérisé par le contenu des cases, avec les contraintes qu'il y a soit autant de O que de X soit un X de plus, et qu'il existe un chemin depuis le plateau vide vers l'état ne passant pas par

une position gagnante pour un camp (en particulier

X	X	X
O	O	O

 n'est pas une position atteignable)

2. Si on ne considère que la première contrainte, un plateau est un tableau de 9 cases pouvant contenir un élément parmi trois possibilités : le nombre d'état possible est fini.
- + On peut préciser la borne en introduisant la seconde contrainte : le nombre de configuration peut être paramétré par l'avancée de la partie : $N = \sum_i \binom{9}{i} \binom{9-i}{i} + \sum_i \binom{9}{i} \binom{9-i}{i-1} = \sum_i \frac{9!(9-i)!}{i!^2(9-i)!(9-2i)!} + \sum_i \frac{9!(9-i)!}{i!(i-1)!(9-i)!(9-2i+1)!} = 9! \sum \frac{9-i}{i!^2(9-2i+1)!} = 5049$
3. On prends comme sommets les configurations, et comme arêtes les coup légaux. le graphe est de nouveau un DAG, que l'on peut résoudre par programmation dynamique
4. Une position est gagnante s'il existe une transition vers une position perdante ou s'il s'agit d'une position de fin de partie gagnante. Une position est perdante si toutes les transitions amènent vers une position gagnante ou s'il s'agit d'une fin de partie perdante. Une position est nulle si aucune transition n'amène vers une position perdante et qu'il existe au moins une transition vers une position nulle, ou qu'il s'agit d'une position de fin de partie nulle.
5. : une feuille peut être finale perdante, finale gagnante, finale nulle ou, si la borne de recherche n est trop courte, indéfinie .
- + On s'appuie sur l'aspect acyclique fini du graphe.
6. Une borne naive est 9 ou 9 -avancé de la partie, analysant 9-avancée! états au plus.
7. Intuitivement, la plupart des coups d'une partie de tic tac toe sont forçant, ce qui rend un parcours en profondeur relativement efficace. En général, le problème d'un parcours en profondeur est que s'il est interrompu ou borné par une contrainte sur le temps de calcul ou la profondeur de recherche, la profondeur d'analyse est inégale. Un parcours en largeur ne biaise pas l'estimation de la distance et est plus régulier, mais il ne bénéficie pas des améliorations et raccourcis triviaux.
8. dans un graphe non acyclique, la méthode récursive de définition des positions gagnante et perdante cesse d'être correcte, et une analyse exhaustive est extrêmement couteuse. un algorithme possible est de construire un arbre min max en largeur de profondeur finie, et d'évaluer la qualité de la position au feuilles en utilisant une autre méthode : une heuristique, ou une analyse statistique de partie antérieure, un algorithme d'apprentissage.

Les algorithm de jeu d'échec actuel remplacent le min max par un modèle de leur adversaire humains, supposant le joueur adverse imparfait et avec une probabilité d'erreur proportionnelle au nombre de possibilité d'erreurs.