Plusieurs perspective utilisant des approches différentes sur des graphes et correspondant à des problèmes d'optimisations différents, traités très superficiellement.

Globalement, les flots sont une approche presque physique avec les flots cherchant des contraintes de capacité et des bornes, répondant à la question de ce qui est possible dans l'absolu. Les chaines de Markov étudient les dynamiques et prédisent les points d'équilibre, la stabilité dans le temps.

Les Jeux séparent l'optimum social des meilleurs cas réalistes, résistant au sabotage égoïstes

Ces trois approches appliqué à une classe de problème vont donner des modèles et solutions différentes, et poser des problèmes et nécessiter des résolutions différentes également.

1 Flots

Définition 1. *Flot (flow) Un problème de flot se pose sur un graphe orienté avec pour chaque arête une valeur positive en étiquette, ou nulle s'il n'y a pas d'arête, sa capacité. On ajoute deux sommets particuliers, la source (souvent notée s) avec seulement des arêtes sortantes et le puits (souvent noté t) avec seulement des arêtes entrantes.*
Un flot est construit sur une fonction qui associe à chaque arête une valeur entre 0 et sa capacité, telle que sur chaque sommet autre que la source et le puits la somme des valeurs sur les arêtes entrantes soit égale à celle sur les arêtes sortante. On défini le flot d'un sommet x à un sommet y comme la valeur associé à l'arête (x, y) moins celle associé à l'arête (y, x). Un flot maximal est un flot qui maximise le flot sortant de la source.

Propriété 1. *Conservation du flot Sur un graphe orienté sur lequel existe un flot, si S est un ensemble de sommet contenant s et non t, alors la somme des valeurs du flot sur les arêtes de S vers $V \setminus S$ ne dépend pas de S et est simplement égale au flot sortant de s.*
(Si S contient t et non s, cette somme est l'opposée, si S contient s et t ou ni s ni t, cette somme est nulle)

Démonstration. En première remarque, par construction, pour toute paire de sommets x, y, $f(x, y) = w(x, y) - w(y, x) = -(w(y, x) - w(x, y)) = -f(y, x)$. Si on somme cette égalité sur toutes les paires de sommets d'un ensemble par example S, nous avons

$$\sum_{x,y \in S} f(x, y) = \sum_{x,y \in S} (-f(y, x)) = -\sum_{x,y \in S} (f(x, y))$$

donc cette somme est nulle.

Ajoutons la à l'expression de la somme des flots sortants de S :

$$\sum_{x \in S, y \in V \setminus S} f(x, y) = \sum_{x \in S, y \in V \setminus S} f(x, y) + \sum_{x,y \in S} f(x, y) = \sum_{x \in S, y \in V} f(x, y)$$

On obtient la somme sur les éléments de S des flots locaux.

Maintenant, faisons la même chose à partir de l'équation de conservation de flot :

$$\forall x \neq s, t, \sum_{y \in V} f(x, y) = 0$$

donc

$$\sum_{x \in S \setminus \{s\}, y \in V} f(x, y) = 0,$$

et donc

$$\sum_{x \in S, y \in V} f(x, y) = \sum_{x \in S \cap \{s,t\}, y \in V} f(x, y) = \sum_{y \in V} f(s, y).$$

Groupons ces deux égalités :

$$\sum_{x \in S, y \in V \setminus S} f(x,y) = \sum_{x \in S, y \in V} f(x,y) = \sum_{y \in V} f(s,y).$$

Le flot sortant d'un ensemble contenant la source mais pas le puits est exactement le flots issue de la source.

En particulier, on peut aussi prendre $S = V \setminus \{t\}$, pour obtenir, en symétrie, le même résultat vis à vis du puits. $\square$

En remarque, cela donne un premier algorithme pour obtenir un flot maximal, potentiellement extrêmement lent, puisque la réduction du poids des arêtes/ l'augmentation du flot à chaque étape peut n'être que seulement du plus grand diviseur commun du poids des arêtes (sur les réels :$\max\{r \in \mathbb{R}+, \forall e \in E, \exists i \in \mathbb{Z}, r \cdot i = w(e))$ s'il existe, et une suite infinie tendant vers 0 au cours de l'exécution de l'algorithme sinon. On peut améliorer cet algorithm avec une garantie de convergence en temps polynomial en préférant le chemin augmentant le plus court, via un parcours en largeur.

