

Définition 1. *voisinage* Le voisinage d'un sommet est l'ensemble des sommets tels qu'il existe une arête entre les deux. On peut parler de voisinage sortant, entrant ou total.

Correction du cafouillage de la dernière fois : Dijkstra est simplement un parcours en largeur dont la priorité est la distance totale.

1 Quelques problèmes classiques

Définition 2. *Arbre couvrant* Un arbre couvrant est un sous graphe dont la structure est celle d'arbre et qui inclut tous les sommets

Le problème d'optimisation correspondant est la recherche d'un arbre couvrant de poids minimal, et un problème polynomial : Les algorithmes de Prim et Kruskal le résolvent.

Algorithm 1: Prim

Data: Graphe $G = (V, E)$, poids $w : E \rightarrow \mathbb{R}$

Result: Arbre A

```
1 Trier les arêtes par poids croissant en une liste  $\ell = e_1 \cdots e_m$  ;
2  $A \leftarrow V, \emptyset$ ;
3 for  $i$  de 1 à  $m$  do
4   | if  $e_i.1$  et  $e_i.2$  ne sont pas connectés dans  $A$  then
5   |   | Ajouter  $e_i$  à  $A$ ;
6   | end
7 end
```

Algorithm 2: Kruskal

Data: Graphe $G = (V, E)$, poids $w : E \rightarrow \mathbb{R}$

Result: Arbre A

```
1  $A \leftarrow \{v\}, \emptyset$ ;
2  $\ell \leftarrow (\{v, i\} \in E)$ ;
3 trier  $\ell$  via  $w$ ;
4 while  $\ell \neq \emptyset$  do
5   |  $e \leftarrow \ell.1$ ;
6   |  $A \leftarrow (A.V \cup \{e.2\}, A.E \cup \{e\})$ ;
7   | for  $\{e.2, i\} \in E, i \notin A.V$  do insérer  $(e.2, i)$  dans  $\ell$ ;
8 end
```

Correction des algorithmes : Les deux graphes construits de manière glou-tonne un sous graphe acyclique vérifiant les propriétés qu'il ne peut être étendu par aucune arête, et que toute permutation retirant une arête et en ajoutant une autre sans créer de cycle augmente son poids

Pour prouver l'optimalité, on peut considérer une autre solution, puis construire une série de solutions intermédiaire en ajoutant itérativement une des nouvelles arêtes e , ce qui crée un cycle dont exactement une arête f appartient seulement à la solution gloutonne, et retirer cette dernière.

Par construction, dans Prim, lorsque l'arête f a été sélectionnée, elle était l'arête de poids minimum parmi les arêtes disponibles, ce qui inclut directement e . Dans Kruskal, on peut considérer le cycle incluant e et f , et le fait que l'algorithme choisit, à l'aide de comparaisons successives, toutes les arêtes sauf celle de poids maximal, donc e , exclue est de poids supérieure à f , incluse.

Cela montre que de proche en proche, le poids des solutions intermédiaires augmente avec la distance à la solution gloutonne, qui est donc meilleure que l'autre, et donc optimale.

Circuits

Définition 3. *Circuit Eulerien* Un circuit eulérien est un sous graphe dont la structure est celle d'un cycle simple, et qui inclut tous les sommets

La recherche d'un circuit eulérien de poids minimum est le problème du voyageur de commerce, NP complet dans le cas général.

Définition 4. *Circuit Hamiltonien* Un circuit hamiltonien un ordre sur les arêtes tels que ces dernières forment un cycle. Le graphe correspondant est le graphe d'origine

Propriété 1. *Un graphe admet un circuit hamiltonien si et seulement si il est connexe et tous ses sommets sont de degré pair.*

Le problème de trouver un circuit hamiltonien dans un graphe est un problème facile, soluble en temps linéaire sur le nombre d'arête. Le problème d'un circuit hamiltonien de poids minimal ne se pose pas.

Un algorithme possible est de faire une sorte de parcours en profondeur sur les arêtes : (les sommets du nouveau graphe sont les arêtes, et une paire de ces sommets est liée par une arête si les arêtes du premier graphes ont un sommets en commun. alternativement : un parcours en profondeur classique en colorant les arêtes aux lieux des sommets). Puisque les degrés sont tous pairs, chaque chemin d'exploration ne peut s'arrêter que sur son sommet de départ, et on obtient une décomposition du graphe en cycle, ainsi que les sommets communs. En ordonnant les feuilles par profondeur décroissante de la bifurcation correspondant au même sommet, l'ordre du parcours est un circuit hamiltonien.

