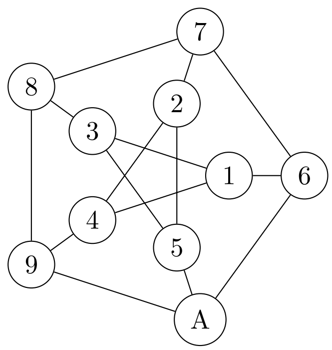
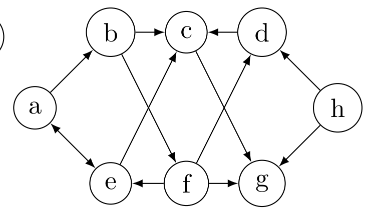
Parcours





1. Décrire les deux graphes : orientés/non orientés, non connexe/connexes/ fortement connexe, acycliques ou non.
2. quel est le degré minimal de chaque graphe, le degré maximal ? Quels sont les degré entrant minimal et maximal du second graphe

   Un parcours est une exploration d'un graphe en suivant les arêtes, la liste des sommets et arêtes visités lors de cette exploration forme un sous graphe et est un arbre.

   Un parcours en largeur privilégie la proximité à la racine : pour le faire, on visite les sommets selon une file d'attente ne contenant initialement que la racine, et chaque sommet y ajoute ses fils non déjà parcourus lors de sa visite. Les sommets sont ainsi visités par distance croissante à la racine.

   Un parcours en profondeur privilégie les chemins. Un sommet visité déclenche la visite de tous ses fils avant de clore et remonter. On peut annoter un tel parcours par l'ordre de début de visite, de fin de visite ou les deux. À tout moment, la liste des sommets actifs est un chemin depuis la racine.

   Les deux types de parcours couvrent exactement l'ensemble des sommets accessibles depuis la racine choisie.
3. Construire un parcours en largeur enraciné en 1 et en a.

   Pouvez vous déterminer le diamètre de ces deux graphes ?
4. Construire le parcours en profondeur enraciné en 1 et en f en utilisant l'ordre intuitif.
5. Construire le parcours en profondeur utilisant l'ordre intuitif enraciné en A et en h

Arbres

Nombre d'arête

Un graphe non orienté est un arbre si et seulement si il est connexe et acyclique.

Le but de cet exercice est de montrer qu'un graphe non orienté fini vérifiant l'une de ces propriétés et dont la différence entre le nombre de sommets et d'arêtes est exactement 1 est également un arbre.

1. (a) Quelle est la taille maximale d'un graphe connexe ayant 0 arêtes, 1 arêtes, 2 arêtes ?
   (b) En partant d'un graphe connexe quelconque de n sommets et m arêtes, exhiber un graphe connexe de $n-1$ sommets et au plus $m-1$ arêtes.
   (c) Que peut on en conclure sur les nombres de sommets et arêtes d'un graphe connexe en général ?
   (d) En partant d'un graphe connexe de n sommets et m arêtes, ayant un cycle, exhiber un graphe connexe de taille n sommets et $m-1$ arêtes.
   (e) Que peut on en conclure sur le nombre de sommet et d'arête d'un graphe connexe non acyclique ?
   (f) Que peut on conclure sur un graphe connexe de n sommets et $n-1$ arêtes ?
2. (a) Quelle est le nombre d'arête maximal d'un graphe acyclique ayant 1, 2 ou 3 sommets ?
   (b) En partant d'un graphe acyclique quelconque de n sommets et m arêtes, exhiber un graphe acyclique de $m-1$ sommets et au plus $n-1$ sommets.
   (c) Que peut on en conclure sur les nombres de sommets et arêtes d'un graphe acyclique en général ?
   (d) En partant d'un graphe acyclique non connexe de n sommets et m arêtes, exhiber un graphe acyclique de taille n sommets et $m+1$ arêtes.
   (e) Que peut on en conclure sur le nombre de sommet et d'arête d'un graphe acyclique non connexe ?
   (f) Que peut on conclure sur un graphe acyclique de n sommets et $n-1$ arêtes ?

Arbre de récurrence

On prend comme ensemble de sommet l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{T\}$.

Soit P une propriété paramétrée, en notant $P(i)$ la valeur de vérité de la propriété au rang i.

Pour chaque assertion de la forme "On peut prouver $P(j)$ en utilisant $P(i)$", on insère une arête $j \to i$ dans le graphe. Intuitivement $i \to j$ signifie que l'on peut ramener la preuve de $P(j)$ à celle de $P(i)$. De même, pour tout i telle que $P(i)$ est prouvable, on ajoute une arête de i vers T.

— Comment interpréter un chemin en terme de preuve, comment interpréter un cycle ?