Définition 2. *graphe résiduel Le graphe résiduel d'un problème de flot et d'un flot est le graphe dans lequel on soustrait aux capacités des arêtes la valeur signée du flot correspondant.*
Cette opération peut supprimer des arêtes si leur capacité tombe à 0*, cette transformation créé, si elle n'est pas déjà présente, une arête dans la direction opposé de chaque arête empruntée, en soustrayant une valeur négative à une capacité au moins* 0 *: réduire le flux dans une direction est équivalent à augmenter le flux dans la direction opposée.*

Le graphe résiduel d'un flot vérifie les même conditions et propriétés que le graphe d'origine, permettant de chercher un second flot, d'ajouter, soustraire ou mettre à jour des flots

Définition 3. *chemin augmentant (dans le contexte des flots) Un chemin augmentant pour un flot est un chemin de la source vers le puits dans le graphe résiduel du flot. Il permet de créer un nouveau flot de valeur strictement positive, qui peut être ajouté au flot initial.*

Coupe

Définition 4. *Coupe (cut) Dans un graphe orienté ou non orienté, une coupe est une partition des sommets en deux sous ensemble.*
Le poids d'une coupe est la somme des poids des arêtes dont le premier élément est dans la première partie et le second dans la seconde.

Théorème 1. *min cut max flow Dans un graphe orienté pondéré muni d'une source et d'un puits, le flot maximal de la source vers le puits est égal au cout de la coupe minimale telle que la source soit dans la première partie et le puits dans la seconde.*

Démonstration. Montrer que la coupe coute au moins autant que le flots maximal est une conséquence de la conservation du flot : le flot total traversant la coupe est majoré par la somme des poids des arêtes empruntées, c'est à dire la valeur de la coupe, et est égal à la valeur du flot lui même.

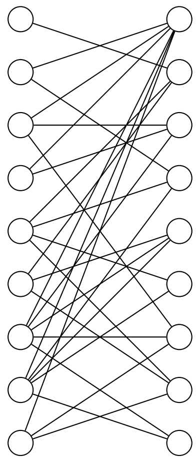
Montrons la réciproque : qu'il existe une coupe et un flot partageant la même valeur. On prend et le graph résiduel d'un flot maximal.

On considère la coupe séparant les sommets en sommets accessibles depuis la source dans le nouveau graphe, et sommets non accessible depuis la source. Puisque le flot est maximal, il n'existe pas de chemin augmentant, donc le puits n'est pas accessible : les deux parties sont non vides, et peuvent être traitées comme une coupe. Par construction, le graphe réduit n'admet pas d'arêtes à la frontière de la coupe donc le poids de chaque arête est égal à son flot, et le flot des arêtes dans la direction opposée est nul : le coût de la coupe est exactement le flot sortant de cette coupe, et égal au flot total. $\square$

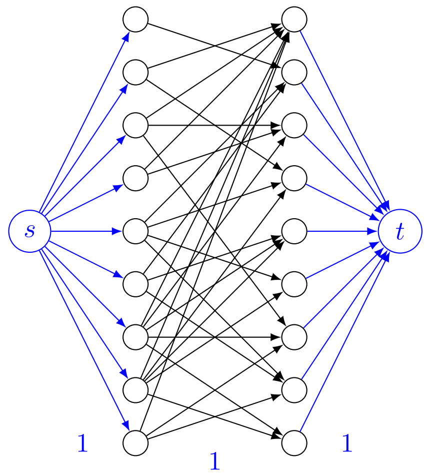
Exploitation L'utilisation la plus naturelle des modèle de flot est pour représenter des problèmes qui se comportent comme des flots de manière native : flux d'électrons dans un circuits, modèle fluvial à l'équilibre, flux moyen de voiture, d'argent, de personnes ou de ressources...

Mais on peut aussi convertir d'autre problèmes en problème de flots, pour les résoudre de manière différentes.

Par exemple : Un problème de couplage (pondéré ou non) sur un graphe biparti $G = V_1 \cup V_2, E \subset V_1 \times V_2$ devient un problème de flot si on ajoute une source, un puits, les arêtes adjacentes à ces deux sommets, et une orientation et pondérations au reste :



devient



Un couplage est un flot, le nombre de couple est la valeur du flot, donc un couplage maximum est un flot maximal. Inversement, puisque toutes les arêtes ont des capacités entières (1), alors tout flot solution peut être converti en un flot solution de même valeur et n'admettant que des tronçons entiers, qui peuvent ensuite être traduits en un couplage.