Il est aussi possible de séparer l'extraction et la fusion des cycles, et de raisonner par récurrence.

couverture avec les sommets

Définition 5. *Couverture par sommets* Une couverture d'un graphe par les sommets est un sous ensemble des sommets tels que toute arête du graphe soit adjacente à au moins un élément de l'ensemble

Définition 6. *Ensemble indépendant* Un ensemble indépendant est un sous-ensemble des sommets d'un graphe tels qu'aucune arête ne relie une paire d'éléments de cette ensemble.

Ces deux problèmes sont équivalents : l'ensemble des sommets d'un graphe auquel on retire un ensemble de sommet couvrant est un ensemble indépendant.

En terme d'optimisation, on peut chercher un ensemble couvrant de cardinal minimum, un ensemble couvrant minimisant une somme de poids sur les sommets, ou un ensemble de sommet de cardinal fixe maximisant la somme des poids sur les arêtes.

Ces problèmes sont NP complets dans le cas général.

Couvertures avec les arêtes

Définition 7. *Couverture par arête* Une couverture par arête d'un graphe est un sous ensemble des arêtes tels que tout sommet soit adjacent à au moins une arête

Définition 8. *Couplage* Un couplage est un sous ensemble des arêtes d'un graphe tel que tout sommet du graphe soit adjacent à au plus une arête de l'ensemble.

Définition 9. *Couplage parfait* Un couplage est un sous ensemble des arêtes d'un graphe tel que tout sommet du graphe soit adjacent exactement une arête de l'ensemble.

graphe biparti

Définition 10. *Graphe biparti* Un graphe biparti est un graphe non orienté dont on peut séparer les sommets en deux sous ensembles, tels que toute arête du graphe relie un sommet de la première partie à un sommet de la seconde partie.

par exemple

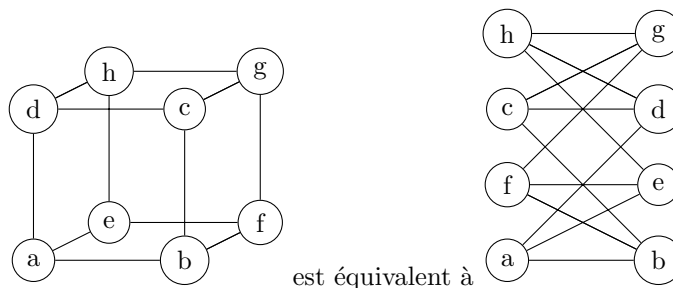


FIGURE 1 – Un cube, ou n'importe quel hypercube, est biparti

On peut convertir un graphe orienté en un graphe biparti de taille double : chaque sommet v devient une paire de sommets v^+ et v^- et chaque arête orientée

(uv) devient une arête non orientée u^+v^- . Le degré sortant d'un sommet v dans le graphe orienté est le degré de v^+ , et une boucle devient une arête liant les deux moitiés d'un sommets.

Inversement, un graphe biparti dans lequel on couple les sommets des deux parties (indépendamment de l'existence d'arêtes dans le graphe) peut être vu comme un graphe orienté.

Les concepts qui nous intéressent sont les couplages parfaits et les couplage de cardinal ou poids maximaux .

Définition 11. *Chemin alternant* Dans un graphe biparti, sur lequel on associe un couplage, un chemin est dit alterné si ses arêtes alternent entre faire partie du couplage ou non. $\forall i, e_i \in M \Leftrightarrow e_{i+1} \notin M$

Théorème 1. *Berge* Un couplage est de cardinal maximal si et seulement si il n'existe pas de chemin alternant maximal non trivial commençant et finissant sur des sommets non couplés

Démonstration. sens direct : par contraposition : Si il existe un tel chemin c , alors on peut construire $M' = M \Delta c$. Tout sommet de c voit une de ses arête retiré et une arête ajoutée, préservant son degré dans M , à 1. Le premier et dernier élément de c voient une arête ajoutée, augmentant leur degré dans M de 1. Comme il s'agissait de sommets non couplés, le degré précédent était 0 et le nouveau degré 1. Aucun autre sommet du graphe n'est pas affecté, préservant leur degré à 1 ou 0 par hypothèse : M' est un couplage. De plus la taille de M' est strictement supérieure à celle de M , donc M n'était pas maximal.