— En particulier interpréter l'existence d'un chemin vers T, ainsi que l'ensemble des sommets admettant un tel chemin.
— Peut on interpréter l'absence d'un chemin ?
— Quel graphe apparait avec les hypothèses d'une récurrence classique sur P ?
— Peut on étendre la notion de récurrence à l'aide de cet outil ?
+ Certaine récurrences s'appuient sur plusieurs autre valeurs du ou des paramètres à chaque étape. Pouvez vous décrire la validité d'une telle récurrence comme propriété du graphe ? Comment interpréter un cycle dans ce nouveau contexte ?

Autour de $\mathbb{N}, |$

On considère le graphe $(\mathbb{N}\,\{i \to j, \forall i, j \in \mathbb{N}/\exists k, j \times k = i\})$

1. Décrire le graphe : est il orienté, direct, acyclic, connexe fortement connexe ?
2. Quels sont les degré des sommets ?
3. Quel est le diamètre du graphe ?

   même question en retirant les sommets 1 et 0.

   même questions en remplaçant $\exists k$ par $\exists k,$ premier dans la définition.

   même question en retirant 1 et 0
4. Comment décrire sur le graphe et ses variations que deux nombres sont premier entre eux, comment caractériser le pgcd et le ppcm d'un ensemble d'entier ?

1 Graphes et Jeux

Jeu des bâtonnets

Règles du jeu Ce jeu se joue à deux joueurs, agissant chacun à leur tour. Entre les deux joueurs se trouve un tas de bâtonnets, duquel les deux joueurs retirent entre 1 et 5 éléments, en espérant ne pas prendre le dernier élément.

1. En prenant les valeur du nombre de bâtonnets comme sommets et les actions possibles comme arêtes, Que peut on dire du graphe obtenu ?
2. À quel objet correspond une partie ? Stratégiquement, l'état 1 est perdant : arrivé dans cet état un joueur ne peut plus gagner la partie. Inversement les états 2,3,4, 5 et 6 sont gagnants : un joueur dans cet état peut choisir $i - 1$, et forcer son adversaire dans un état perdant.

   On généralise cette notion : un état est perdant s'il n'existe aucune arête de cet état vers un état perdant, et un état est gagnant s'il existe une telle arête.
3. Calculer les états perdants et gagnants pour $n < 20$ par programmation dynamique

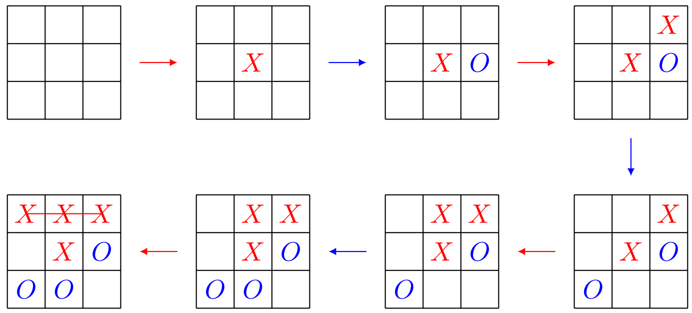


FIGURE 1 – exemple de partie, victoire du joueur 1

4. Retirer les arêtes amenant sur un état gagnant.
   — Que dire du graphe obtenu en terme de stratégie ?
   — Que dire du graphe obtenu en terme de graphe ?
   — Que dire du graphe obtenu par rapport aux entiers
5. en déduire une méthode rapide pour évaluer si une position est gagnante

Tic-Tac-Toe

Tic tac toe se joue sur une grille de 3×3 entre deux joueurs. Chaque joueur marque une case libre lors de son tour jusqu'à ce que soit trois cases alignées soient marquées par le même joueur ou la grille est remplis complètement

1. Quels sont les état possible du plateau lors d'une partie ?
2. En jouant sur la représentation, montrer que le nombre d'état possible est fini, par exemple inférieur à $3^9 = 19683$.

+ Pouvez vous trouver une borne plus précise ?

3. Choisir quels ensemble utiliser comme sommets et arêtes pour définir un graphe correspondant au jeu, que peut on dire de ce graphe.
4. Adapter les notions d'état gagnant et perdant pour inclure les positions nulles.

   Un algorithm intuitif pour choisir sa stratégie est de "prévoir n coups en avance", c'est a dire de créer et explorer l'ensemble des états accessibles en n transitions, effectivement un parcours en largeur, puis évaluer les feuilles accessibles et ne laisser à chaque étapes que les arêtes amenant au meilleur choix pour le joueur, alternant les objectifs : il s'agit d'un arbre min-max

5. Quels sont les état possibles aux feuilles ?

+ Pensez vous qu'une telle approche puisse fonctionner en général ? Sur quelles propriété du jeu et du graphe s'appuie t on ?

6. Dans le cadre du tic tac toe, quel borne peut on placer sur l'horizon, combien d'état cela nécessite d'analyser

   Dans le cas particulier du Tic Tac Toe, on peut utiliser un parcours en profondeur, cad suivre

\+ Que pensez vous de cette algorithm en général, y compris pour un jeu dont le graphe n'est pas acyclique ?