2 Parenthèse : Réseaux de Jackson

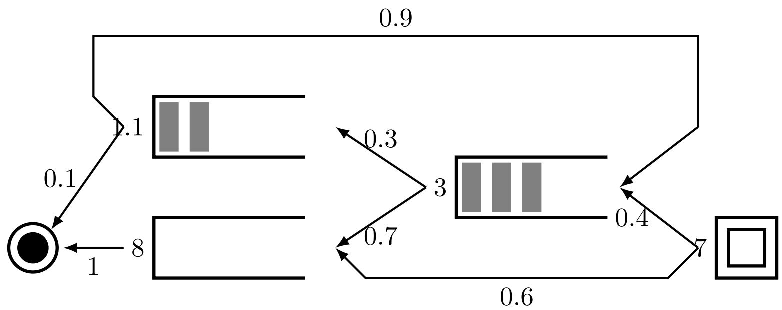
Ce qui suit n'est plus tout à fait de la théorie des graphes, mais peut être vu comme une illustration de ce qui peut être fait avec.

2.1 Définition

Les réseaux de Jackson sont un modèle en théorie des queues, qui sont une approche possible des problèmes de réseaux.

Dans un modèle de Jackson, on considère que les points de relais, appelés queues, files, noeuds ou serveurs sont placés aux sommets d'un graphe, et ont une capacité et un débit sortant. Il y a deux sommets spéciaux additionnels : une source de débit fixe et un puits sans sortie. Les arêtes correspondent aux connections entre files, étiquetées par des probabilité.

Aux intervalles de poisson définis par son débit, une file (ou la source) dont la réserve est non vide traite et le premier élément de cette réserve en l'envoyant sur une des transitions tirée au hasard selon la probabilité des étiquettes, le retirant de sa réserve. Cet élément arrive sur dans la réserve de la nouvelle file si le niveau de remplissage de cette dernière n'est pas au niveau de sa borne, et est détruit sinon.



Un exemple avec trois serveurs, une analyse superficielle montre que le système est stable.

Plusieurs questions peuvent se poser :

Des problèmes de stabilité

- quelles files perdent des paquets
  quelles files ne sont jamais vide
- quand et comment se propagent des changements brutaux

Des questions de comportement

- quelle est l'évolution générale
- quels sont les taux de remplissage moyens

Des questions de convergence

- Mixing time :temps caractéristique pour oublier les conditions de départ
- contraintes sur convergences duales de chaines paramétrées

Ou d'autre problématiques : corrections (propriétés sur l'ensemble des états atteignable), robustesse au bruit, robustesse aux changements, temps moyen de visite de tous les sommets...

Une file qui n'est jamais vide signifie que l'arrivée moyenne de paquet dépasse sa capacité de traitement, et signifie que le point d'équilibre se fait avec une perte régulière et inévitable de paquets, quelle que soit la taille de la réserve. Une telle file est dite instable.

Si toutes les chaines sont stables, et si on remplace les débit des files non saturées par leur débit effectif (incluant le facteur du au taux de remplissage), à l'équilibre, on a effectivement un flot, avec chaque file vérifiant $\tilde{\mu}_i = \sum p_{ji}\tilde{\mu}_j$.

Le même modèle peut aussi représenter des dettes mutuelles dans un réseau bancaire : une banque rembourse ses dettes complètement si possible et partage ses avoir proportionnellement aux montants dues sinon. Dans ce cas, l'analyse est la même, mais le jugement de valeur est inversé : une banque solvable correspond à une file saturée, une banque insolvable à une file stable, tandis que l'équivalent des paquet perdu sont les bénéfices nets.

2.2 Calcul de stabilité

Une approche classique consiste à remplacer toutes les chaines par des sources dont la sortie est leur débit maximal, ce qui donne une borne supérieure sur les flots de paquets. On réintroduit ensuite itérativement les files stables, dont le comportement reste dans la gamme proportionnelle, exprimant les valeur de sortie comme des combinaison linéaire des arêtes entrantes. Chaque substitution réduit le flot, préservant la validité de l'ensemble des files stables, jusqu'à obtenir la plus grande des solutions possible. Si le system n' a pas de file dont l'influence sur elle même est 1, cette solution est la seule solution. Sinon, celle des solutions qui intéresse l'utilisateur dépend du problème modélisé.

une manière naive de réaliser ce calcul par des inversion de système d'équations successive prends un temps n^4, que l'on peut réduire en un n^3 avec une LU

2.3 Comportement général

2.3.1 préliminaire : Chaines Markov

Définition 5. *Chaine de Markov Une chaine de Markov est un processus aléatoire dont la spécificité est que la transition à un instant donné ne dépend que du tirage aléatoire, du temps et de l'état précédent.*

Une chaine est homogène si elle ne dépend pas du temps.