Sens indirect : on peut considérer deux couplages M et M' , ainsi que le sous graphe $M \Delta M'$. Chaque sommet est de degré au plus 1 dans M et dans M' donc de degré au plus 2 dans la différence. Les composantes connexes de ce sous graphe sont donc des type suivant : des singletons, des cycles alternant entre M et M' et des chemins alternant entre M et M' . Les deux première catégories ainsi que les chemins de taille paire incluent autant d'arête des deux couplages, tandis que les chemins de tailles impaire admettent un élément de plus de l'un des couplages : la différence entre le nombre de ces chemins impairs commençant par M ou M' est donc exactement la différence de taille entre M et M' . Si M n'est pas maximal, on peut choisir M' plus grand que M , donc en particulier, il existe au moins un chemin commençant et finissant par un élément de M' . Ce chemin est un chemin alternant de M maximal commençant et finissant sur un sommet non couplé

□

Théorème 2. *Théorème des mariage de Hall* Un graphe biparti admet un couplage parfait si et seulement si les deux parties ont le même cardinal et pour tout sous ensemble de la première partie, l'ensemble des sommets de la secondes connectés à un élément de l'ensemble est de taille supérieure ou égale à celle du sous ensemble

$$|P_1| = |P_2| \wedge \forall X \subset P_1, |\{y \in P_2 \exists x \in X / (xy) \in E\}| \geq |X|$$

Démonstration. sens direct : immédiat : chaque partie est connectée à au moins l'ensemble des sommets couplés à ses sommets.

sens inverse par contraposée en utilisant le théorème de Berge. On suppose qu'il n'existe pas de couplage parfait. On considère un couplage maximal m et un sommet u de P_1 non couplé. On considère l'ensemble des chemins alternant issues de u , y compris les chemins alternant maximaux, et on pose $Q_1 = P_1 \cap (\cup A_i)$ l'ensemble des sommets de P_1 dans ces chemins et $Q_2 = P_2 \cap (\cup A_i)$ l'ensemble correspondant dans P_2 . En particulier :

- Q_2 est exactement l'ensemble des voisins de Q_1 .
- tout élément de Q_2 est couplé à un élément de Q_1 (Berge : sinon il existe un chemin alternant avec deux extrémités non couplées, contredisant l'aspect maximum du couplage)
- u est non couplé

Donc $|Q_1| > |Q_2|$ □

2 Quelques exemples de conversions de graphes

Complémentaire Le complémentaire d'un graphe est le graphe avec les mêmes sommets mais $V^2 \setminus E$ comme arêtes. Un tel graphe a peu de propriété en commun avec le graphe d'origine : il n'y a pas de garantie de connexité, ou d'absence de cycle ou de chemin spécifique.

On peut également prendre le complémentaire d'un sous graphe comme étant l'unique sous graphe dont l'union disjointe avec le précédent sous graphe donne le graphe total.

Jeux sur l'orientation On peut retourner un graphe en inversant la direction de toutes les arêtes. L'interprétation de cette opération dépend du contexte.

On peut projeter un graphe orienté sur un graphe non orienté. On peut appliquer une orientation sur un graphe non orienté pour l'orienter. En particulier, une orientation correspondant à un ordre donne un graphe orienté acyclique.

orienté vers biparti non orienté avec couplage parfait Chaque sommet devient une paire de sommets couplés, chaque arête d'un sommet i vers un sommet j devient une arête entre le sommet i_2 et le sommet j_1 .

Cette transformation est réversible, mais le retour dépend du couplage choisi.

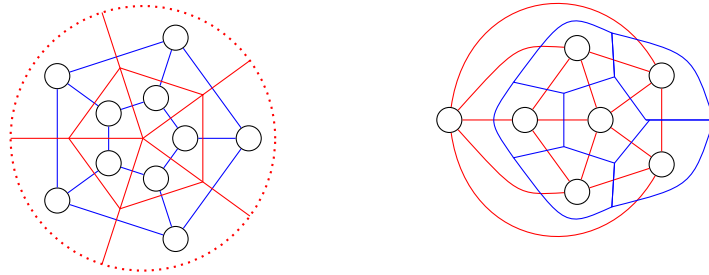
Graphe non orienté vers graphe biparti semi 2- régulier sommets-arêtes ou hypergraphe vers graphe biparti On peut transformer un graphe en extrayant ses arêtes comme sommets supplémentaires, liés par les relations d'appartenance. On obtient un graphe biparti, car les nouvelles arêtes ne peuvent relier les sommets des arêtes qu'aux sommets des sommets. Un tel graphe préserve la structure générale, (connexité, cycles, feuilles, centralité, coupure) et les degrés du côté des sommets, et double la taille de tout chemin

Dualité planaire vers planaire Un graphe planaire est un graphe qui peut être dessiné sans croisement d'arête.

Pour donner une caractérisation plus spécifique, on peut introduire la notion de mineur : un mineur d'un graphe est un graphe obtenu par un nombre arbitraire de suppression d'arêtes, suppression de sommets ou fusion de sommets voisins.

Un arbre est planaire si et seulement il n'admet ni K_5 ni $K_{3,3}$ comme mineurs.

Le dual d'un graphe planaire est obtenu en prenant comme sommets les surfaces délimitées par les arêtes du graphe, incluant l'extérieur comme un sommet unique, et voisines si elles l'étaient dans le dessin.



Cette transformation est symétrique : le dual du dual est le graphe d'origine.