Une chaine de Markov peut être représenté par un graphe (même dans les cas infini ou semi fini) dont les sommets sont les états possibles et les arêtes sont les transitions étiquetées par leur probabilités dans le cas des transitions discrètes ou de l'inverse de la période dans le cas des chaines à transition continues.

On retrouve les différentes définitions et caractéristique des graphes :

Définition 6. *Ergodique une chaine de Markov est ergodique si pour toute paire d'état, il existe une suite de transitions de probabilités non nulles amenant le premier vers le second.*

i.e. le graphe est fortement connexe.

Définition 7. *Periodic Une chaine de Markov est périodique de période* $p \in \mathbb{N} \geq 2$ *si la taille de tout cycle est un multiple de* p*. Une chaine est dite aperiodic s'il n'existe pas de telle* p*.*

Définition 8. *régulière Une chaine ergodique apériodique est régulière.*

On retrouve des problèmes de graphe : par exemple, dans une chaine de Markov en recuit simulée : dont les transitions sont paramétrée par une exponentielle du temps, et telle que pour toute valeur non infini la chaine est régulière, mais que la limite ne l'est pas, les arbres couvrants minimums sur les facteurs dans les exposants, enracinés sur les différents états aident à prédire la vitesse de convergence pour garantir que la bonne composante connexe soit sélectionnée

Distribution à l'équilibre Un aspect important des chaine de Markov est la distribution des probabilité des différents états après un certain nombre de transition, ou un certain temps dans le cadre des chaine continues. Pour une chaine régulière, la distribution converge à l'infini vers une distribution qui ne dépends pas de la valeur initiale, et est appelée distribution à l'équilibre. Cette distribution représente le comportement moyen du système.

Matriciellement, on écrit souvent une chaine de Markov discrète à travers sa matrice de transition, qui est une matrice stochastique (a valeur dans $\mathbb{R}+$, et telle que la somme des éléments de chaque colonne est 1).

En notant P cette matrice, la distribution à l'équilibre μ^* est la solution unique de l'équation matricielle $\mu = P\mu, \sum \mu_i = 1$. Cette égalité peut aussi être vue comme un système d'équations sur les différentes probabilités des configurations, traduisant l'impact ou l'absence d'impact d'un pas unique dans la chaine. On parle parfois de système de Poisson.

Sur des petites chaines, résoudre ce système est faisable et donne une solution fermée utile. Sur des grandes chaines, et les chaines issues des réseaux de Jackson sont grandes, cela n'est pas faisable, et nécessite d'autre approches

2.3.2 Quelle chaine pour un réseau de Jackson ?

Les états de la chaine Markov sont les configurations, ie les vecteur de valeur de remplissage. Les transitions sont des événements : un paquets allant d'une file A à une file B se traduit par l'addition de $e_B - e_A$ au vecteur, avec comme probabilité : probabilité de choisir la file A (proportionnelle à son débit) fois conditionnelle A non vide, ($\delta_{x_A \neq 0}$) fois étiquette de l'arête AB fois conditionnelle file B non remplie ($\delta_{x_B < b_B}$).

Ces éléments peuvent être vu comme une probabilité constante $\frac{\mu_A}{\sum \mu} \cdot P_{AB}$ fois une valeur dépendante de l'état actuel.

De même, la perte de paquet, l'envoie de paquet au puits, ou l'arrivée de paquets de la sources sont des événements qui ne dépendent bien que de l'état courant et d'un tirage aléatoire : on obtient bien une chaine de Markov.

Traitement L'état d'un système est le produit cartésien des taux de remplissage, le nombre d'état est donc exponentiel sur le nombre de file d'attente, rendant une solution analytique infaisable.

Une solution est de passer par une simulation : la distribution d'une chaine de Markov durant une marche aléatoire converge vers la distribution à l'équilibre, et répéter une trajectoire polynomialement longue un nombre polynomial de fois est plus rapide que de résoudre un système comportant un nombre exponentiel d'équations, et peut donner suffisamment d'information, ou permettre des tests avec certaines garanties, mais cette méthode, appelée Monte Carlo est biaisée, avec un biais qui converge vers 0 éventuellement mais demande un temps de calcul long.

Une alternative élégante est la simulation parfaite : un équivalent de monte carlo qui atteint la bonne distribution en temps fini.

Pour éviter les biais liés à l'arrêt (l'état final d'une marche aléatoire sur une chaine de markov peut être biaisé par la manière de décider quand l'arrêter, un critère qui n'introduit pas de biais est appelé *point d'arrêt*, et ne dois pas dépendre de ce qui est mesuré), une astuce est de parcourir la chaine de Markov à l'envers.

Ceci est distinct du travail de couplage pour inverser une chaine de Markov, mais dans les deux cas il est nécessaire de coupler les événements et de séparer les tirages aléatoires des états. Cela permets de synchroniser les trajectoires, garantissant que deux trajectoires fusionnées restent fusionnées.

On définit un temps, le temps 0 comme état final, et on part d'un temps antérieur en suivant les trajectoires issues de tous les états. Si au temps 0, la chaine est réduite à une seule trajectoire, le point d'arrivé est un tirage parfait. Sinon, on recommence en partant d'un point antérieur, en complétant les trajectoires par les variables déjà tirées lorsque l'on enchaine sur le point de départ initial. Les trajectoires obtenues sont un sous ensemble des trajectoires déjà visitées, qui réduit à chaque extension en temps.

L'espérance du temps nécessaire est égale au mixing time de la chaine, et la manière la plus efficace de faire est de doubler l'intervalle à chaque fois.

3 Parenthèse : Jeux Congestion

Une autre perspective sur des problèmes de flux est les jeux de congestions, nommés comme cela car ils ont servi initialement à participer à des modélisations de prédictions d'embouteillage.

Définition 9. *Jeux Un jeu est la donnée d'un ensemble d'acteurs (ou agents ou joueurs) avec chacun un ensemble de stratégies possibles et une fonction d'utilité qui associe à la configuration formée par les stratégies de tous les joueurs une valeur réelle.*

Les acteurs cherchent à maximiser leur gain et sont généralement considérés comme 'rationnels', c'est à dire égoistes et sans objectif secondaire caché.

Définition 10. *Jeux de potentiels Un jeu est de potentiel s'il existe une fonction associant à chaque configuration une valeur réelle telle que pour tout joueur, si le joueur change de choix unilatéralement (Tous les autres maintiennent leur stratégie actuelle) alors la variation de la fonction d'utilité du joueur est la même différence que celle de la fonction de potentiel.*

Le dilemme du prisonnier est un jeu de potentiel. Papier cailloux ciseaux n'est pas un jeu de potentiel. Un jeu dans lequel tout le monde partage le même objectif est un jeu de potentiel.

Définition 11. *Jeux de congestion Un jeu de congestion est donné par un ensemble de ressources, et une fonction de coût croissante et convexe associée à chaque ressource.*
Chaque joueur choisi un ensemble de ressources vérifiant une propriété spécifique au joueur quel ressource exploiter et son gain est l'opposé de la somme des coûts des ressources prises.

Ces jeux peuvent représenter quelque chose de simple comme le choix d'un fournisseur d'électricité, ou de la position de puits, ou des problèmes beaucoup plus complexes.

On peut noter que a priori ces jeux ne sont pas intrinsèquement liés aux graphes et ne semblent pas avoir de liens avec leur problématiques. Le lien apparait lorsque l'on considère que les ressources peuvent avoir une structure.

Un problème d'embouteillage est un jeu dans lequel les ressources sont les tronçons de route, les joueurs sont des usagers, et les stratégies sont des chemins dans le réseaux, un ensemble de tronçons contiguës démarrant au point de départ propre au joueur, arrivant à son point d'arrivé choisi et partagé avec les autre utilisateurs.

Un problème de réseau sans fil peut être vu comme un jeu dans lequel les ressources sont les canaux, dont la disponibilité dépend de la position du joueur, créant un graphe entre les joueurs qui ont ou n'ont pas accès à des canaux en commun.

Un problème de routage de paquet est similaire à un embouteillage, avec des coûts, priorité et interférences différentes

Théorème 2. *Moderer-Shapley Tout jeu de congestion est un jeu de potentiel et tout jeu de potentiel est un jeu de congestion*